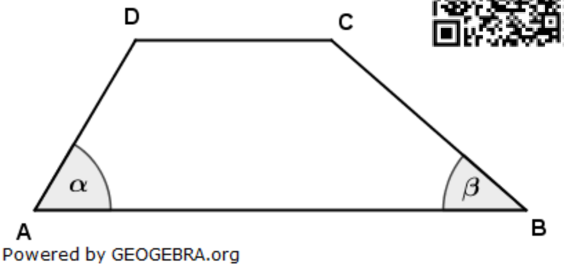
Aufgabe W1a/2008

Gegeben ist das Trapez $ABCD$.
Es gilt:

$\overline{AB} = 8{,}0\,cm$
$\overline{BC} = 4{,}2\,cm$
$\beta = 41{,}0°$
$\overline{AD} = \overline{CD}$

Berechnen Sie den Winkel α.

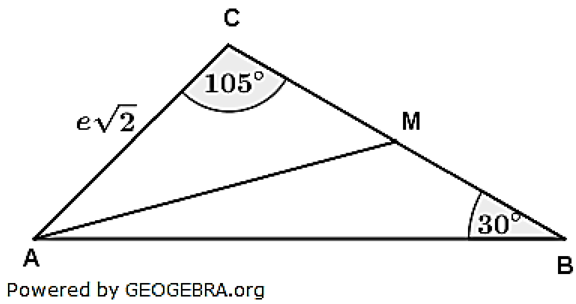
Lösung: $\alpha = 59{,}5°$.



Aufgabe W1b/2008

Gegeben ist das Dreieck ABC. Der Punkt M halbiert die Strecke $\overline{BC}$.
Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass für den Flächeninhalt des Dreiecks ABM gilt:

$$A_{ABM} = \frac{e^2}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).$$



Aufgabe W2a/2008

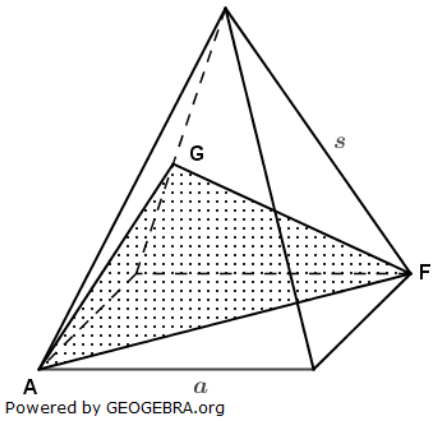
Von einer quadratischen Pyramide sind bekannt:

$a = 7{,}6\,cm$
$s = 10{,}2\,cm$.

Der Punkt G halbiert die Seitenkante s.
Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks AFG.

Lösung: $u_{AFG} = 25{,}6\,cm$

Tipp: Kosinussatz für die Strecke $\overline{AG} = \overline{FG}$.



Aufgabe W2b/2008

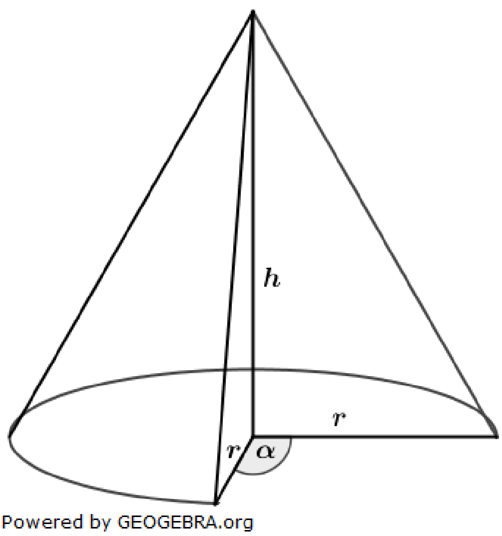
Aus einem massiven Kegel wurde ein Teil ausgeschnitten.
Es gilt:

$h = 4e$
$r = 3e$
$\alpha = 120°$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass die Oberfläche des neu entstandenen Körpers um

$4e^2(2\pi - 3)$.

kleiner ist.



Aufgabe W3a/2008

Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -x^2 + 5$.
Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitel $S_2(2|-5)$.
Durch die gemeinsamen Punkte der bei den Parabeln verläuft eine Gerade.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden rechnerisch.
Berechnen Sie die Winkel, unter denen die Gerade die x-Achse schneidet.

Lösung: h: $y = -2x + 2$; $\alpha = 116{,}6\,°$

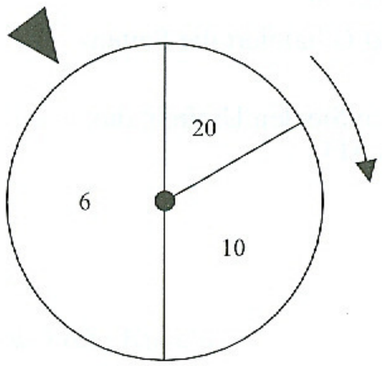
Aufgabe W3b/2008

Von einer nach oben geöffneten Normalparabel p_1 sind die Schnittpunkte mit der x-Achse bekannt: $N_1(1|0)$ und $N_2(5|0)$
Durch den Scheitelpunkt der Parabel p_1 verläuft die Gerade g mit der Steigung $m = -1$. Auf dieser Geraden liegt der Scheitelpunkt einer zweiten nach oben geöffneten Normalparabel, die mit der x-Achse nur einen gemeinsamen Punkt hat.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Parabeln.

Lösung: $P(0{,}5|2{,}25)$

Aufgabe W4a/2008

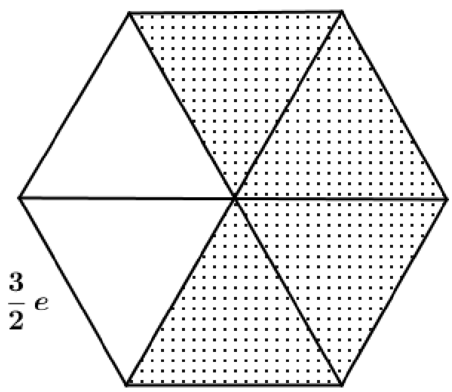
Ein Glücksrad mit den Mittelpunktswinkeln $60°$, $120°$ und $180°$ ist mit den Zahlen 20, 10 und 6 beschriftet.
Es wird zweimal gedreht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Zahlen genau 30 ergibt? Lösung: $p = \frac{2}{18} \approx 11{,}1\,\%$
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe größer als 12 ist? Lösung: $p = \frac{3}{4} = 75\,\%$
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe kleiner als 30? Lösung: $p = \frac{31}{36} \approx 86{,}1\,\%$



Aufgabe W4b/2008

Das regelmäßige Sechseck hat die Seitenlänge $\frac{3}{2}e$.
Die vier grau eingefärbten Dreiecke bilden die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide.
Berechnen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von e.
Der Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Pyramide wird mit φ bezeichnet.
Zeigen Sie, dass gilt: $\tan\varphi = \sqrt{2}$.

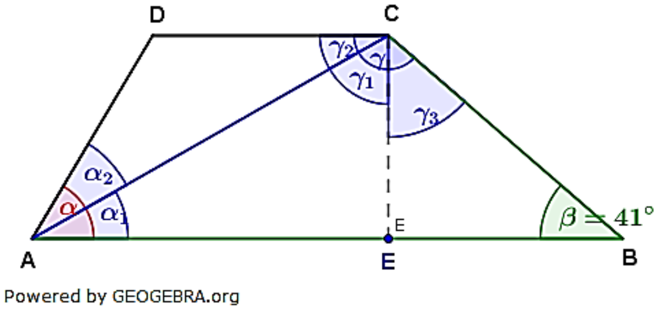
Lösung: $V = \frac{9}{16}e^3\sqrt{2}$



Powered by GEOGEBRA.org

Lösung W1a/2008

Lösungslogik



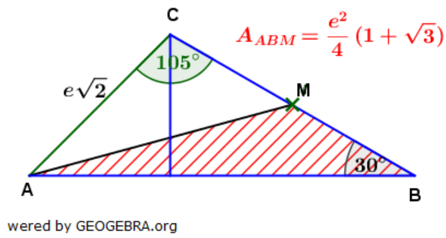
Berechnung von γ_3 als Ergänzungswinkel im Dreieck EBC.
Berechnung von γ.
Berechnung von $\overline{EC}$ über den $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{EB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{AE}$ über $\overline{AB} - \overline{EB}$.
Berechnung von γ_1 über den tan.
Berechnung von γ_2 als Differenz aus γ und γ_1.
Wegen $\overline{AD} = \overline{DC}$, ist $\alpha_2 = \gamma_2$.
Berechnung von α_1 über die Winkelsumme im Dreieck ABC.
Berechnung von α als Summe von α_1 und α_2.

Klausuraufschrieb

γ_3: $\gamma_3 = 90° - \beta = 90° - 41° = 49°$
γ: $\gamma = 90° + \gamma_3 = 90° + 49° = 139°$
$\overline{EC}$: $sin\beta = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$
$\overline{EC} = \overline{BC} \cdot sin\beta = 4{,}2 \cdot sin41° = 2{,}7554$
$\overline{EB}$: $\overline{EB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{EC}^2} = \sqrt{4{,}2^2 - 2{,}7554^2} = 10{,}0478$ | Satz des Pythagoras
$\overline{EB} = \sqrt{10{,}0478} = 3{,}17$
$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 8{,}0 - 3{,}17 = 4{,}83$
γ_1: $tan(\gamma_1) = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{4{,}83}{2{,}7554} = 1{,}7529$
$\gamma_1 = tan^{-1}\,1{,}7529 = 60{,}27°$
γ_2: $\gamma_2 = 90° - \gamma_1 = 90° - 60{,}27° = 29{,}73° = \alpha_2$
α_1: $\alpha_1 = 180° - \beta - \gamma_1 - \gamma_3 = 180° - 41° - 60{,}27° - 49° = 29{,}73°$
α: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 29{,}73° + 29{,}73° = 59{,}46°$
Der Winkel α hat $59{,}5°$.

Lösung W1b/2008

Lösungslogik



Die Fläche des Dreiecks A_{BM} errechnet sich aus der trigonometrischen Flächenformel für Dreiecke über die Seite $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$ und dem $sin30°$.
Berechnung von $\overline{CD}$ über den $sin45°$.
Berechnung von $\overline{AD}$.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den $tan30°$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den $cos30°$.
Berechnung von $\overline{BM}$.
Berechnung von $\overline{AB}$.
Berechnung von A_{ABM} über die trigonometrische Flächenformel des Dreiecks.

Klausuraufschrieb

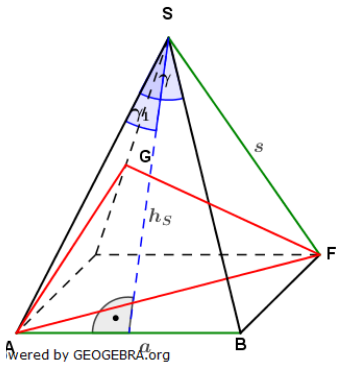
$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} \cdot sin30°$

$\overline{CD}$:	$sin45° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$	|	$\cdot \overline{AC}$
	$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot sin45° = e\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = e$		
$\overline{AD}$:	$\overline{AD} = \overline{CD} = e$	|	Wegen 45°
$\overline{BD}$:	$tan30° = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$	|	$\cdot \overline{BD};\ : tan30°$
	$\overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{tan30°} = \frac{e}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3e}{\sqrt{3}}$	|	$\cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (Nenner rational machen)
	$\overline{BD} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3e\sqrt{3}}{3} = e\sqrt{3}$		
$\overline{BC}$:	$cos30° = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$	|	$\cdot \overline{BC};\ : cos30°$
	$\overline{BC} = \frac{\overline{BD}}{cos30°} = \frac{\frac{3e}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{6e}{3} = 2e$		
$\overline{BM}$:	$\overline{BM} = 0{,}5 \cdot \overline{BC} = 0{,}5 \cdot 2e = e$		
$\overline{AB}$:	$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = e + e\sqrt{3} = e(1+\sqrt{3})$		
A_{ABM}:	$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot e(1+\sqrt{3}) \cdot e \cdot sin30° = \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}$		
	$A_{ABM} = \frac{1}{4}e^2(1+\sqrt{3})$ **q.e.d.**		

Lösung W2a/2008

Lösungslogik

Wegen „G halbiert die Seitenkante s" ist $\overline{AG} = \overline{FG}$ und $\overline{GS} = 0{,}5 \cdot s$.
Berechnung von γ_1 über den sin.
Berechnung von γ.
Berechnung des Neigungswinkels $\overline{AF}$ über die Flächendiagonale der Grundfläche.
Berechnung von $\overline{AG} = \overline{FG}$ über den Kosinussatz.
Berechnung des Umfangs des Dreiecks AFG.



Klausuraufschrieb

$u_{AFG} = \overline{AF} + \overline{AG} + \overline{GF} = \overline{AF} + 2 \cdot \overline{AG}$

γ_1	$sin\gamma_1 = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{s} = \frac{3{,}8}{10{,}2} = 0{,}3725$		
	$\gamma_1 = sin^{-1}(0{,}3725) = 21{,}87°$		
γ:	$\gamma = 2 \cdot \gamma_1 = 43{,}74°$		
$\overline{AF}$:	$\overline{AF} = a \cdot \sqrt{2} = 7.6 \cdot \sqrt{2} = 10{,}75$		
$\overline{AG}$:	$\overline{AG}^2 = s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{s}{2} \cdot cos\gamma$	|	Kosinussatz
	$= 10{,}2^2 + 5{,}1^2 - 2 \cdot 10{,}2 \cdot 5{,}1 \cdot cos43{,}74°$	|	$\sqrt{\ }$
	$\overline{AG} = \sqrt{54{,}88} = 7{,}41$		
u_{AFG}:	$u_{AFG} = 10{,}75 + 2 \cdot 7{,}41 = 25{,}57$		

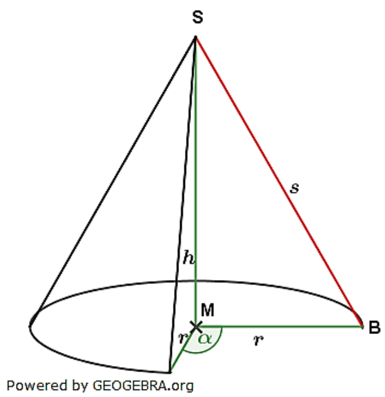
Der Umfang des Dreiecks AFG beträgt $25{,}6\ cm$.

β: $\quad cos\beta = \frac{h_a}{h_S} = \frac{4,13}{8,4} = 0,49166666$
$\quad \beta = cos^{-1}(0,49166666) = 60,55°$
$\overline{AF}$: $\quad \overline{AF} = r + h_a = 5,1 + 4,13 = 9,23$
A_{AFS}: $\quad A_{AFS} = \frac{1}{2} \cdot h_s \cdot \overline{AF} \cdot sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 8,4 \cdot 9,23 \cdot sin60,55° = 33,76$
Das Dreieck AFS hat einen Flächeninhalt von $33,8\ cm^2$.

Lösung W2b/2008

Lösungslogik

Berechnung von s des Kegels über den Satz des Pytha
Berechnung der Oberfläche O_{Keg} des Kegels über die Oberflächenformel.
Durch den Ausschnittwinkel von $120°$ ist die Fläche nur noch $\frac{2}{3}$ der Fläche des ganzen Kegels $(\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3})$.
Hinzu kommen jetzt aber noch zweimal das Dreieck MBS, welches durch den Schnitt entsteht.
Berechnung der zwei Dreiecksflächen.
Berechnung der Oberfläche O_{Neu} des neu entstanden Körpers.
Berechnung der Differenz aus O_{Neu} und O_{Keg}.



Klausuraufschrieb

s: $\quad s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(4e)^2 + (3e)^2}$ | Satz des Pythagoras
$\quad s = \sqrt{25e^2} = 5e$
O_{Keg}: $\quad O_{Keg} = \pi \cdot r \cdot (r + s) = \pi \cdot 3e \cdot (3e + 5e) = 24\pi e^2$
A_{MBS}: $\quad A_{MBS} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3e \cdot 4e = 6e^2$
O_{Neu}: $\quad O_{Neu} = \frac{2}{3} \cdot O_{Keg} + 2 \cdot A_{MBS} = \frac{2}{3} \cdot 24\pi e^2 + 2 \cdot 6e^2 = 16\pi e^2 + 12e^2$
O_{Diff}: $\quad O_{Diff} = O_{Keg} - O_{Neu} = 24\pi e^2 - 16\pi e^2 - 12e^2 = 8\pi e^2 - 12e^2$
$\quad O_{Diff} = 4e^2(2\pi - 3)$ **q.e.d.**

Lösung W3a/2008

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über deren Scheitelpunkt.
Berechnung der Schnittpunkte von p_1 mit p_2 durch Gleichsetzung.
Aufstellung der Geradengleichung g durch die Schnittpunkte von p_1 mit p_2.
Berechnung des Schnittwinkels der Geraden g mit der x-Achse über $tan(\alpha) = m$.

Klausuraufschrieb

p_1: $y = -x^2 + 5$ | gegeben

Funktionsgleichungen p_2 über Scheitelpunkt:

p_2: $y = (x-2)^2 - 5$ | Scheitelpunktgleichung

$y = x^2 - 4x - 1$

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$-x^2 + 5 = x^2 - 4x - 1$ | $+x^2;\ -5$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$ | $:2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = -1$

$x_1 \longrightarrow p_1$

$y_1 = -x_1^2 + 5 = -3^2 + 5 = -4$

$x_2 \longrightarrow p_1$

$y_2 = -x_2^2 + 5 = -(-1)^2 + 5 = 4$

Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $P(3|-4)$ und $Q(-1|4)$.

Geradengleichung g durch P und Q:

g: $y = mx + b$

m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-4)}{-1-3} = -2$

$y = -2x + b$ | Punktprobe mit $P(3|-4)$

$-4 = -2 \cdot 3 + b$

$b = 2$

g: $y = -2x + 2$

Schnittwinkel von g mit der x-Achse:

Es gilt: $m = tan(\alpha)$

$tan(\alpha_1) = -2 \Longrightarrow \alpha = |tan^{-1}(-2)| = 63{,}4°$

$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$=180°-63,4°=116,36°

Die beiden Schnittwinkel sind $\alpha_1 = 63{,}4°$ und $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 116{,}6°$

Lösung W3b/2008

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die beiden Punkte N_1 und N_2.
Umformung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Aufstellen der Geradengleichung g durch den Scheitelpunkt S_1 mit $m = -1$.
Berechnung des Schnittpunktes von g mit der x–Achse ergibt Scheitelpunkt S_2.
Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den Scheitelpunkt S_2 und Umformung in die allgemeine Parabelgleichung.
Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p_1 durch N_1 und N_2:

p_1: $y = (x - x_{N_1}) \cdot (x - x_{N_2})$

$y = (x-1) \cdot (x-5) = x^2 - 6x + 5$

alternativ:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1) $0 = 1^2 + p + q$ | Punktprobe mit $N_1(1|0)$

(2) $0 = 25 + 5p + q$ | Punktprobe mit $N_2(5|0)$

(2)-(1) $0 = 24 + 4q$

$b = -6$

$b \longrightarrow (1)$

$0 = 1 - 6 + q$

$q = 5$

p_1: $y = x^2 - 6x + 5$

Scheitelpunktgleichung von p_1:

$y = (x-3)^2 - 4$ | quadratische Ergänzung

$S_1(3|-4)$

Geradengleichung g durch S_1 mit $m = -1$:

g: $y = -x + b$ | $m = -1$.

$-4 = -3 + b$ | Punktprobe mit $P(3|-4)$

$b = -1$

g: $y = -x - 1$

Schnittpunkt von g mit der x-Achse:

$0 = -x - 1$

$x_0 = -1$

Scheitelpunkt von p_2 (nach Aufgabenstellung „Berührpunkt mit der x–Achse):

$S_2(-1|0)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x+1)^2$ | Scheitelpunktgleichung von p_2

$y = x^2 + 2x + 1$ | allgemeine Parabelgleichung von p_2

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x + 1$ | $-x^2$; $+6x$; -5

$8x - 4 = 0$

$x_S = 0{,}5$

$x_S \longrightarrow p_1$

$y_s = 0{,}5^2 - 6 \cdot 0{,}5 + 5 = 2{,}25$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $P(0{,}5|2{,}25)$.

Lösung W4a/2008

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe genau 30.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe größer als 12.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe kleiner als 30.

Klausuraufschrieb

$P(6) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(10) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(20) = \frac{1}{6}$

$P(Summe = 30) = P\{(10;20),(20;10)\}$

$P(10;20) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ $\qquad$ $P(20;10) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P(Summe = 30) = P(10;20) + P(20;10) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} \approx 11{,}1\,\%$

Die Summe größer als 12 hat das Gegenereignis Summe gleich 12.

$P(Summe > 12) = 1 - P(Summe = 12)$

$P(6;6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(Summe > 12) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \approx 75\,\%$

Die Summe kleiner als 30 hat das Gegenereignis Summe größer gleich 30.

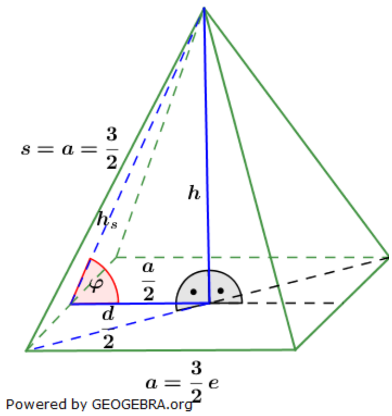
$P(Summe < 30) = 1 - \big(P(Summe = 30) + P(Summe = 40)\big)$

$P(Summe < 30) = 1 - \frac{2}{18} - \frac{1}{36} = \frac{31}{36} \approx 86{,}1\,\%$

Lösung W4b/2008

Lösungslogik

Wegen des regelmäßigen Sechsecks sind die Seitenflächen der Pyramide gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge $s = a = \frac{3}{2}e$. Für das Volumen der Pyramide benötigen wir die Pyramidenhöhe h.
Berechnung von $\frac{d}{2}$ über die Diagonale der quadratischen Grundfläche.
Berechnung von h übe den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens und Aufstellung von $tan\alpha$.



Klausuraufschrieb

$\frac{d}{2}$: $\quad d = a \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2}e \cdot \sqrt{2}$ $\quad$ | Diagonale im Quadrat

$\frac{d}{2} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$

h: $\quad h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}e\right)^2 - \left(\frac{3}{4}e\sqrt{2}\right)^2}$ $\quad$ | Satz des Pythagoras

$= \sqrt{\frac{9}{4}e^2 - \frac{9}{16}e^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{18}{8}e^2 - \frac{9}{8}e^2} = \sqrt{\frac{9}{8}e^2}$ $\quad$ | $\sqrt{\ }$

$h = \frac{3e}{\sqrt{8}} = \frac{3e}{\sqrt{2 \cdot 4}} = \frac{3e}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3e \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$

V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}e\right)^2 \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{2} = \frac{27}{48}e^3\sqrt{2} = \frac{9}{16}e^3\sqrt{2}$ **q.e.d.**

$tan\varphi$: $\quad tan\varphi = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{3}{4}e\sqrt{2}}{\frac{3}{4}e} = \sqrt{2}$ **q.e.d.**