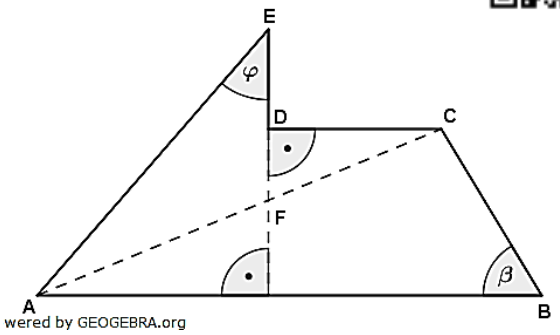
Aufgabe W1a/2006

In der Figur $ABCDE$ sind gegeben:

$\overline{AB} = 12{,}2\ cm$
$\overline{AE} = 8{,}5\ cm$
$\overline{BC} = 4{,}7\ cm$
$\beta = 59{,}0°$.
$\varphi = 41{,}0°$

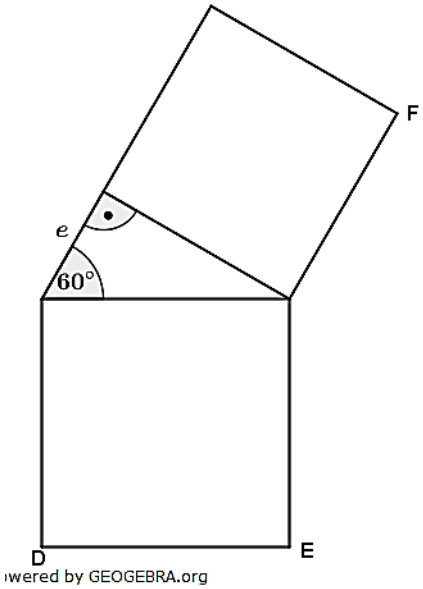
Berechnen Sie die Länge $\overline{DF}$.

Lösung: $\overline{DF} = 1{,}7\ cm$



Aufgabe W1b/2006

Nebenstehende Figur zeigt ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten- und Hypothenusenquadrat.
Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte:
Der Abstand des Punktes F von der Geraden DE beträgt $\frac{7}{2}e$



Aufgabe W2a/2006

Eine nach oben geöffnete Normalparabel p und eine Gerade g_1 schneiden sich in den Punkten $A(2|5)$ und $B(6|-3)$.
Berechnen Sie die Gleichungen von Parabel und Gerade.
Die Gerade g_2 ist parallel zur Geraden g_1 und geht durch den Scheitelpunkt der Parabel. Die Koordinatenachsen bilden mit g_2 ein Dreieck.
Berechnen Sie den Umfang und die Innenwinkel dieses Dreiecks.

Lösung: $p\colon\ y = x^2 - 10x + 21;\ \ g_1\colon\ y = -2x + 9$

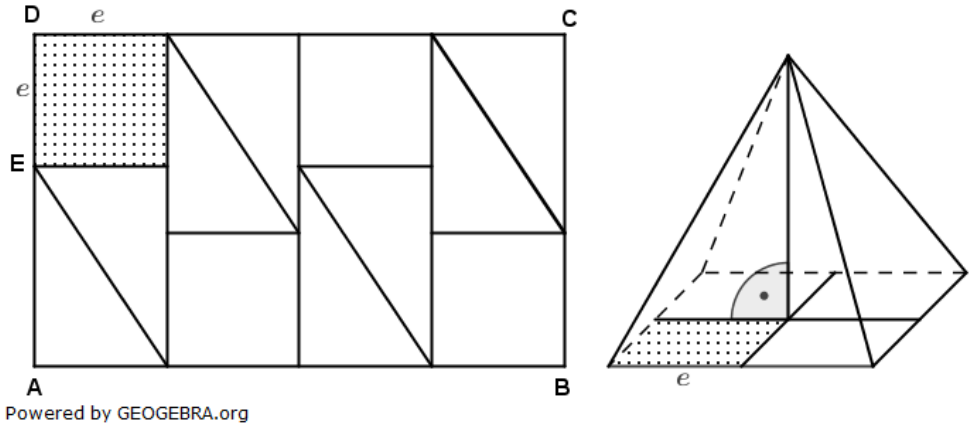
Aufgabe W2b/2006

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung:

$\frac{4(2x^2-4x-1)}{3x^2-12} = \frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-6}$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\};\quad \mathbb{L} = \{-\frac{2}{7}\}$

Aufgabe W4a/2006

Mit den Einzelteilen des Rechtecks $ABCD$ wird die Oberfläche der quadratischen Pyramide vollständig beklebt.



Es gilt:

$A_{ABCD} = 96\ cm^2$ (Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$)

$\overline{DE} = e = 3{,}0\ cm$

Berechnen Sie die Länge $\overline{AE}$, das Volumen der quadratischen Pyramide und den Neigungswinkel einer Seitenkante zur Grundfläche.

Lösung: $\overline{AE} = 5\ cm$; $V = 48\ cm^3$ $\alpha = 43{,}3°$

Aufgabe W4b/2006

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $34{,}5\ cm^2$.

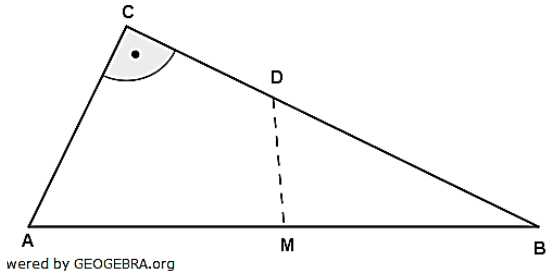
Weiterhin gilt:

$\overline{AC} = 5{,}8\ cm$

$\overline{AM} = \overline{MB}$

Das Dreieck MBD nimmt ein Drittel der Fläche des Dreiecks ABC ein.

Berechnen Sie die Länge $\overline{BD}$.



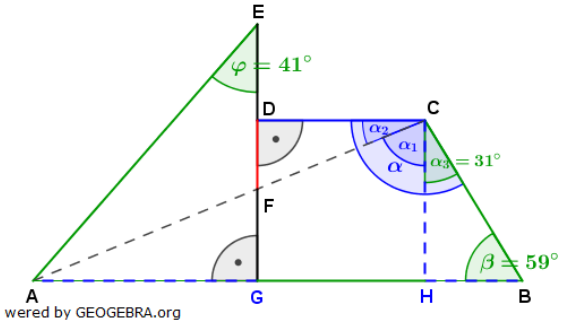
Lösung: $\overline{BD} = 7{,}9\ cm$

Tipp: Trigonometrischen Flächeninhalt für die Strecke $\overline{BD}$ über die Fläche des Dreiecks MBD.

Lösung W1a/2006

Lösungslogik

Berechnung von α über die Winkelsumme im Viereck.
Berechnung von $\overline{AG}$ über $sin\varphi$.
Berechnung von $\overline{HB}$ über $sin\alpha_3$.
Berechnung von $\overline{DC}$.
Berechnung von $\overline{HC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von α_1 über den tan.
Berechnung von α_2.
Berechnung von $\overline{DF}$ über den $tan\alpha_2$



Klausuraufschrieb

α: $\alpha = 360° - 90° - 90° - 59° = 121°$

$\overline{AG}$: $sin\varphi = \frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}$ | $\cdot \overline{AE}$

$\overline{AG} = \overline{AE} \cdot sin\varphi = 8{,}5 \cdot sin41° = 5{,}58$

$\overline{HB}$: $sin\alpha_3 = \frac{\overline{HB}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$

$\overline{HB} = \overline{BC} \cdot sin\alpha_3 = 4{,}7 \cdot sin31° = 2{,}42$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{AB} - \overline{AG} - \overline{HB} = 12{,}2 - 5{,}58 - 2{,}42 = 4{,}2$

$\overline{HC}$: $\overline{HC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{4{,}7^2 - 2{,}42^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{HC} = \sqrt{16{,}2336} = 4{,}03$

α_1: $tan\alpha_1 = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AB} - \overline{HB}}{4{,}03} = \frac{12{,}2 - 2{,}42}{4{,}03} = 2{,}4268$

$\alpha_1 = tan^{-1}(2{,}4268) = 67{,}61°$

α_2: $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 - \alpha_3 = 121° - 67{,}61° - 31° = 22{,}39°$

$\overline{DF}$: $tan\alpha_3 = \frac{\overline{DF}}{\overline{DC}}$ | $\cdot \overline{DC}$

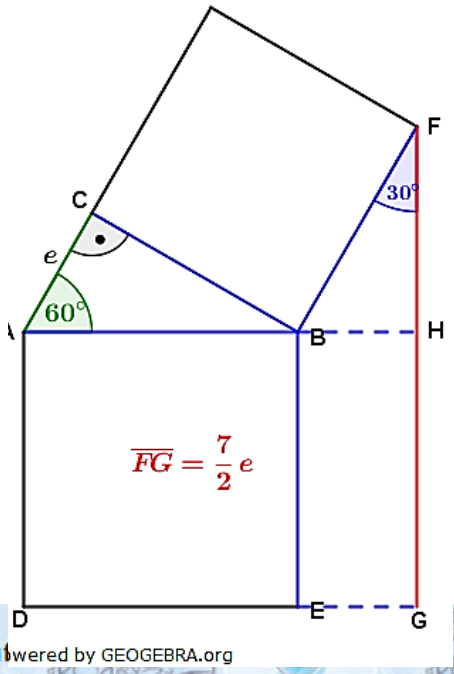
$\overline{DF} = \overline{DC} \cdot tan\alpha_3 = 4{,}2 \cdot tan22{,}39° = 1{,}73$

Die Strecke $\overline{DF}$ ist $1{,}7\ cm$ lang.

Lösung W1b/2006

Lösungslogik

Definition $\overline{FG} = \overline{GH} + \overline{FH}$.
Berechnung von $\overline{AB} = \overline{GH}$ über den $cos60°$.
Berechnung von $\overline{CB} = \overline{BF}$ über den $sin60°$.
Berechnung von $\overline{FH}$ über den $cos30°$.
Einsetzen von $\overline{GH}$ und $\overline{FH}$ in die Definitionsgleichung und vereinfachen.



Klausuraufschrieb

$\overline{FG} = \overline{GH} + \overline{FH}$

$\overline{GH}$: $\quad cos60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{GH}} \quad | \quad \cdot \overline{GH};\ : cos60°$

$\overline{GH} = \frac{\overline{AC}}{cos60°} = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$

$\overline{BF}$: $\quad sin60° = \frac{\overline{BF}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$

$\overline{BF} = \overline{AC} \cdot sin60° = e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{e}{2}\sqrt{3}$

$\overline{FH}$: $\quad cos30° = \frac{\overline{FH}}{\overline{BF}} \quad | \quad \cdot \overline{BF}$

$\overline{FH} = \overline{BF} \cdot cos30° = \frac{e}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}e$

$\overline{FG}$: $\quad \overline{FG} = 2e + \frac{3}{2}e = \frac{7}{2}e$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2006

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung und Scheitelpunktgleichung p durch die beiden Punkte A und B.
Aufstellung der Geradengleichung g_1 durch die beiden Punkte A und$B$.
Aufstellen der Geradengleichung g_2 parallel g_1 und durch den Scheitelpunkt S von p.
Zeichnen der Situation in ein Koordinatensystem.
Bestimmung der Seitenlängen des Dreiecks, Berechnung von u, α und β.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p durch A und B:

p: $\quad y = x^2 + bx + c$

(1) $\quad 5 = 4 + 2b + c \quad |$ Punktprobe mit $A(2|5)$

(2) $\quad -3 = 36 + 6b + c \quad |$ Punktprobe mit $B(6|-3)$

(1)-(2) $\quad 8 = -32 - 4b \quad | \quad +4b;\ -8$

$4b = -40 \quad | \quad :4$

$b = -10$

$b \longrightarrow (1)$

$5 = 4 - 20 + c \quad | \quad +16$

$c = 21$

p: $\quad y = x^2 - 10x + 21$

Scheitelpunktgleichung von p:

$y = (x-5)^2 - 4 \quad |$ quadratische Ergänzung

$S(5|-4)$

Geradengleichung g_1 durch A und B:

g_1: $\quad y = mx + b$

m: $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-5}{6-2} = -2$

$y = -2x + b \quad |$ Punktprobe mit $A(2|5)$

$5 = -2 \cdot 2 + b$

$b = 9$

g_1: $\quad y = -2x + 9$

Parallele Gerade g_2 durch $S(5|-4)$:

g_2: $y = -2x + b$ | parallel heißt gleiche Steigung $m = -2$

$-4 = -2 \cdot 5 + b$ | Punktprobe mit $S(5|-4)$

$b = 6$

g_2: $y = -2x + 6$

Schnittpunkt von g_2 mit der x–Achse:

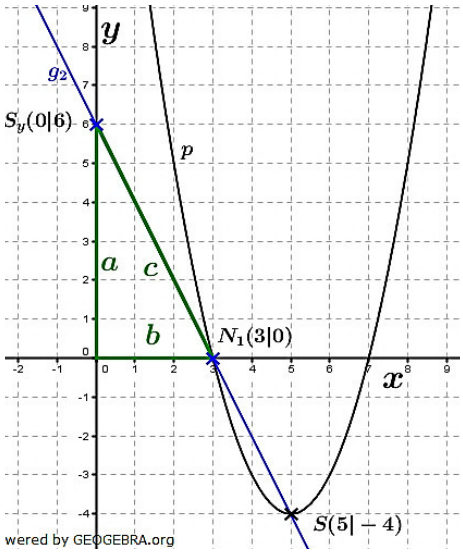
$0 = -2x + 6$

$x_0 = 3$

Schnittpunkt von g_2 mit der y–Achse:

$y = -2 \cdot 0 + 6$

$S_y(0|6)$



Umfang des Dreiecks $0N_1S_y$:

$u_{0N_1S_y} = a + b + c$

$a = 6;\ \ b = 3$

c: $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 9$

$c = \sqrt{45} \approx 6{,}7$

$u_{0N_1S_y} = 6 + 3 + 6{,}7$

$u_{0N_1S_y} = 15{,}7$

Der Umfang des Dreiecks beträgt $15{,}7\ LE$.

Innenwinkel des Dreiecks $0N_1S_y$:

$\sphericalangle 0N_1S_y = \alpha$

$tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{6}{3} = 2$

$\alpha = tan^{-1}(2) \approx 63{,}4°$

$\sphericalangle N_1S_y0 = \beta$

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 63{,}4° = 26{,}6°$

Die Innenwinkel des Dreiecks sind $\alpha = 63{,}4°;\ \ \beta = 26{,}6°$ und $\gamma = 90°$.

Lösung W2b/2006

$$\frac{4(2x^2 - 4x - 1)}{3x^2 - 12} = \frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-6}$$

Nenner 1:	$3x^2 - 12$	$3 \cdot (x+2)(x-2)$
Nenner 2:		$(x+2)$
Nenner 3:	$3x - 6$	$3(x-2)$
Hauptnenner:		$3 \cdot (x+2)(x-2)$

$3 \cdot (x+2)(x-2) = 0$ für $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$

$$\frac{4(2x^2-4x-1)\cdot\cancel{3\cdot(x+2)(x-2)}}{\cancel{3\cdot(x+2)(x-2)}} = \frac{(x+1)\cdot 3\cdot\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} - \frac{(2x-3)\cdot\cancel{3\cdot(x+2)(x-2)}}{\cancel{3(x-2)}}$$

$4(2x^2 - 4x - 1) = 3 \cdot (x+1)(x-2) - (2x-3)(x+2)$ | Klammern auflösen

$8x^2 - 16x - 4 = 3(x^2 - x - 2) - (2x^2 + x - 6)$ | Restklammern auflösen

$8x^2 - 16x - 4 = 3x^2 - 3x - 6 - 2x^2 - x + 6$ | Zusammenfassen

$8x^2 - 16x - 4 = x^2 - 4x$ | $-x^2;\ +4x;$

$7x^2 - 12x - 4 = 0$ | $:7$

$x^2 - \frac{12}{7}x - \frac{4}{7} = 0$ | p/q-Formel

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

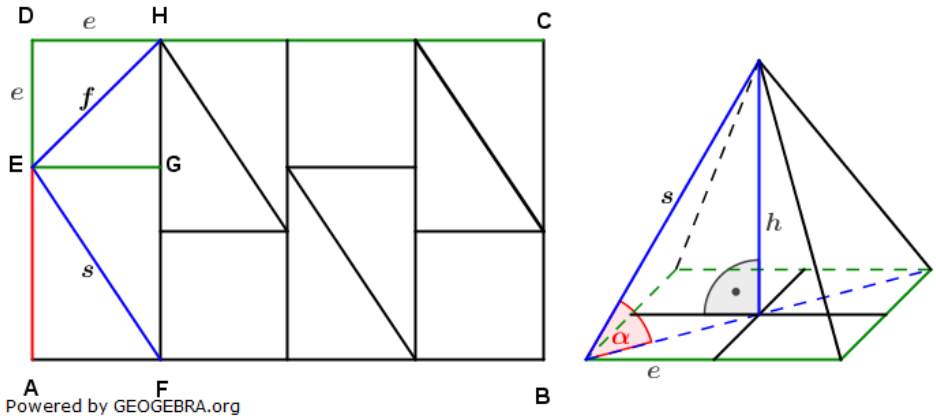
$x_{1,2} = \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{4}{7}} = \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{28}{49}} = \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{6}{7} \pm \frac{8}{7}$

$x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{2}{7}$

Wegen $x_1 = 2 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \left\{-\frac{2}{7}\right\}$ die einzigste Lösung.

Lösung W4a/2006

Lösungslogik



Für die Strecke $\overline{AE}$:

Berechnung der Strecke $\overline{AE}$ über die Flächenformel für das Rechteck $ABCD$.

Für das Volumen der Pyramide:

Berechnung von $s = \overline{EF}$ über den Satz des Pythagoras.

Berechnung der Diagonalen f des Quadrats $EGHD$.

Berechnung von h der Pyramide über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Volumens der Pyramide über die Volumenformel.

Für den Neigungswinkel α:

Berechnung von α über den sin.

Klausuraufschrieb

$\overline{AE}$: $\quad A_{ABCD} = 4e \cdot (\overline{AE} + e) \quad | \quad : 4e;\ -e$

$\overline{AE} = \frac{A_{ABCD}}{4e} - e = \frac{96}{4 \cdot 3} - 3 = 5$

Die Strecke $\overline{AE}$ ist $5\ cm$ lang.

s: $\quad s^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \quad |$ Satz des Pythagoras

$s = 5{,}83$

f: $\quad f^2 = 2e^2 = 18 \quad |$ Satz des Pythagoras

$f = 4{,}24$

h: $\quad h^2 = s^2 - f^2 = 34 - 18 = 16 \quad |$ Satz des Pythagoras

$h = 4$

V: $\quad V = \frac{1}{3} \cdot (2e)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48$

Das Volumen der Pyramide beträgt $48\ cm^3$.

α: $\quad sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{4}{5{,}83} = 0{,}6861$

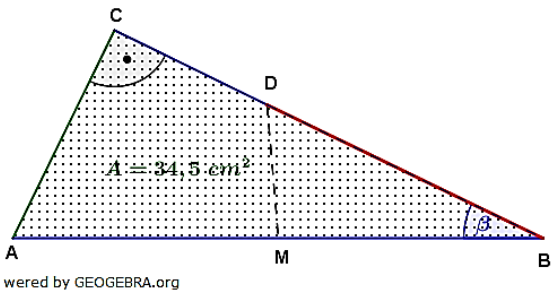
$\alpha = sin^{-1}(0{,}6861) = 43{,}32°$

Der Neigungswinkel α hat $43{,}3°$.

Lösung W4b/2006

Lösungslogik (einfach)

Berechnung von $\overline{CB}$ über die Flächenformel des Dreiecks ABC.
Berechnung von $\overline{AB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{MB} = 0{,}5 \cdot \overline{AB}$.
Berechnung von β über den sin.
Berechnung der Fläche des Dreiecks $MBD = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC}$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den Sinussatz.



Klausuraufschrieb

A_{MBD}: $A_{MBD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 34{,}5 = 11{,}5\ cm^2$

$\overline{CB}$: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CB}$ | $\cdot 2;\ : \overline{AC}$

$\overline{CB} = \frac{2 \cdot A_{ABC}}{\overline{AC}} = \frac{2 \cdot 34{,}5}{5{,}8} = 11{,}9$

$\overline{AB}$: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{5{,}8^2 - 11{,}9^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AB} = \sqrt{175{,}25} = 13{,}24$

$\overline{MB}$ $\overline{MB} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} = 0{,}5 \cdot 13{,}24 = 6{,}62$

β: $sin\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5{,}8}{13{,}24} = 0{,}4381$

$\beta = sin^{-1}(0{,}4381) = 26{,}0°$

$\overline{BD}$: $A_{MBD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{BD} \cdot sin\beta$ | trigonometrischer Flächeninhalt

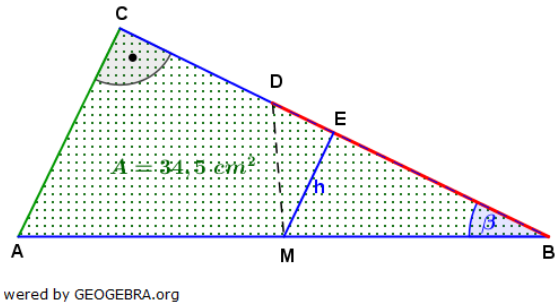
$11{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}62 \cdot \overline{BD} \cdot sin26°$ | $\cdot 2;\ : (6{,}62 \cdot sin26°)$

$\overline{BD} = \frac{2 \cdot 11{,}5}{6{,}62 \cdot sin26°} = 7{,}923$

Die Länge der Strecke $\overline{BD}$ beträgt $7{,}9\ cm$.

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{MB}$, β und A_{MBD} wie in Lösungslogik (einfach).
Berechnung von h über $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über die Flächenformel des Dreiecks $A_{MBD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{BD}$.



Klausuraufschrieb

$\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{MB}$, β und A_{MBD} wie in Lösung (einfach).

h: $\quad sin\beta = \frac{h}{\overline{MB}} \quad | \quad \cdot \overline{MB}$

$h = \overline{MB} \cdot sin\beta = 6{,}62 \cdot sin26{,}0° = 2{,}9020$

$\overline{BD}$: $\quad A_{MBD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{BD}$

$11{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}902 \cdot \overline{BD} \quad | \quad \cdot 2;\ : 2{,}902$

$\overline{BD} = \frac{2 \cdot 11{,}5}{2{,}902} = 7{,}9256$

Die Länge der Strecke $\overline{BD}$ beträgt $7{,}9\ cm$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de