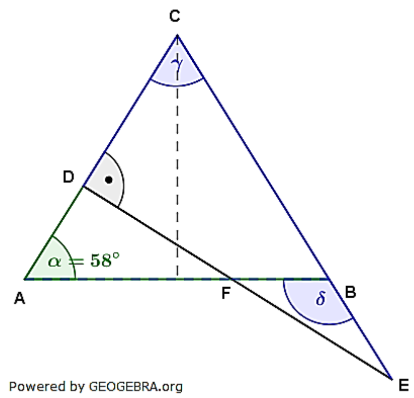
Lösung W1a/2007

Lösungslogik



Berechnung von δ über die Ergänzungswinkel (Das Dreieck ABC ist gleichschenklig).
Berechnung von δ.
Berechnung von $\overline{AC} = \overline{BC}$ über $cos\alpha$.
Berechnung von $\overline{AF}$ über $cos\alpha$.
Berechnung von $\overline{FB}$ als Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{AF}$.
Berechnung von $\overline{DC}$ als Differenz von $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$.
Berechnung von $\overline{CE}$ über $cos\gamma$.
Berechnung von $\overline{EB}$ als Differenz von $\overline{CE}$ und $\overline{CB}$.
Berechnung A_{BFE} mit dem trigonometrischen Flächeninhalt.

Klausuraufschrieb

$A_{BFE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{BE} \cdot sin\delta$ | trigonometrischer Flächeninhalt

γ: $\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 116° = 64°$

δ: $\delta = 180° - \alpha = 180° - 58° = 122°$

$\overline{BE}$: $sin\alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$ | $\cdot \overline{AB}$

$\overline{BE} = \overline{AB} \cdot sin\alpha = 18 \cdot sin36° = 10{,}58$

β: $\beta = 90° - \alpha = 54°$

$\overline{AC}$: $cos\alpha = \frac{0{,}5 \cdot \overline{AB}}{\overline{AC}}$ | $\cdot \overline{AC};\ : cos\alpha$

$\overline{AC} = \frac{0{,}5 \cdot \overline{AB}}{cos\alpha} = \frac{0{,}5 \cdot 10}{cos58°} = 9{,}44$

$\overline{AF}$: $cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}$ | $\cdot \overline{AF};\ : cos\alpha$

$\overline{AF} = \frac{\overline{AD}}{cos\alpha} = \frac{3{,}6}{cos58°} = 6{,}79$

$\overline{FB}$: $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = 10 - 6{,}79 = 3{,}21$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = 9{,}44 - 3{,}6 = 5{,}84$

$\overline{CE}$: $cos\gamma = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$ | $\cdot \overline{CE};\ : cos\gamma$

$\overline{CE} = \frac{\overline{DC}}{cos\gamma} = \frac{5{,}84}{cos64°} = 13{,}32$

$\overline{EB}$: $\overline{EB} = \overline{CE} - \overline{AC} = 13{,}32 - 9{,}44 = 3{,}88$

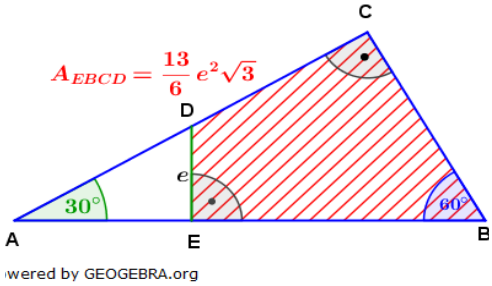
A_{BFE}: $A_{BFE} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}21 \cdot 3{,}88 \cdot sin122° = 5{,}28$

Das Dreieck BFE hat eine Fläche von $5{,}3\ cm^2$.

Lösung W1b/2007

Lösungslogik

Die Fläche des Vierecks A_{EBCD} errechnet sich aus der Fläche des Dreiecks A_{ABC} abzüglich der Fläche des Dreiecks A_{AED}.
Berechnung von $\overline{AD}$ über den $sin30°$.
Bestimmung von $\overline{AC}$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den $tan30°$.
Berechnung von $\overline{AE}$ über den $tan30°$.
Berechnung von A_{ABC} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von A_{AED} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von A_{EBCD} und vereinfachen.



Klausuraufschrieb

$A_{EBCD} = A_{ABC} - A_{AED}$

$\overline{AD}$: $\quad sin30° = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} \quad | \cdot \overline{AD};\ : sin30°$

$\quad \overline{AD} = \frac{\overline{ED}}{sin30°} = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$

$\overline{AC}$: $\quad \overline{AC} = 2 \cdot \overline{AD} = 4e$

$\overline{BC}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad | \cdot \overline{AC}$

$\quad \overline{BC} = \overline{AC} \cdot tan30° = 4e \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{3}e\sqrt{3}$

$\overline{AE}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} \quad | \cdot \overline{AE};\ : tan30°$

$\quad \overline{AE} = \frac{\overline{ED}}{tan30°} = \frac{e}{\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3e}{\sqrt{3}}$

A_{ABC}: $\quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 4e \cdot \frac{4}{3}e\sqrt{3} = \frac{16}{6}e^2\sqrt{3}$

A_{AED}: $\quad A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{ED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3e}{\sqrt{3}} \cdot e = \frac{3e^2}{2\sqrt{3}} \quad | \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (Nenner rational machen)

$\quad A_{AED} = \frac{3e^2 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3e^2\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}e^2\sqrt{3}$

A_{EBCD}: $\quad A_{EBCD} = \frac{16}{6}e^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}e^2\sqrt{3} = \frac{16e^2\sqrt{3} - 3e^2\sqrt{3}}{6} = \frac{13}{6}e^2\sqrt{3}$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2007

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichungen p_1 und p_2 über die abgelesenen Scheitelpunkte.
Berechnung des Schnittpunktes von p_1 mit p_2 durch Gleichsetzung.
Aufstellung der Geradengleichung g durch den Schnittpunkt von p_1 mit p_2 und dem Scheitelpunkt von p_1.
Aufstellen der Geradengleichung h parallel g und durch den Scheitelpunkt S_2 von p_2.
Zeichnen der Situation in ein Koordinatensystem.
Bestimmung der Seitenlängen des Dreiecks, Berechnung von A.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichungen p_1 und p_2 über abgelesene Scheitelpunkte:

p_1: $y = (x+4)^2 + 3$ | $S_1(-4|3)$
$y = x^2 + 8x + 19$

p_2: $y = (x-3)^2 - 4$ | $S_2(3|-4)$
$y = x^2 - 6x + 5$

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung
$x^2 + 8x + 19 = x^2 - 6x + 5$ | $-x^2;\ +6x;\ -5$
$14x = -14$ | $:14$
$x = -1$

$-1 \longrightarrow p_1$
$y = (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 19 = 12$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $P(-1|12)$.

Geradengleichung g durch P und S_1:

g: $y = mx + b$
m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-12}{-4-(-1)} = 3$
$y = 3x + b$ | Punktprobe mit $P(-1|12)$
$12 = 3 \cdot (-1) + b$
$b = 15$
g: $y = 3x + 15$

Geradengleichung h parallel g durch S_2:

h: $y = 3x + b$ | parallel heißt gleiche Steigung.
$-4 = 3 \cdot 3 + b$ | Punktprobe mit $S_2(-4|3)$
$b = -13$
h: $y = 3x - 13$

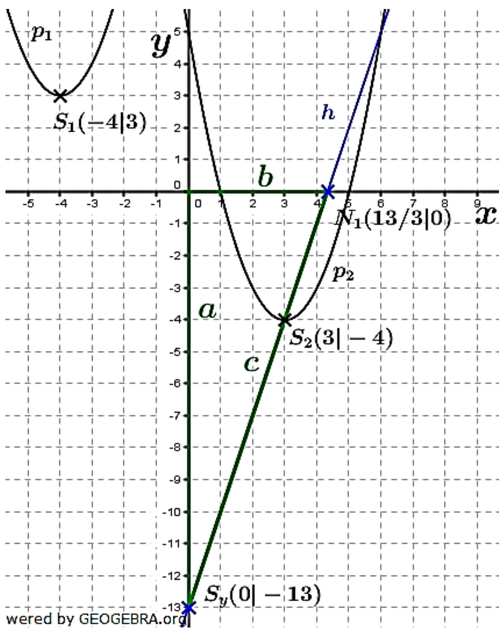
Schnittpunkte von h mit den Koordinatenachsen:

$0 = 3x - 13$ | Schnittpunkt mit x-Achse
$x_0 = \frac{13}{3}$
$y = 3 \cdot 0 - 13$ | Schnittpunkt mit y-Achse
$S_y = (0|-13)$

Fläche des Dreiecks $A_{0N_1S_y}$:

$$A_{0N_1S_y} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$
$$a = 13;\ \ b = \frac{13}{3}$$
$$A_{0N_1S_y} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{13}{3} = \frac{169}{6} \approx 28{,}2$$

Die Fläche des Dreiecks beträgt $28{,}2\ FE$.



Lösung W2b/2007

$$\frac{24x^2-5x-26}{(6x+4)(3x-2)}=\frac{4x-5}{3x-2}-\frac{2x+3}{2(3x+2)}$$

Nenner 1:	$(6x+4)(3x-2)$	$2\cdot(3x+2)(3x-2)$
Nenner 2:		$3x-2$
Nenner 3:		$2(3x+2)$
Hauptnenner:		$2\cdot(3x+2)(3x-2)$

$2\cdot(3x+2)(3x-2)\ =0$ für $x_1=\frac{2}{3}$ und $x_2=-\frac{2}{3}$.

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$

$$\frac{(24x^2-5x-26)\cancel{\cdot 2\cdot(3x+2)(3x-2)}}{\cancel{2\cdot(3x+2)(3x-2)}}=\frac{(4x-5)\cdot 2\cdot(3x+2)\cancel{(3x-2)}}{\cancel{3x-2}}-\frac{(2x+3)\cancel{\cdot 2\cdot(3x+2)}(3x-2)}{\cancel{2(3x+2)}}$$

$24x^2-5x-26=2\cdot(4x-5)(3x+2)-(2x+3)(3x-2)$ | Klammern auflösen

$24x^2-5x-26=2\cdot(12x^2-7x-10)-(6x^2+5x-6)$ | Restklammern auflösen

$24x^2-5x-26=24x^2-14x-20-6x^2-5x+6$ | Zusammenfassen

$24x^2-5x-26=18x^2-19x-14$ | $-18x^2;\ +19x;\ +14$

$6x^2+14x-12=0$ | $:6$

$x^2+\frac{7}{3}x-2=0$ | p/q-Formel

$$x_{1,2}=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{49}{36}+2}=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{49}{36}+\frac{72}{36}}=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{121}{36}}=-\frac{7}{6}\pm\frac{11}{6}$$

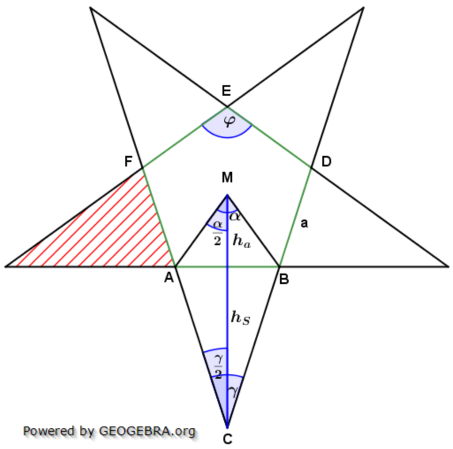
$x_1=\frac{2}{3};\quad x_2=-3$

Wegen $x_1=\frac{2}{3}\notin\mathbb{D}$ ist $\mathbb{L}=\{-3\}$ die einzigste Lösung.

Lösung W3a/2007

Lösungslogik

Der Mantel der regelmäßigen, fünfseitigen Pyramide entspricht fünfmal der Fläche des Dreiecks ABC. Für die Dreiecksfläche benötigen wir die Länge von h_S. Für h_S wiederum benötigen wir den Winkel $\frac{\gamma}{2}$.



Im Drachenviereck $CDEF$ sind die Winkel CFE, FED und EDC gleich groß und entsprechen dem Winkel φ. γ errechnet sich somit aus der Winkelsumme im Viereck von $360°$ abzüglich dreimal dem Winkel φ.

Die Fläche des Dreiecks ABC kann jetzt ermittelt werden und damit auch der Mantel M der Pyramide.

Für das Volumen der Pyramide wird die Grundfläche des Fünfecks sowie die Höhe h benötigt. Hierzu muss h_a ermittelt werden über den $tan\frac{\alpha}{2}$. α errechnet sich aus dem Spitzenwinkel des Dreiecks ABM.

Die Fläche des Dreiecks ABM errechnet sich nun über die Flächenformel des Dreiecks aus $\frac{a}{2}$ und h_a. Die Grundfläche ist fünfmal die Fläche des Dreiecks ABM. Die Höhe h der Pyramide errechnet sich aus dem Satz des Pythagoras. Danach kann das Volumen der Pyramide berechnet werden.

<u>Klausuraufschrieb</u>

φ: $\quad \varphi = \frac{5 \cdot 180° - 360°}{5} = 108°$

γ: $\quad \gamma = 360° - 3 \cdot \varphi = 360° - 3 \cdot 108° = 36 \quad | \quad \cdot 2;\ : a$

$\frac{\gamma}{2}$: $\quad \frac{\gamma}{2} = 18°$

h_S: $\quad tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_S} \quad | \quad \cdot h_S;\ : tan\frac{\gamma}{2}$

$$h_S = \frac{\frac{a}{2}}{tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1{,}8}{tan18°} = 5{,}54$$

A_{ABC}: $\quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 3{,}6 \cdot 5{,}54 = 9{,}97$

M: $\quad M = 5 \cdot A_{ABC} = 5 \cdot 9{,}97 = 49{,}86$

α: $\quad \alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ hieraus $\frac{\alpha}{2} = 36°$.

h_a: $\quad tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} \quad | \quad \cdot h_a;\ : tan\frac{\alpha}{2}$

$$h_a = \frac{\frac{a}{2}}{tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1{,}8}{tan36°} = 2{,}48$$

A_{ABM}: $\quad A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 3{,}6 \cdot 2{,}48 = 4{,}46$

G: $\quad G = 5 \cdot A_{ABM} = 5 \cdot 4{,}46 = 22{,}3$

h: $\quad h = \sqrt{h_S^2 - h_a^2} = \sqrt{5{,}54^2 - 2{,}48^2} \quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$$h = \sqrt{24{,}5412} = 4{,}95$$

V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 22{,}3 \cdot 4{,}95 = 36{,}795$

Der Mantel der Pyramide hat einen Flächeninhalt von $49{,}9\ cm^2$. Ihr Volumen ist $36{,}8\ cm^3$ groß.

Lösung W3b/2008

<u>Lösungslogik</u>

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die beiden Punkte N_1 und N_2.
Umformung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Aufstellen der Geradengleichung g durch den Scheitelpunkt S_1 mit $m = -1$.
Berechnung des Schnittpunktes von g mit der x–Achse ergibt Scheitelpunkt S_2.
Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den Scheitelpunkt S_2 und Umformung in die allgemeine Parabelgleichung.
Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Funktionsgleichung von p_1 durch N_1 und N_2:

p_1: $\quad y = (x - x_{N_1}) \cdot (x - x_{N_2})$

$$y = (x - 1) \cdot (x - 5) = x^2 - 6x + 5$$

alternativ:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1) $0 = 1^2 + p + q$ | Punktprobe mit $N_1(1|0)$

(2) $0 = 25 + 5p + q$ | Punktprobe mit $N_2(5|0)$

(2)-(1) $0 = 24 + 4q$

$b = -6$

$b \longrightarrow (1)$

$0 = 1 - 6 + q$

$q = 5$

p_1: $y = x^2 - 6x + 5$

Scheitelpunktgleichung von p_1:

$y = (x-3)^2 - 4$ | quadratische Ergänzung

$S_1(3|-4)$

Geradengleichung g durch S_1 mit $m = -1$:

g: $y = -x + b$ | $m = -1.$

$-4 = -3 + b$ | Punktprobe mit $P(3|-4)$

$b = -1$

g: $y = -x - 1$

Schnittpunkt von g mit der x-Achse:

$0 = -x - 1$

$x_0 = -1$

Scheitelpunkt von p_2 (nach Aufgabenstellung „Berührpunkt mit der x–Achse):

$S_2(-1|0)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x+1)^2$ | Scheitelpunktgleichung von p_2

$y = x^2 + 2x + 1$ | allgemeine Parabelgleichung von p_2

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x + 1$ | $-x^2$; $+6x$; -5

$8x - 4 = 0$

$x_S = 0{,}5$

$x_S \longrightarrow p_1$

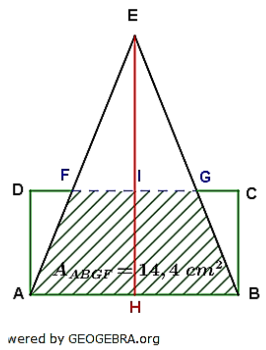
$y_s = 0{,}5^2 - 6 \cdot 0{,}5 + 5 = 2{,}25$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $P(0{,}5|2{,}25)$.

Lösung W4a/2007

<u>Lösungslogik</u>

Berechnung von A_{ABGF} aus $80\,\%$ des Rechtecks $ABCD$.
Berechnung von $\overline{FG}$ über die Flächenformel Trapez.
Berechnung von $\overline{FI}$.
Berechnung von $\overline{EH}$ über den ersten Strahlensatz.



Klausuraufschrieb

A_{ABGF}: $A_{ABGF} = 0{,}8 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0{,}8 \cdot 6 \cdot 3 = 14{,}4$.

$\overline{FG}$: $A_{ABGF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{FG}\right) \cdot \overline{BC}$

$14{,}4 = \frac{1}{2} \cdot (6 + \overline{FG}) \cdot 3 \quad | \quad \cdot 2;\ :3$

$\frac{28{,}8}{3} = 6 + \overline{FG} \quad | \quad -6$

$\overline{FG} = \frac{28{,}8}{3} - 6 = 3{,}6$

$\overline{FI}$: $\overline{FI} = 0{,}5 \cdot \overline{FG} = 0{,}5 \cdot 3{,}6 = 1{,}8$

$\overline{EH}$: $\frac{\overline{EH} - 3}{\overline{FI}} = \frac{\overline{EH}}{\frac{\overline{AB}}{2}}$

$\frac{\overline{EH} - 3}{1{,}8} = \frac{\overline{EH}}{3} \quad | \quad \cdot 3;\ \cdot 1{,}8$

$3 \cdot (\overline{EH} - 3) = 1{,}8 \cdot \overline{EH}$

$3 \cdot \overline{EH} - 9 = 1{,}8 \cdot \overline{EH} \quad | \quad -1{,}8 \cdot \overline{EH};\ +9$

$1{,}2 \cdot \overline{EH} = 9 \quad | \quad :1{,}2$

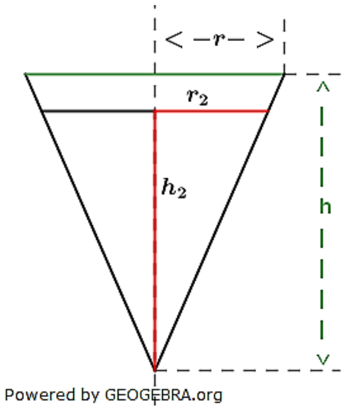
$\overline{EH} = \frac{9}{1{,}2} = 7{,}5$

Der Abstand des Punktes E zur Strecke $\overline{AB}$ beträgt $7{,}5\ cm$.

Lösung W4b/2007

Lösungslogik

Berechnung des Volumens des gesamten kegelförmigen Gefäßes über die Volumenformel.
Berechnung von h_2.
Berechnung von r_2 über den 2. Strahlensatz.
Berechnung des Wasservolumens.
Berechnung des Kugelvolumens aus der Differenz von Gesamtvolumen des Kegels und dem Wasservolumen.
Berechnung von über die Volumenformel der Kugel.



Klausuraufschrieb

V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 8{,}0 = 102{,}63$

h_2: $h_2 = \frac{7}{8} \cdot h = \frac{7}{8} \cdot 8 = 7$

r_2: $\frac{r_2}{h_2} = \frac{r}{h} \quad | \quad \cdot h_2$

$r_2 = \frac{r \cdot h_2}{h} = \frac{3{,}5 \cdot 7}{8} = 3{,}0625$

V_{Wa}: $V_{Wa} = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 3{,}1^2 \cdot 7{,}0 = 70{,}445$

V_{Kug}: $V_{Kug} = V_{Keg} - V_{Wa} = 102{,}63 - 70{,}445 = 32{,}185$

r_{Kug}: $V_{Kug} = \frac{4}{3}\pi r_{Kug}^3 \quad | \quad \cdot \frac{3}{4};\ :\pi$

$r_{Kug}^3 = \frac{\frac{3}{4} \cdot V_{Kug}}{\pi} = \frac{0{,}75 \cdot 32{,}2}{\pi} = 7{,}6872 \quad | \quad \sqrt[3]{\ }$

$r_{Kug} = 1{,}9736$

Der Radius der Kugel beträgt $2{,}0\ cm$.