Aufgabe W1a/2005

Für die quadratische Pyramide gilt:

$\overline{AB} = 5{,}6\ cm$

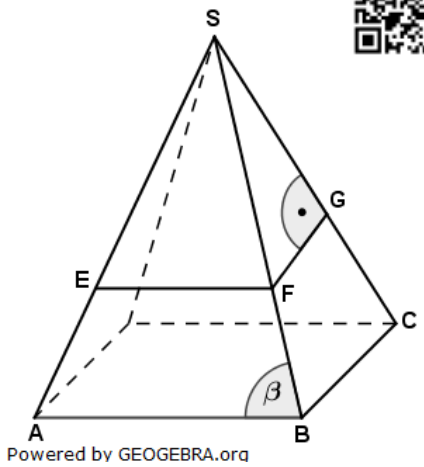
$\beta = 65{,}0°$.

$\overline{AE} = \overline{BF} = 3{,}0\ cm$

Berechnen Sie die Länge $\overline{GF}$ sowie den Flächeninhalt des Vierecks $BCGF$.

Lösung: $\overline{FG} = 2{,}8\ cm$

$A_{BCGF} = 13{,}6\ cm^2$

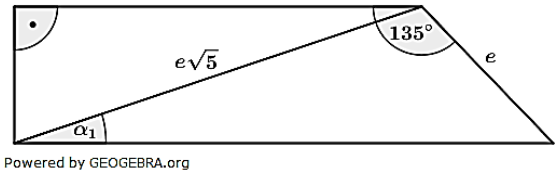


Aufgabe W1b/2005

Gegeben ist das rechtwinklige Trapez.

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass gilt:

$tan\alpha_1 = \frac{1}{3}$.



Aufgabe W2a/2005

Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = x^2 + 4x + 1$.

Durch den Scheitelpunkt der Parabel und durch den Punkt $P(6|5)$ geht die Gerade g_1.

Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g_1.

Eine zweite nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(3|y_2)$.

Er liegt auf der Geraden g_1.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts A beider Parabeln.

Durch den Schnittpunkt A verläuft eine zu g_1 parallele Gerade g_2. Die Gerade g_2 schneidet die Parabel p_2 in einem weiteren Punkt.

Berechnen Sie dessen Koordinaten.

Lösung: g_1: $y = x - 1$; $A(1|6)$; $B(6|11)$

Aufgabe W2b/2005

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$\frac{-2x^2 + 57x - 21}{6(x-4)(x+3)} = \frac{2x+1}{3x-12} - \frac{3x-1}{2x+6}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3; 4\}$; $\mathbb{L} = \{\frac{5}{3}\}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W3a/2005

Von einer regelmäßigen neunseitigen Pyramide sind bekannt:

$M = 300\ cm^2$ (Mantelfläche)

$a = 6{,}4\ cm$ (Grundkante)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung: $V = 473\ cm^3$

Aufgabe W3b/2005

Ein Kreis wird in zwei Kreisausschnitte geteilt. Beide Ausschnitte bilden jeweils den Mantel eines Kegels (siehe Skizze).

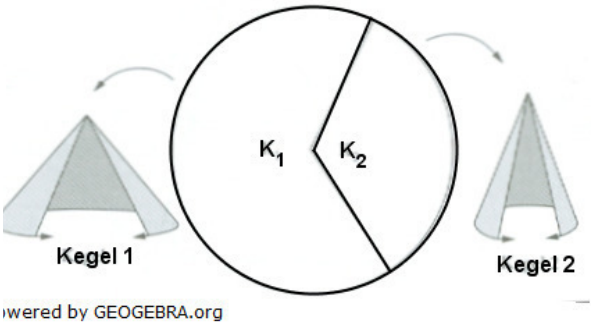
Für Kegel 1 gilt:

$V_1 = 12\pi e^3$.

$h_1 = 4e$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Radus von Kegel 2 gilt:

$r_2 = 2e$



Aufgabe W4b/2005

Im Dreieck ABC liegt das Trapez $ADEF$.

Gegeben sind:

$\overline{AF} = 7{,}1\ cm$

$\overline{FE} = 5{,}0\ cm$

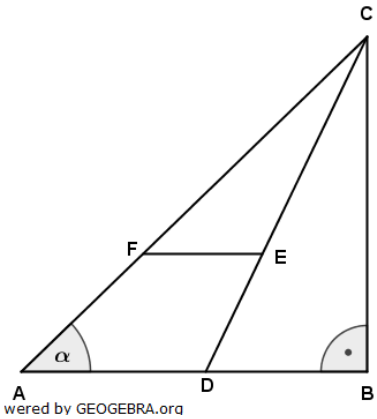
$\overline{BC} = 14{,}0\ cm$

$\alpha = 44{,}0°$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ADEF$.

Lösung: $A_{ADEF} = 31{,}4\ cm^2$

Tipp: Zweiter Strahlensatz für $\overline{AD}$.



Lösung W1a/2005

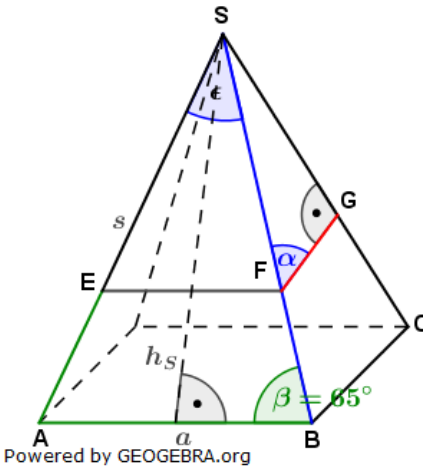
Lösungslogik

Für die Strecke $\overline{FG}$:

Berechnung des Spitzenwinkels ϵ über die Ergänzungswinkel.
Berechnung von s über den $cos\beta$.
Berechnung von $\overline{FS}$ aus der Differenz von s und $\overline{BF}$.
Berechnung von α über die Ergänzungswinkel.
Berechnung von $\overline{FG}$ über den $cos\alpha$.

Für die Fläche $BCGF$:

Berechnung der Seitenfläche der Pyramide über die trigonometrische Flächenformel.
Berechnung der Fläche des Dreiecks FGS über die trigonometrische Flächenformel.
Berechnung der Fläche $BCGF$ über die Differenz aus Seitenfläche Pyramide und Fläche des Dreiecks FGS.



Klausuraufschrieb

ϵ: $\epsilon = 180° - 2 \cdot \beta = 180° - 2 \cdot 65° = 50°$

s: $cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{s}$ | $\cdot s; : cos\beta$

$s = \frac{\frac{a}{2}}{cos\beta} = \frac{2{,}8}{cos65°} = 6{,}63$

$\overline{FS}$: $\overline{FS} = s - \overline{BF} = 6{,}63 - 3{,}0 = 3{,}63$

α: $\alpha = 180° - \epsilon - 90° = 90° - 50° = 40°$

$\overline{FG}$ $cos\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{FS}}$ | $\cdot \overline{FS}$

$\overline{FG} = \overline{FS} \cdot cos\alpha = 3{,}63 \cdot cos40° = 2{,}78$

Die Strecke $\overline{FG}$ ist $2{,}8\,cm$ lang.

A_{ABS}: $A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot sin\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 6{,}63^2 \cdot sin50°$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$= 16{,}84$

A_{FGS}: $A_{FGS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FG} \cdot sin40°$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$= \frac{1}{2} \cdot 3{,}63 \cdot 2{,}8 \cdot sin40° = 3{,}27$

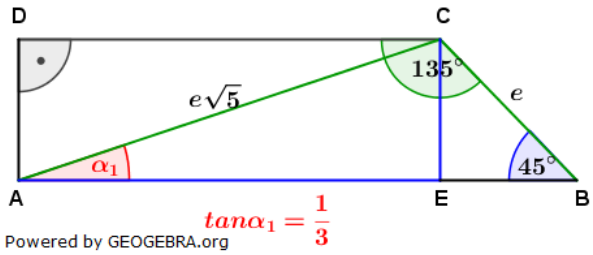
A_{BCGF}: $A_{BCGF} = A_{ABS} - A_{FGS} = 16{,}84 - 3{,}27 = 13{,}57$

Die Fläche des Vierecks $BCGF$ beträgt $13{,}6\,cm^2$.

Lösung W1b/2005

Lösungslogik

Definition $tan\alpha_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$.
Berechnung von $\overline{CE}$ über den $sin45°$.
Berechnung von $\overline{AE}$ über den Satz des Pythagoras.
Einsetzen von $\overline{CE}$ und $\overline{AE}$ in die Definitionsgleichung und Vereinfachen.



Klausuraufschrieb

$tan\alpha_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$

$\overline{CE}$: $sin45° = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}$ | $\cdot \overline{CB}$

$\overline{CE} = \overline{CB} \cdot sin45° = e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{e}{2}\sqrt{2}$

$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{\left(e\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{e}{2}\sqrt{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AE} = \sqrt{5e^2 - \frac{e^2}{2}} = \sqrt{\frac{9e^2}{2}} = \frac{3e}{\sqrt{2}}$

$tan\alpha_1$: $tan\alpha_1 = \frac{\frac{e}{2}\sqrt{2}}{\frac{9e^2}{2}} = \frac{e\sqrt{2}}{\frac{3e}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2005

Lösungslogik

Umstellung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Bestimmung der Geradengleichung g_1 durch den Scheitel von p_1 und Punkt $P(6|5)$.
Bestimmung der y–Koordinate von S_2 über die Geradengleichung.
Aufstellen der Parabelgleichung p_2.
Bestimmung des Schnittpunktes A von p_1 und p_2.
Aufstellen der Geradengleichung g_2 parallel g_1 und durch Punkt A.
Bestimmung des zweiten Schnittpunktes von g_2 mit p_2.

Klausuraufschrieb

p_1: $y = x^2 + 4x + 1$

Scheitelpunktgleichung von p_1:

$y = (x+2)^2 - 3$ | quadratische Ergänzung

$S_1(-2|-3)$

Geradengleichung durch S_1 und P:

g_1: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-3)}{6-(-2)} = 1$

$y = x + b$ | Punktprobe mit $P(6|5)$

$5 = 1 \cdot 6 + b$

$b = -1$

g_1: $y = x - 1$

y_2-Koordinate von S_2:

y_2: $y_2 = 3 - 1 = 2$ | Punktprobe auf g_1 mit $S_2(|y_2)$

$S_2(3|2)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x-3)^2 + 2$ | Scheitelpunktgleichung aufstellen

$y = x^2 - 6x + 11$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 + 4x + 1 = x^2 - 6x + 11$ | $-x^2;\ +6x;\ -11$

$10x = 10$ | $:10$

$x = 1 \longrightarrow p_1$

$y = 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 6$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $A(1|6)$.

Geradengleichung g durch $A(1|6)$ mit $m = 1$:

g_2: $y = mx + b$

$6 = 1 + b$ | Punktprobe mit $A(1|6)$

$b = 5$

g_2: $y = x + 5$

Schnittpunkt von p_2 mit g:

$p_2 \cap g$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 11 = x + 5$ | $-x;\ -5$

$x^2 - 7x + 6 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 6} = 3{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 3{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 6;\ \ x_2 = 1$

$x_1 \longrightarrow g_2$

$y_1 = x_1 + 5 = 6 + 5 = 11$

Der zweite Schnittpunkt von p_2 mit g_2 hat die Koordinaten $B(6|11)$.

Lösung W2b/2005

$$\frac{-2x^2 + 57x - 21}{6(x-4)(x+3)} = \frac{2x+1}{3x-12} - \frac{3x-1}{2x+6}$$

Nenner 1:		$2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)$
Nenner 2:	$3x - 12$	$3(x-4)$
Nenner 3:	$2x + 6$	$2(x+3)$
Hauptnenner:		$2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)$

$2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3) = 0$ für $x_1 = 4$ und $x_2 = -3$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-3; 4\}$

$$\frac{(-2x^2 + 57x - 21) \cdot \cancel{2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)}}{2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)} = \frac{(2x+1) \cdot \cancel{2 \cdot 3 \cdot (x-4)}(x+3)}{\cancel{3(x-4)}} - \frac{(3x-1) \cdot \cancel{2 \cdot 3} \cdot (x-4)\cancel{(x+3)}}{\cancel{2(x+3)}}$$

$-2x^2 + 57x - 21 = 2 \cdot (2x+1)(x+3) - 3 \cdot (3x-1)(x-4)$ | ausmultiplizieren

$-2x^2 + 57x - 21 = 2(2x^2 + 7x + 3) - 3(3x^2 - 13x + 4)$ | Restklammern

| auflösen

$-2x^2 + 57x - 21 = 4x^2 + 14x + 6 - 9x^2 + 39x - 12$ | Zusammenfassen

$-2x^2 + 57x - 21 = -5x^2 + 53x - 6$ | $+5x^2;\ -53x;\ +6$

$3x^2 + 4x - 15 = 0$ | $:(3)$

$x^2 + \frac{4}{3}x - 5 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + 5} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{45}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{7}{3}$

$x_1 = \frac{5}{3}$; $\quad x_2 = -3$

Wegen $x_2 = -3 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ die einzigste Lösung.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3a/2005

Lösungslogik

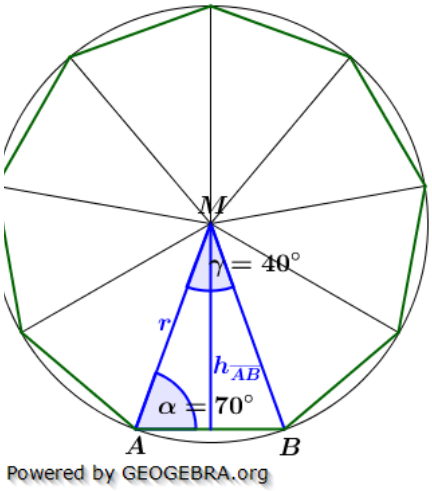
Volumen der Pyramide über $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$.

Berechnung von G:

Wir berechnen die Grundfläche des regelmäßigen Neunecks. Der Mittelpunktswinkel γ ist $\frac{360°}{9} = 40°$. Daraus ergeben sich die Basiswinkel der jeweiligen Teildreiecke zu $\alpha = \frac{180°-\gamma}{2} = 70\,°$.

Wir berechnen den Radius r des Umkreises über den Sinussatz.

Wir berechnen die Fläche des Teildreiecks ABM über den trigonometrischen Flächeninhalt, multiplizieren das Ergebnis mit 9 und haben somit die Größe der Grundfläche errechnet.



Berechnung von h_{Pyr}:

Über den gegebenen Mantel M berechnen wir die Fläche eines Seitendreicks der Pyramide. Mithilfe dieser Fläche und der Grundseite a errechnen wir die Höhe h_a eines Seitendreiecks.

Wir berechnen die Höhe $h_{\overline{AB}}$ (siehe Grafik) eines Teildreiecks der Grundfläche. Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich nunmehr die Höhe h_{Pyr} der Pyramide ermitteln.

Klausuraufschrieb

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$

Berechnung von G:

γ: $\gamma = \frac{360°}{9} = 40°$

α: $\alpha = \frac{180°-\gamma}{2} = 70\,°$

r: $\frac{a}{sin40°!} = \frac{r}{sin70"}$ | Sinussatz

$r = \frac{a \cdot sin70°}{sin40°} = \frac{6{,}4 \cdot sin70°}{sin40°} = 9{,}36$

A_{ABM}: $A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin\gamma$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}36^2 \cdot sin40° = 28{,}16$

G: $G = 9 \cdot A_{ABM} = 9 \cdot 28{,}16 = 253{,}40$

Berechnung von h_{Pyr}:

A_{Seite}: $A_{Seite} = \frac{M}{9} = \frac{300}{9} = 33{,}3333$

h_a: $A_{Seite} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

$h_a = \frac{2 \cdot A_{Seite}}{a} = \frac{2 \cdot 33{,}3333}{6{,}4} = 10{,}42$

$h_{\overline{AB}}$: $h_{\overline{AB}} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9{,}36^2 - 3{,}2^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{\overline{AB}} = \sqrt{77{,}37} = 8{,}80$

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{h_a^2 - h_{\frac{2}{AB}}} = \sqrt{10{,}42^2 - 8{,}80^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = \sqrt{31{,}14} = 5{,}6$

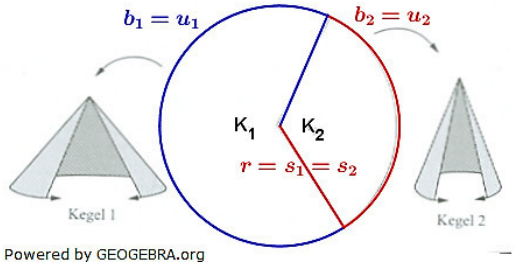
V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 253{,}4 \cdot 5{,}6 = 473{,}01$

Das Volumen der Pyramide beträgt $473\ cm^3$.

Lösung W3b/2005

Lösungslogik

Wegen der Abwicklung der beiden Pyramiden aus ein und demselben Kreis sind deren Seitenlängen gleich. Die Länge der Seitenkante entspricht dem Radius des Abwicklungskreises.
Zum anderen entspricht die Länge des Kreisbogens über K_1 dem Umfang des Grundkreises von Kegel 1, die Länge des Kreisbogens über K_2 entspricht dem Umfang des Grundkreises von Kegel 2.



Der Umfang des Abwicklungskreises errechnet sich aus der Umfangsformel für einen Kreis mit $u = 2\pi \cdot r$, wobei hier r gleich der Länge der Seitenkanten beider Kegel ist.
Berechnung von r_1 aus der Volumenformel.
Berechnung von s_1 über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Umfangs des Grundkreises von Pyramide 1.
Berechnen des Umfangs des Abwicklungskreises mit $r = s_1$.
Differenzbildung aus Umfang des Abwicklungskreises und Umfang des Grundkreises von Kegel 1 ergibt Umfang des Grundkreises von Kegel 2.
Berechnung von r_2 über die Umfangsformel des Grundkreises von Kegel 2.

Klausuraufschrieb

r_1: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$ | $\cdot 3;\ : \pi \cdot h_1$

$r_1^2 = \frac{3 \cdot V_1}{\pi \cdot h_1} = \frac{3 \cdot 12\pi e^3}{\pi \cdot 4e} = 9e^2$ | $\sqrt{\ }$

$r_1 = 3e$

s_1: $s_1 = \sqrt{r_1^2 + h_1^2} = \sqrt{(3e)^2 + (4e)^2}$ | Satz des Pythagoras

$s_1 = \sqrt{9e^2 + 16e^2} = \sqrt{25e^2} = 5e$

u_1: $u_1 = 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot 3e = 6\pi e$

u_{Abw}: $u_{Abw} = 2\pi \cdot s_1 = 2\pi \cdot 5e = 10\pi e$

u_2: $u_2 = u_{Abw} - u_1 = 10\pi e - 6\pi e = 4\pi e$

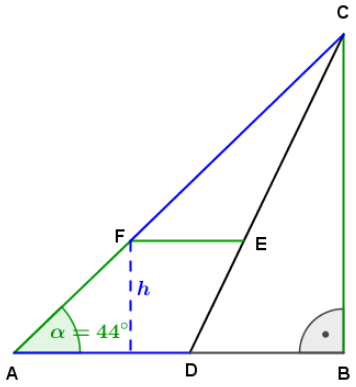
r_2: $u_2 = 2\pi \cdot r_2$ | $: 2\pi$

$r_2 = \frac{u_2}{2\pi} = \frac{4\pi e}{2\pi} = 2e$ **q.e.d.**

Lösung W4b/2005

Lösungslogik (einfach)

Das Viereck $ADEF$ ist ein Trapez mit den beiden parallelen Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{FE}$ und der Höhe h.
Berechnung von $\overline{AC}$ über $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{FC}$ aus Differenz von $\overline{AC}$ und $\overline{AF}$.
Berechnung von h über $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{AD}$ über den zweiten Strahlensatz.



Klausuraufschrieb

$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AD} + \overline{FE}) \cdot h$

$\overline{AC}$: $sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ | $\cdot \overline{AC}$; $: sin\alpha$

$\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{sin\alpha} = \frac{14}{sin44°} = 20{,}15$

$\overline{FC}$: $\overline{FC} = \overline{AC} - \overline{AF} = 20{,}15 - 7{,}1 = 13{,}05$

h: $sin\alpha = \frac{h}{\overline{AF}}$ | $\cdot \overline{AF}$

$h = \overline{AF} \cdot sin\alpha = 7{,}1 \cdot sin44° = 4{,}93$

$\overline{AD}$: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FC}}$ | $\cdot \overline{AC}$ (2. Strahlensatz)

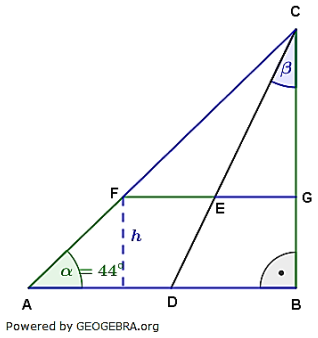
$\overline{AD} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FC}} \cdot \overline{AC} = \frac{5{,}0}{13{,}05} \cdot 20{,}15 = 7{,}72$

$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (7{,}72 + 5{,}0) \cdot 4{,}93 = 31{,}35$

Das Viereck $ADEF$ hat eine Fläche von $31{,}4\ cm^2$.

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{AC}$, $\overline{FC}$ und h wie in Lösungslogik (einfach), dann:
Berechnung von $\overline{AB}$ über $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{FG}$ über $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{EG}$ aus Differenz von $\overline{FG}$ und $\overline{FE}$.
Berechnung Winkel β über tan.
Berechnung von $\overline{DB}$ über $tan\beta$.
Berechnung von $\overline{AD}$ aus Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{DB}$.



Klausuraufschrieb

$\overline{AC}$, $\overline{FC}$ und h siehe Lösung (einfach).

$\overline{AB}$: $tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ | $\cdot \overline{AB}$; $: tan\alpha$

$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{tan\alpha} = \frac{14}{tan44°} = 14{,}4974$

$\overline{FG}$: $tan\alpha = \frac{\overline{GC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BC}-h}{\overline{FG}}$ | $\cdot \overline{FG}$; $: tan\alpha$

$\overline{FG} = \frac{\overline{BC}-h}{tan\alpha} = \frac{14-4{,}93}{tan44°} = 9{,}3923$

$\overline{EG}$: $\overline{EG} = \overline{FG} - \overline{FE} = 9{,}3923 - 5{,}0 = 4{,}3923$

β: $tan\beta = \frac{\overline{EG}}{\overline{BC}-h} = \frac{4{,}3923}{14-4{,}93} = 0{,}4843$

$\beta = \tan^{-1} 0{,}4843 = 25{,}84°$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overline{DB}$: $\quad tan\beta = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$

$\overline{DB} = \overline{BC} \cdot tan\beta = 14 \cdot tan25{,}84° = 6{,}78$

$\overline{AD}$: $\quad \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = 14{,}4974 - 6{,}78 = 7{,}72$

$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (7{,}72 + 5{,}0) \cdot 4{,}93 = 31{,}35$

Das Viereck $ADEF$ hat eine Fläche von $31{,}4\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de