

Lösung W1a/2008

Lösungslogik

Berechnung von γ_3 als Ergänzungswinkel im Dreieck EBC .

Berechnung von γ .

Berechnung von \overline{EC} über den $\sin\beta$.

Berechnung von \overline{EB} über den Satz des Pythagoras.

Berechnung von \overline{AE} über $\overline{AB} - \overline{EB}$.

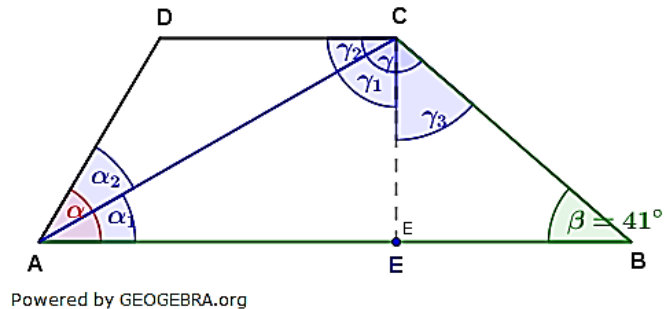
Berechnung von γ_1 über den \tan .

Berechnung von γ_2 als Differenz aus γ und γ_1 .

Wegen $\overline{AD} = \overline{DC}$, ist $\alpha_2 = \gamma_2$.

Berechnung von α_1 über die Winkelsumme im Dreieck ABC .

Berechnung von α als Summe von α_1 und α_2 .



Klausuraufschrieb

$$\gamma_3: \gamma_3 = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

$$\gamma: \gamma = 90^\circ + \gamma_3 = 90^\circ + 49^\circ = 139^\circ$$

$$\overline{EC}: \sin\beta = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{EC} = \overline{BC} \cdot \sin\beta = 4,2 \cdot \sin 41^\circ = 2,7554$$

$$\overline{EB}: \overline{EB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{EC}^2} = \sqrt{4,2^2 - 2,7554^2} = 3,17 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{EB} = \sqrt{10,0478} = 3,17$$

$$\overline{AE}: \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 8,0 - 3,17 = 4,83$$

$$\gamma_1: \tan(\gamma_1) = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{4,83}{2,7554} = 1,7529$$

$$\gamma_1 = \tan^{-1} 1,7529 = 60,27^\circ$$

$$\gamma_2: \gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1 = 90^\circ - 60,27^\circ = 29,73^\circ = \alpha_2$$

$$\alpha_1: \alpha_1 = 180^\circ - \beta - \gamma_1 - \gamma_3 = 180^\circ - 41^\circ - 60,27^\circ - 49^\circ = 29,73^\circ$$

$$\alpha: \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 29,73^\circ + 29,73^\circ = 59,46^\circ$$

Der Winkel α hat $59,5^\circ$.

Lösung W1b/2008

Lösungslogik

Die Fläche des Dreiecks A_{BM} errechnet sich aus der trigonometrischen Flächenformel für Dreiecke über die Seite \overline{AB} und \overline{BM} und dem $\sin 30^\circ$.

Berechnung von \overline{CD} über den $\sin 45^\circ$.

Berechnung von \overline{AD} .

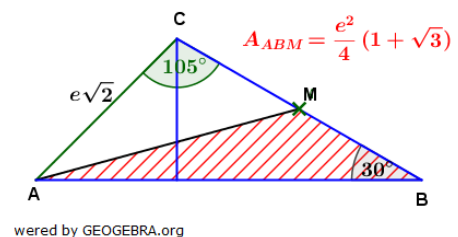
Berechnung von \overline{BD} über den $\tan 30^\circ$.

Berechnung von \overline{BC} über den $\cos 30^\circ$.

Berechnung von \overline{BM} .

Berechnung von \overline{AB} .

Berechnung von A_{ABM} über die trigonometrische Flächenformel des Dreiecks.



Klausuraufschrieb

$$A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} \cdot \sin 30^\circ$$

$$\overline{CD}: \quad \sin 45^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \sin 45^\circ = e\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = e$$

$$\overline{AD}: \quad \overline{AD} = \overline{CD} = e \quad | \quad \text{Wegen } 45^\circ$$

$$\overline{BD}: \quad \tan 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \quad | \quad \cdot \overline{BD}; : \tan 30^\circ$$

$$\overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{\tan 30^\circ} = \frac{e}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3e}{\sqrt{3}} \quad | \quad \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ (Nenner rational machen)}$$

$$\overline{BD} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3e\sqrt{3}}{3} = e\sqrt{3}$$

$$\overline{BC}: \quad \cos 30^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}; : \cos 30^\circ$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{BD}}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{3e}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{6e}{3} = 2e$$

$$\overline{BM}: \quad \overline{BM} = 0,5 \cdot \overline{BC} = 0,5 \cdot 2e = e$$

$$\overline{AB}: \quad \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = e + e\sqrt{3} = e(1 + \sqrt{3})$$

$$A_{ABM}: \quad A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot e(1 + \sqrt{3}) \cdot e \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_{ABM} = \frac{1}{4} e^2 (1 + \sqrt{3}) \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Lösung W2a/2008

Lösungslogik

Wegen „G halbiert die Seitenkante s“, ist $\overline{AG} = \overline{FG}$ und $\overline{GS} = 0,5 \cdot s$.

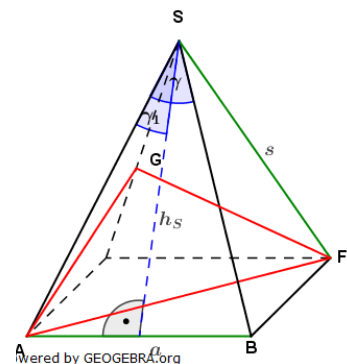
Berechnung von γ_1 über den \sin .

Berechnung von γ .

Berechnung des Neigungswinkels \overline{AF} über die Flächendiagonale der Grundfläche.

Berechnung von $\overline{AG} = \overline{FG}$ über den Kosinussatz.

Berechnung des Umfangs des Dreiecks AFG.



Klausuraufschrieb

$$u_{AFG} = \overline{AF} + \overline{AG} + \overline{GF} = \overline{AF} + 2 \cdot \overline{AG}$$

$$\gamma_1: \quad \sin \gamma_1 = \frac{\overline{AB}}{s} = \frac{3,8}{10,2} = 0,3725$$

$$\gamma_1 = \sin^{-1}(0,3725) = 21,87^\circ$$

$$\gamma: \quad \gamma = 2 \cdot \gamma_1 = 43,74^\circ$$

$$\overline{AF}: \quad \overline{AF} = a \cdot \sqrt{2} = 7,6 \cdot \sqrt{2} = 10,75$$

$$\overline{AG}: \quad \overline{AG}^2 = s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{s}{2} \cdot \cos \gamma \quad | \quad \text{Kosinussatz}$$

$$= 10,2^2 + 5,1^2 - 2 \cdot 10,2 \cdot 5,1 \cdot \cos 43,74^\circ \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{54,88} = 7,41$$

$$u_{AFG}: \quad u_{AFG} = 10,75 + 2 \cdot 7,41 = 25,57$$

Der Umfang des Dreiecks AFG beträgt 25,6 cm.

$$\beta: \quad \cos\beta = \frac{h_a}{h_s} = \frac{4,13}{8,4} = 0,49166666$$

$$\beta = \cos^{-1}(0,49166666) = 60,55^\circ$$

$$\overline{AF}: \quad \overline{AF} = r + h_a = 5,1 + 4,13 = 9,23$$

$$A_{AFS}: \quad A_{AFS} = \frac{1}{2} \cdot h_s \cdot \overline{AF} \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 8,4 \cdot 9,23 \cdot \sin 60,55^\circ = 33,76$$

Das Dreieck AFS hat einen Flächeninhalt von 33,8 cm².

Lösung W2b/2008

Lösungslogik

Berechnung von s des Kegels über den Satz des Pytha

Berechnung der Oberfläche O_{Keg} des Kegels über die

Oberflächenformel.

Durch den Ausschnittwinkel von 120° ist die Fläche

nur noch $\frac{2}{3}$ der Fläche des ganzen Kegels ($\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$).

Hinzu kommen jetzt aber noch zweimal das Dreieck

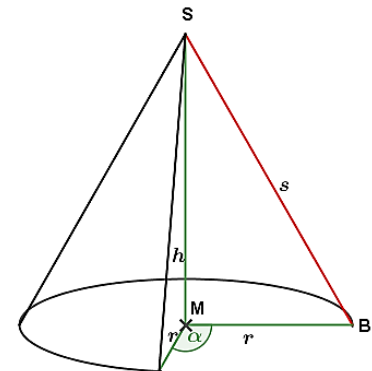
MBS, welches durch den Schnitt entsteht.

Berechnung der zwei Dreiecksflächen.

Berechnung der Oberfläche O_{Neu} des neu entstanden

Körpers.

Berechnung der Differenz aus O_{Neu} und O_{Keg} .



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$s: \quad s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(4e)^2 + (3e)^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s = \sqrt{25e^2} = 5e$$

$$O_{Keg}: \quad O_{Keg} = \pi \cdot r \cdot (r + s) = \pi \cdot 3e \cdot (3e + 5e) = 24\pi e^2$$

$$A_{MBS}: \quad A_{MBS} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3e \cdot 4e = 6e^2$$

$$O_{Neu}: \quad O_{Neu} = \frac{2}{3} \cdot O_{Keg} + 2 \cdot A_{MBS} = \frac{2}{3} \cdot 24\pi e^2 + 2 \cdot 6e^2 = 16\pi e^2 + 12e^2$$

$$O_{Diff}: \quad O_{Diff} = O_{Keg} - O_{Neu} = 24\pi e^2 - 16\pi e^2 - 12e^2 = 8\pi e^2 - 12e^2$$

$$O_{Diff} = 4e^2(2\pi - 3)$$

q.e.d.

Lösung W3a/2008

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über deren Scheitelpunkt.

Berechnung der Schnittpunkte von p_1 mit p_2 durch Gleichsetzung.

Aufstellung der Geradengleichung g durch die Schnittpunkte von p_1 mit p_2 .

Berechnung des Schnittwinkels der Geraden g mit der x -Achse über $\tan(\alpha) = m$.

Klausuraufschrieb

$$p_1: y = -x^2 + 5 \quad | \quad \text{gegeben}$$

Funktionsgleichungen p_2 über Scheitelpunkt:

$$p_2: y = (x - 2)^2 - 5 \quad | \quad \text{Scheitelpunktgleichung}$$

$$y = x^2 - 4x - 1$$

Schnittpunkt von p_1 mit p_2 :

$$p_1 \cap p_2: \quad | \quad \text{Schnittpunkt durch Gleichsetzung}$$

$$-x^2 + 5 = x^2 - 4x - 1 \quad | \quad +x^2; -5$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad | \quad :2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2$$

$$x_1 = 3; x_2 = -1$$

$$x_1 \rightarrow p_1$$

$$y_1 = -x_1^2 + 5 = -3^2 + 5 = -4$$

$$x_2 \rightarrow p_1$$

$$y_2 = -x_2^2 + 5 = -(-1)^2 + 5 = 4$$

Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $P(3|-4)$ und $Q(-1|4)$.

Geradengleichung g durch P und Q :

$$g: y = mx + b$$

$$m: m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-4)}{-1 - 3} = -2$$

$$y = -2x + b \quad | \quad \text{Punktprobe mit } P(3|-4)$$

$$-4 = -2 \cdot 3 + b$$

$$b = 2$$

$$g: y = -2x + 2$$

Schnittwinkel von g mit der x -Achse:

Es gilt: $m = \tan(\alpha)$

$$\tan(\alpha_1) = -2 \Rightarrow \alpha = |\tan^{-1}(-2)| = 63,4^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 180^\circ - 63,4^\circ = 116,6^\circ$$

Die beiden Schnittwinkel sind $\alpha_1 = 63,4^\circ$ und $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 116,6^\circ$

Lösung W3b/2008

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die beiden Punkte N_1 und N_2 .

Umformung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.

Aufstellen der Geradengleichung g durch den Scheitelpunkt S_1 mit $m = -1$.

Berechnung des Schnittpunktes von g mit der x -Achse ergibt Scheitelpunkt S_2 .

Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den Scheitelpunkt S_2 und Umformung in die allgemeine Parabelgleichung.

Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2 .

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p_1 durch N_1 und N_2 :

$$p_1: y = (x - x_{N_1}) \cdot (x - x_{N_2})$$
$$y = (x - 1) \cdot (x - 5) = x^2 - 6x + 5$$

alternativ:

$$p_1: y = x^2 + px + q$$

(1)	$0 = 1^2 + p + q$		Punktprobe mit $N_1(1 0)$
(2)	$0 = 25 + 5p + q$		Punktprobe mit $N_2(5 0)$
(2)-(1)	$0 = 24 + 4q$		
	$b = -6$		

$b \rightarrow (1)$

$$0 = 1 - 6 + q$$
$$q = 5$$

$$p_1: y = x^2 - 6x + 5$$

Scheitelpunktgleichung von p_1 :

$$y = (x - 3)^2 - 4 \quad | \quad \text{quadratische Ergänzung}$$
$$S_1(3|-4)$$

Geradengleichung g durch S_1 mit $m = -1$:

$$g: y = -x + b \quad | \quad m = -1.$$
$$-4 = -3 + b \quad | \quad \text{Punktprobe mit } P(3|-4)$$
$$b = -1$$

$$g: y = -x - 1$$

Schnittpunkt von g mit der x -Achse:

$$0 = -x - 1$$
$$x_0 = -1$$

Scheitelpunkt von p_2 (nach Aufgabenstellung „Berührungspunkt mit der x -Achse):

$$S_2(-1|0)$$

Funktionsgleichung von p_2 :

$$p_2: y = (x + 1)^2 \quad | \quad \text{Scheitelpunktgleichung von } p_2$$
$$y = x^2 + 2x + 1 \quad | \quad \text{allgemeine Parabelgleichung von } p_2$$

Schnittpunkt von p_1 mit p_2 :

$$p_1 \cap p_2: \quad | \quad \text{Schnittpunkt durch Gleichsetzung}$$
$$x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x + 1 \quad | \quad -x^2; +6x; -5$$
$$8x - 4 = 0$$
$$x_S = 0,5$$

$x_S \rightarrow p_1$

$$y_S = 0,5^2 - 6 \cdot 0,5 + 5 = 2,25$$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $P(0,5|2,25)$.

Lösung W4a/2008

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe genau 30.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe größer als 12.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe kleiner als 30.

Klausuraufschrieb

$$P(6) = \frac{1}{2} \qquad P(10) = \frac{1}{3} \qquad P(20) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{Summe} = 30) = P\{(10; 20), (20; 10)\}$$

$$P(10; 20) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \qquad P(20; 10) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$P(\text{Summe} = 30) = P(10; 20) + P(20; 10) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} \approx 11,1 \%$$

Die Summe größer als 12 hat das Gegenereignis Summe gleich 12.

$$P(\text{Summe} > 12) = 1 - P(\text{Summe} = 12)$$

$$P(6; 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{Summe} > 12) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \approx 75 \%$$

Die Summe kleiner als 30 hat das Gegenereignis Summe größer gleich 30.

$$P(\text{Summe} < 30) = 1 - (P(\text{Summe} = 30) + P(\text{Summe} = 40))$$

$$P(\text{Summe} < 30) = 1 - \frac{2}{18} - \frac{1}{36} = \frac{31}{36} \approx 86,1 \%$$

Lösung W4b/2008

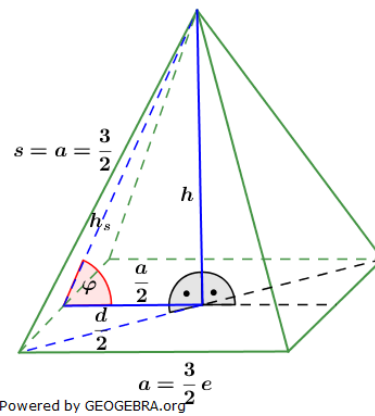
Lösungslogik

Wegen des regelmäßigen Sechsecks sind die Seitenflächen der Pyramide gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge $s = a = \frac{3}{2}e$. Für das Volumen der Pyramide benötigen wir die Pyramidenhöhe h .

Berechnung von $\frac{d}{2}$ über die Diagonale der quadratischen Grundfläche.

Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Volumens und Aufstellung von $\tan\alpha$.



Klausuraufschrieb

$$\frac{d}{2}: \quad d = a \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2}e \cdot \sqrt{2} \quad | \quad \text{Diagonale im Quadrat}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$$

$$h: \quad h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}e\right)^2 - \left(\frac{3}{4}e\sqrt{2}\right)^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}e^2 - \frac{9}{16}e^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{18}{8}e^2 - \frac{9}{8}e^2} = \sqrt{\frac{9}{8}e^2} \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$h = \frac{3e}{\sqrt{8}} = \frac{3e}{\sqrt{2 \cdot 4}} = \frac{3e}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3e \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$$

$$V_{Pyr}: \quad V_{Pyr} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}e\right)^2 \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{2} = \frac{27}{48}e^3\sqrt{2} = \frac{9}{16}e^3\sqrt{2} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

$$\tan\varphi: \quad \tan\varphi = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{3}{4}e\sqrt{2}}{\frac{3}{4}e} = \sqrt{2} \quad \mathbf{q.e.d.}$$