

Lösung W1a/2005

Lösungslogik

Für die Strecke $\overline{FG}$:

Berechnung des Spitzenwinkels ϵ über die Ergänzungswinkel.

Berechnung von s über den $\cos\beta$.

Berechnung von $\overline{FS}$ aus der Differenz von s und $\overline{BF}$.

Berechnung von α über die Ergänzungswinkel.

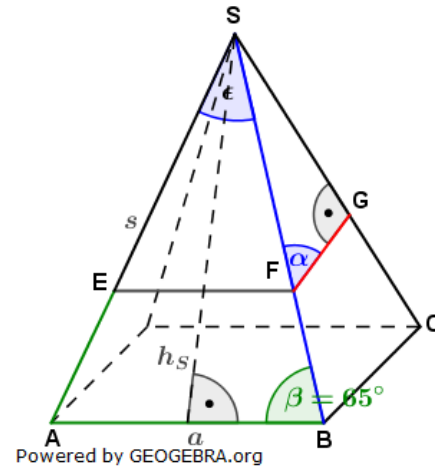
Berechnung von $\overline{FG}$ über den $\cos\alpha$.

Für die Fläche $BCGF$:

Berechnung der Seitenfläche der Pyramide über die trigonometrische Flächenformel.

Berechnung der Fläche des Dreiecks FGS über die trigonometrische Flächenformel.

Berechnung der Fläche $BCGF$ über die Differenz aus Seitenfläche Pyramide und Fläche des Dreiecks FGS .



Klausuraufschrieb

$$\epsilon: \quad \epsilon = 180^\circ - 2 \cdot \beta = 180^\circ - 2 \cdot 65^\circ = 50^\circ$$

$$s: \quad \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{s} \quad | \quad \cdot s; : \cos\beta$$

$$s = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\beta} = \frac{2,8}{\cos 65^\circ} = 6,63$$

$$\overline{FS}: \quad \overline{FS} = s - \overline{BF} = 6,63 - 3,0 = 3,63$$

$$\alpha: \quad \alpha = 180^\circ - \epsilon - 90^\circ = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\overline{FG} \quad \cos\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{FS}} \quad | \quad \cdot \overline{FS}$$

$$\overline{FG} = \overline{FS} \cdot \cos\alpha = 3,63 \cdot \cos 40^\circ = 2,78$$

Die Strecke $\overline{FG}$ ist 2,8 cm lang.

$$A_{ABS}: \quad A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot \sin\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 6,63^2 \cdot \sin 50^\circ \quad | \quad \text{trigonometrischer Flächeninhalt}$$

$$= 16,84$$

$$A_{FGS}: \quad A_{FGS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FG} \cdot \sin 40^\circ \quad | \quad \text{trigonometrischer Flächeninhalt}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3,63 \cdot 2,8 \cdot \sin 40^\circ = 3,27$$

$$A_{BCGF}: \quad A_{BCGF} = A_{ABS} - A_{FGS} = 16,84 - 3,27 = 13,57$$

Die Fläche des Vierecks $BCGF$ beträgt $13,6 \text{ cm}^2$.

Lösung W1b/2005

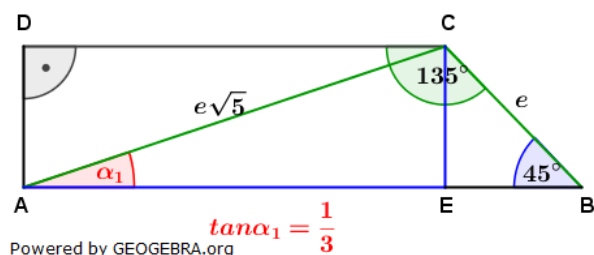
Lösungslogik

Definition $\tan\alpha_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$.

Berechnung von $\overline{CE}$ über den $\sin 45^\circ$.

Berechnung von $\overline{AE}$ über den Satz des Pythagoras.

Einsetzen von $\overline{CE}$ und $\overline{AE}$ in die Definitionsgleichung und Vereinfachen.



$$\tan\alpha_1 = \frac{1}{3}$$

Klausuraufschrieb

$$\tan \alpha_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$$

$$\overline{CE}: \quad \sin 45^\circ = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} \quad | \quad \cdot \overline{CB}$$

$$\overline{CE} = \overline{CB} \cdot \sin 45^\circ = e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{e}{2} \sqrt{2}$$

$$\overline{AE}: \quad \overline{AE} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{(e\sqrt{5})^2 - \left(\frac{e}{2}\sqrt{2}\right)^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{AE} = \sqrt{5e^2 - \frac{e^2}{2}} = \sqrt{\frac{9e^2}{2}} = \frac{3e}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \alpha_1: \quad \tan \alpha_1 = \frac{\frac{e\sqrt{2}}{2}}{\frac{3e}{\sqrt{2}}} = \frac{e\sqrt{2}}{3e} = \frac{1}{3} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Lösung W2a/2005

Lösungslogik

Umstellung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.

Bestimmung der Geradengleichung g_1 durch den Scheitel von p_1 und Punkt $P(6|5)$.

Bestimmung der y -Koordinate von S_2 über die Geradengleichung.

Aufstellen der Parabelgleichung p_2 .

Bestimmung des Schnittpunktes A von p_1 und p_2 .

Aufstellen der Geradengleichung g_2 parallel g_1 und durch Punkt A .

Bestimmung des zweiten Schnittpunktes von g_2 mit p_2 .

Klausuraufschrieb

$$p_1: \quad y = x^2 + 4x + 1$$

Scheitelpunktgleichung von p_1 :

$$y = (x + 2)^2 - 3 \quad | \quad \text{quadratische Ergänzung}$$

$$S_1(-2 | -3)$$

Geradengleichung durch S_1 und P :

$$g_1: \quad y = mx + b$$

$$m: \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-3)}{6 - (-2)} = 1$$

$$y = x + b \quad | \quad \text{Punktprobe mit } P(6|5)$$

$$5 = 1 \cdot 6 + b$$

$$b = -1$$

$$g_1: \quad y = x - 1$$

y_2 -Koordinate von S_2 :

$$y_2: \quad y_2 = 3 - 1 = 2 \quad | \quad \text{Punktprobe auf } g_1 \text{ mit } S_2(|y_2)$$

$$S_2(3|2)$$

Funktionsgleichung von p_2 :

$$p_2: \quad y = (x - 3)^2 + 2 \quad | \quad \text{Scheitelpunktgleichung aufstellen}$$

$$y = x^2 - 6x + 11$$

Schnittpunkt von p_1 mit p_2 :

$p_1 \cap p_2:$		Schnittpunkt durch Gleichsetzung
$x^2 + 4x + 1 = x^2 - 6x + 11$		$-x^2; +6x; -11$
$10x = 10$		$:10$
$x = 1 \rightarrow p_1$		
$y = 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 6$		

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $A(1|6)$.

Geradengleichung g durch $A(1|6)$ mit $m = 1$:

$g_2: y = mx + b$	
$6 = 1 + b$	Punktprobe mit $A(1 6)$
$b = 5$	
$g_2: y = x + 5$	

Schnittpunkt von p_2 mit g :

$p_2 \cap g:$		Schnittpunkt durch Gleichsetzung
$x^2 - 6x + 11 = x + 5$		$-x; -5$
$x^2 - 7x + 6 = 0$		p/q -Formel
$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{12,25 - 6} = 3,5 \pm \sqrt{6,25} = 3,5 \pm 2,5$		
$x_1 = 6; x_2 = 1$		
$x_1 \rightarrow g_2$		
$y_1 = x_1 + 5 = 6 + 5 = 11$		

Der zweite Schnittpunkt von p_2 mit g_2 hat die Koordinaten $B(6|11)$.

Lösung W2b/2005

$$\frac{-2x^2 + 57x - 21}{6(x-4)(x+3)} = \frac{2x+1}{3x-12} - \frac{3x-1}{2x+6}$$

Nenner 1: $2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)$

Nenner 2: $3x-12$ $3(x-4)$

Nenner 3: $2x+6$ $2(x+3)$

Hauptnenner: $2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)$

$2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3) = 0$ für $x_1 = 4$ und $x_2 = -3$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$

$$\frac{(-2x^2 + 57x - 21) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)}{2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)} = \frac{(2x+1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)}{3(x-4)} - \frac{(3x-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-4)(x+3)}{2(x+3)}$$

$$-2x^2 + 57x - 21 = 2 \cdot (2x+1)(x+3) - 3 \cdot (3x-1)(x-4)$$

$$-2x^2 + 57x - 21 = 2(2x^2 + 7x + 3) - 3(3x^2 - 13x + 4)$$

$$-2x^2 + 57x - 21 = 4x^2 + 14x + 6 - 9x^2 + 39x - 12$$

$$-2x^2 + 57x - 21 = -5x^2 + 53x - 6$$

$$3x^2 + 4x - 15 = 0$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + 5} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{45}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{7}{3}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}; x_2 = -3$$

Wegen $x_2 = -3 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ die einzigste Lösung.

ausmultiplizieren

Restklammern

auflösen

Zusammenfassen

$+5x^2; -53x; +6$

$: (3)$

p/q -Formel

Lösung W3a/2005

Lösungslogik

Volumen der Pyramide über $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$.

Berechnung von G :

Wir berechnen die Grundfläche des regelmäßigen Neunecks. Der Mittelpunktswinkel γ ist $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. Daraus ergeben sich die

Basiswinkel der jeweiligen Teildreiecke zu $\alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 70^\circ$.

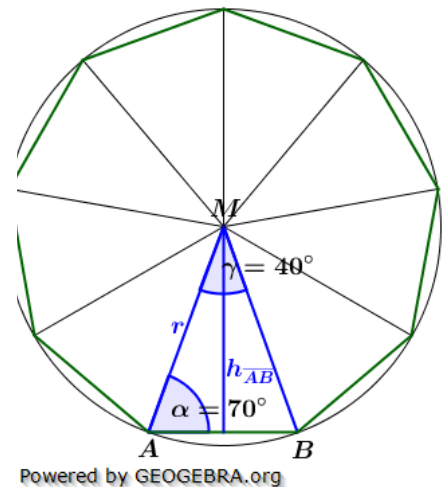
Wir berechnen den Radius r des Umkreises über den Sinussatz.

Wir berechnen die Fläche des Teildreiecks ABM über den trigonometrischen Flächeninhalt, multiplizieren das Ergebnis mit 9 und haben somit die Größe der Grundfläche errechnet.

Berechnung von h_{Pyr} :

Über den gegebenen Mantel M berechnen wir die Fläche eines Seitendreiecks der Pyramide. Mithilfe dieser Fläche und der Grundseite a errechnen wir die Höhe h_a eines Seitendreiecks.

Wir berechnen die Höhe h_{AB} (siehe Grafik) eines Teildreiecks der Grundfläche. Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich nunmehr die Höhe h_{Pyr} der Pyramide ermitteln.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$$

Berechnung von G :

$$\gamma: \quad \gamma = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

$$\alpha: \quad \alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 70^\circ$$

$$r: \quad \frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{r}{\sin 70^\circ} \quad | \quad \text{Sinussatz}$$

$$r = \frac{a \cdot \sin 70^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{6,4 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 40^\circ} = 9,36$$

$$A_{ABM}: \quad A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \gamma \quad | \quad \text{trigonometrischer Flächeninhalt}$$

$$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 9,36^2 \cdot \sin 40^\circ = 28,16$$

$$G: \quad G = 9 \cdot A_{ABM} = 9 \cdot 28,16 = 253,40$$

Berechnung von h_{Pyr} :

$$A_{Seite}: \quad A_{Seite} = \frac{M}{9} = \frac{300}{9} = 33,3333$$

$$h_a: \quad A_{Seite} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$h_a = \frac{2 \cdot A_{Seite}}{a} = \frac{2 \cdot 33,3333}{6,4} = 10,42$$

$$h_{AB}: \quad h_{AB} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9,36^2 - 3,2^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_{AB} = \sqrt{77,37} = 8,80$$

$$h_{pyr}: h_{pyr} = \sqrt{h_a^2 - h_{AB}^2} = \sqrt{10,42^2 - 8,80^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_{pyr} = \sqrt{31,14} = 5,6$$

$$V_{pyr}: V_{pyr} = \frac{1}{3} \cdot 253,4 \cdot 5,6 = 473,01$$

Das Volumen der Pyramide beträgt 473 cm^3 .

Lösung W3b/2005

Lösungslogik

Wegen der Abwicklung der beiden Pyramiden aus ein und demselben Kreis sind deren Seitenlängen gleich. Die Länge der Seitenkante entspricht dem Radius des Abwicklungskreises.

Zum anderen entspricht die Länge des Kreisbogens über K_1 dem Umfang des Grundkreises von Kegel 1, die Länge des Kreisbogens über K_2 entspricht dem Umfang des Grundkreises von Kegel 2.

Der Umfang des Abwicklungskreises errechnet sich aus der Umfangsformel für einen Kreis mit $u = 2\pi \cdot r$, wobei hier r gleich der Länge der Seitenkanten beider Kegel ist.

Berechnung von r_1 aus der Volumenformel.

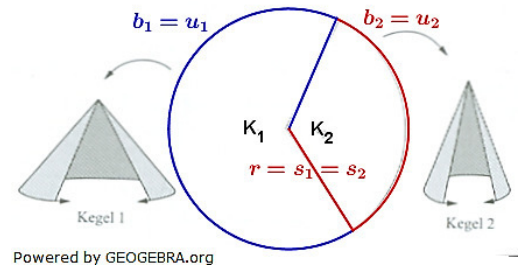
Berechnung von s_1 über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Umfangs des Grundkreises von Pyramide 1.

Berechnen des Umfangs des Abwicklungskreises mit $r = s_1$.

Differenzbildung aus Umfang des Abwicklungskreises und Umfang des Grundkreises von Kegel 1 ergibt Umfang des Grundkreises von Kegel 2.

Berechnung von r_2 über die Umfangsformel des Grundkreises von Kegel 2.



Klausuraufschrieb

$$\begin{aligned} r_1: V_1 &= \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 & | & \cdot 3; : \pi \cdot h_1 \\ r_1^2 &= \frac{3 \cdot V_1}{\pi \cdot h_1} = \frac{3 \cdot 12 \pi e^3}{\pi \cdot 4e} = 9e^2 & | & \sqrt{} \\ r_1 &= 3e \end{aligned}$$

$$s_1: s_1 = \sqrt{r_1^2 + h_1^2} = \sqrt{(3e)^2 + (4e)^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s_1 = \sqrt{9e^2 + 16e^2} = \sqrt{25e^2} = 5e$$

$$u_1: u_1 = 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot 3e = 6\pi e$$

$$u_{Abw}: u_{Abw} = 2\pi \cdot s_1 = 2\pi \cdot 5e = 10\pi e$$

$$u_2: u_2 = u_{Abw} - u_1 = 10\pi e - 6\pi e = 4\pi e$$

$$\begin{aligned} r_2: u_2 &= 2\pi \cdot r_2 & | & : 2\pi \\ r_2 &= \frac{u_2}{2\pi} = \frac{4\pi e}{2\pi} = 2e & \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Lösung W4b/2005

Lösungslogik (einfach)

Das Viereck $ADEF$ ist ein Trapez mit den beiden parallelen Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{FE}$ und der Höhe h .

Berechnung von $\overline{AC}$ über $\sin \alpha$.

Berechnung von $\overline{FC}$ aus Differenz von $\overline{AC}$ und $\overline{AF}$.

Berechnung von h über $\sin \alpha$.

Berechnung von $\overline{AD}$ über den zweiten Strahlensatz.

Klausuraufschrieb

$$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AD} + \overline{FE}) \cdot h$$

$$\overline{AC}: \quad \sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}; : \sin \alpha$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} = \frac{14}{\sin 44^\circ} = 20,15$$

$$\overline{FC}: \quad \overline{FC} = \overline{AC} - \overline{AF} = 20,15 - 7,1 = 13,05$$

$$h: \quad \sin \alpha = \frac{h}{\overline{AF}} \quad | \quad \cdot \overline{AF}$$

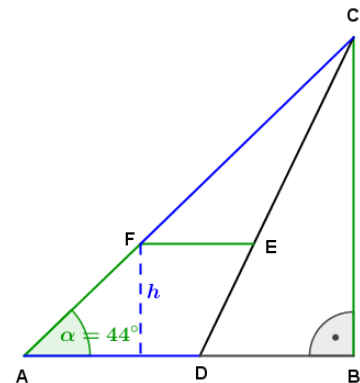
$$h = \overline{AF} \cdot \sin \alpha = 7,1 \cdot \sin 44^\circ = 4,93$$

$$\overline{AD}: \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC} \quad (2. \text{ Strahlensatz})$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FC}} \cdot \overline{AC} = \frac{5,0}{13,05} \cdot 20,15 = 7,72$$

$$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (7,72 + 5,0) \cdot 4,93 = 31,35$$

Das Viereck $ADEF$ hat eine Fläche von $31,4 \text{ cm}^2$.



Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{AC}$, $\overline{FC}$ und h wie in Lösungslogik (einfach), dann:

Berechnung von $\overline{AB}$ über $\tan \alpha$.

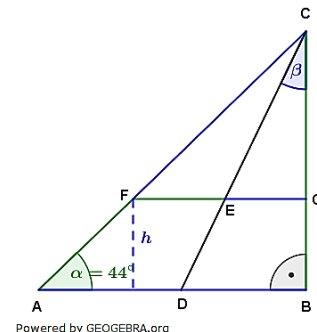
Berechnung von $\overline{FG}$ über $\tan \alpha$.

Berechnung von $\overline{EG}$ aus Differenz von $\overline{FG}$ und $\overline{FE}$.

Berechnung Winkel β über $\tan$.

Berechnung von $\overline{DB}$ über $\tan \beta$.

Berechnung von $\overline{AD}$ aus Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{DB}$.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$\overline{AC}$, $\overline{FC}$ und h siehe Lösung (einfach).

$$\overline{AB}: \quad \tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB}; : \tan \alpha$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\tan \alpha} = \frac{14}{\tan 44^\circ} = 14,4974$$

$$\overline{FG}: \quad \tan \alpha = \frac{\overline{GC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BC} - h}{\overline{FG}} \quad | \quad \cdot \overline{FG}; : \tan \alpha$$

$$\overline{FG} = \frac{\overline{BC} - h}{\tan \alpha} = \frac{14 - 4,93}{\tan 44^\circ} = 9,3923$$

$$\overline{EG}: \quad \overline{EG} = \overline{FG} - \overline{FE} = 9,3923 - 5,0 = 4,3923$$

$$\beta: \quad \tan \beta = \frac{\overline{EG}}{\overline{BC} - h} = \frac{4,3923}{14 - 4,93} = 0,4843$$

$$\beta = \tan^{-1} 0,4843 = 25,84^\circ$$

$$\overline{DB}: \quad \tan \beta = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{DB} = \overline{BC} \cdot \tan \beta = 14 \cdot \tan 25,84^\circ = 6,78$$

$$\overline{AD}: \quad \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = 14,4974 - 6,78 = 7,72$$

$$A_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot (7,72 + 5,0) \cdot 4,93 = 31,35$$

Das Viereck ADEF hat eine Fläche von $31,4 \text{ cm}^2$.