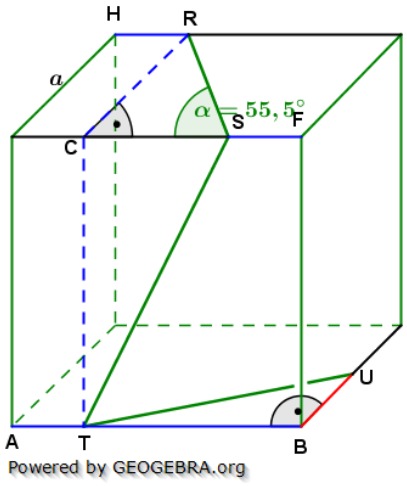
Lösung W1a/2009

Lösungslogik

Die Strecke $\overline{BU}$ lässt sich über den Satz des Pythagoras aus den Strecken $\overline{TB}$ und $\overline{TU}$ bestimmen.
Die Strecke $\overline{TU}$ berechnet sich aus der Differenz der Länge des Streckenzuges $RSTU$ und den Längen der Strecken $\overline{RS}$ und $\overline{ST}$.
Da die beiden Dreiecke SRC und STC kongruent sind, ist $\overline{RS} = \overline{ST}$.
$\overline{RS} = \overline{ST}$ errechnet sich über den $sin\alpha$.
$\overline{TB}$ errechnet sich der Differenz von a und $\overline{AT} = \overline{SF} = \overline{HR}$.
$\overline{AT} = \overline{SF} = \overline{HR}$ errechnet sich aus der Differenz von a und $\overline{CS}$ geteilt durch 2.
$\overline{CS}$ errechnet sich über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

$\overline{RS}$: $\quad sin\alpha = \frac{a}{\overline{RS}} \quad | \quad \cdot \overline{RS};\ : sin\alpha$

$\overline{RS} = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{6{,}4}{sin55{,}5°} = 7{,}77$

$\overline{CS}$: $\quad \overline{CS} = \sqrt{\overline{RS}^2 - a^2} = \sqrt{7{,}77^2 - 6{,}4^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{CS} = \sqrt{19{,}4129} = 4{,}40$

$\overline{AT}$: $\quad \overline{AT} = \frac{a - \overline{CS}}{2} = \frac{6{,}4 - 4{,}4}{2} = 1$

$\overline{TB}$: $\quad \overline{TB} = a - \overline{AT} = 6{,}4 - 1 = 5{,}4$

$\overline{TU}$: $\quad \overline{TU} = \overline{RSTU} - 2 \cdot \overline{RS} = 21{,}7 - 2 \cdot 7{,}77 = 6{,}16$

$\overline{BU}$: $\quad \overline{BU} = \sqrt{\overline{TU}^2 - \overline{TB}^2} = \sqrt{6{,}16^2 - 5{,}4^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

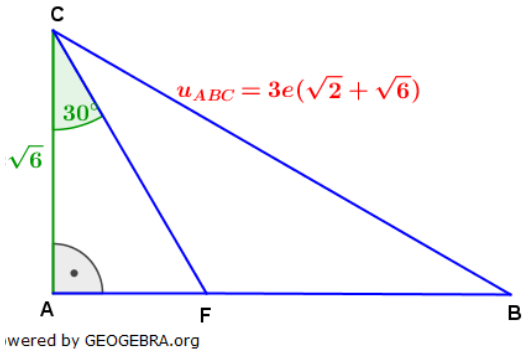
$\overline{BU} = \sqrt{8{,}7856} = 2{,}96$

Die Strecke $\overline{BU}$ ist $3\ cm$ lang.

Lösung W1b/2009

Lösungslogik

Der Umfang des Dreiecks ABC errechnet sich der Summe der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$.
Berechnung von $\overline{AF}$ über den $tan30°$.
Berechnung von $\overline{CF} = \overline{FB}$ über den $cos30°$.
Berechnung von $\overline{AB}$ aus der Summe von $\overline{AF}$ und $\overline{FB}$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von u_{ABC}.



Klausuraufschrieb

$u_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$

$\overline{AF}$: $\quad tan30° = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$

$\overline{AF} = \overline{AC} \cdot tan30° = e\sqrt{6} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{e\sqrt{18}}{3} = e\sqrt{2}$

$\overline{CF}$: $\quad cos30° = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} \quad | \quad \cdot \overline{CF};\ :cos30°$

$\overline{CF} = \frac{\overline{AC}}{cos30°} = \frac{e\sqrt{6}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = 2e\sqrt{2}$

$\overline{AB}$: $\quad \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{CF} = e\sqrt{2} + 2e\sqrt{2} = 3e\sqrt{2}$

$\overline{BC}$: $\quad \overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(e\sqrt{6}\right)^2 + \left(3e\sqrt{2}\right)^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

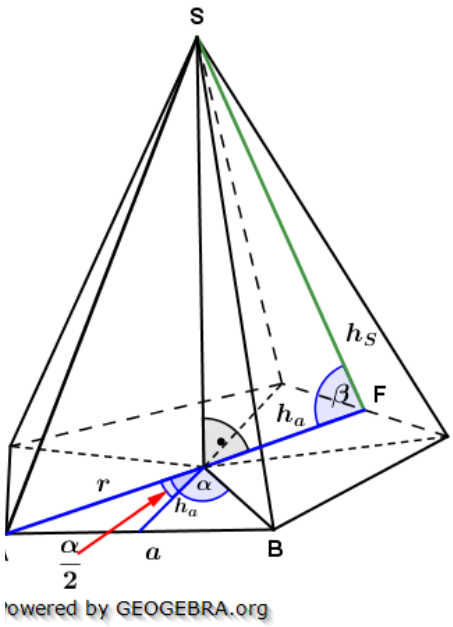
$\overline{BC} = \sqrt{6e^2 + 18e^2} = \sqrt{24e^2} = e\sqrt{4 \cdot 6} = 2e\sqrt{6}$

u_{ABC}: $\quad u_{ABC} = 3e\sqrt{2} + 2e\sqrt{6} + e\sqrt{6} = 3e\sqrt{2} + 3e\sqrt{6} = 3e\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2009

Lösungslogik

Berechnung des Flächeninhalts eines Seitendreiecks über den gegebenen Mantel M.
Berechnung der Grundkante a aus der Flächenformel für Dreiecke und daraus $\frac{a}{2}$.
Berechnung des Spitzenwinkels α und daraus $\frac{\alpha}{2}$.
Berechnung von h_a über den $tan\frac{\alpha}{2}$.
Berechnung von r über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Winkels β über den cos.
Berechnung der Strecke $\overline{AF}$ als Summe von r und h_a.
Berechnung der Fläche des Dreiecks AFS über die trigonometrische Flächenformel.



Klausuraufschrieb

A_{ABS}: $\quad A_{ABS} = \frac{1}{5} \cdot M = \frac{1}{5} \cdot 126 = 25{,}2$

a: $\quad A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S \quad | \quad \cdot 2;\ :h_S$

$a = \frac{2 \cdot A_{ABS}}{h_S} = \frac{2 \cdot 25{,}2}{8{,}4} = 6$ hieraus $\frac{a}{2} = 3$

α: $\quad \alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ hieraus $\frac{\alpha}{2} = 36°$

h_a: $\quad tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} \quad | \quad \cdot h_a;\ :tan\frac{\alpha}{2}$

$h_a = \frac{\frac{a}{2}}{tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{tan36°} = 4{,}13$

r: $\quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2} = \sqrt{3^2 + 4{,}13^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$r = \sqrt{26{,}0569} = 5{,}1$

β: $\quad cos\beta = \frac{h_a}{h_S} = \frac{4{,}13}{8{,}4} = 0{,}49166666$

$\beta = cos^{-1}(0{,}49166666) = 60{,}55°$

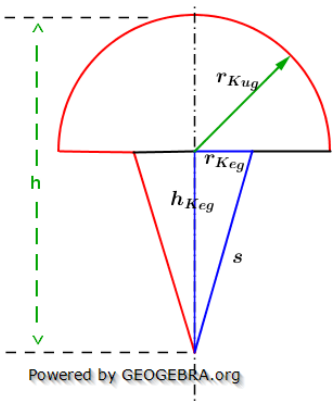
$\overline{AF}$: $\quad \overline{AF} = r + h_a = 5{,}1 + 4{,}13 = 9{,}23$

A_{AFS}: $\quad A_{AFS} = \frac{1}{2} \cdot h_s \cdot \overline{AF} \cdot sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 8{,}4 \cdot 9{,}23 \cdot sin60{,}55° = 33{,}76$

Das Dreieck AFS hat einen Flächeninhalt von $33{,}8\ cm^2$.

Lösung W2b/2009

Lösungslogik



Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus der Oberfläche der Halbkugel, dem Mantel des Kegels sowie einem Kreisring mit dem äußeren Radius r_{Kug} und dem inneren Radius r_{Keg}.
Die Skizze ist ein „Achsenschnitt", der gegebene Flächeninhalt A_{Ges} ist also die Fläche eines Halbkreises mit dem Radius r_{Kug} und einem Dreieck mit der Grundseite $2 \cdot r_{Keg}$ und der Höhe h_{Keg}.
Berechnung von h_{Keg}.
Berechnung von $A_{Halbkreis}$ mit Radius r_{Kug}.
Berechnung von h_{Keg} aus der Differenz von h und r_{Kug}.
Berechnung von $A_{Dreieck}$.über die Differenz aus A_{Ges} und $A_{Halbkreis}$.
Berechnung von r_{Kug} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Oberfläche der Halbkugel.
Berechnung der Mantelfläche des Kegels.
Berechnung der Fläche des Kreisrings.
Berechnung der Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Klausuraufschrieb

A_{HK}: $\quad A_{HK} = \frac{1}{2}\pi r_{Kug}^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 5{,}4^2 = 45{,}80$

h_{Keg}: $\quad h_{Keg} = h - r_{Kug} = 13{,}6 - 5{,}4 = 8{,}2$

$A_{Dreieck}$: $\quad A_{Dreieck} = A_{Ges} - A_{HK} = 60 - 45{,}80 = 14{,}2$

r_{Keg}: $\quad A_{Dreieck} = r_{Kug} \cdot h_{Kug} \quad | \quad : h_{Kug}$

$r_{Keg} = \frac{A_{Dreieck}}{h_{Keg}} = \frac{14{,}2}{8{,}2} = 1{,}73$

s: $\quad s = \sqrt{h_{Keg}^2 + r_{Keg}^2} = \sqrt{8{,}2^2 + 1{,}73^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{70{,}2329} = 8{,}38$

O_{HK}: $\quad O_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r_{Kug}^2 = 2\pi \cdot 5{,}4^2 = 183{,}22$

M_{Keg}: $\quad M_{Keg} = \pi r_{keg} s = \pi \cdot 1{,}73 \cdot 8{,}38 = 45{,}55$

$O_{Kreisring}$: $\quad O_{Kreisring} = \pi(r_{kug}^2 - r_{keg}^2) = \pi \cdot (5{,}4^2 - 1{,}73^2) = 82{,}21$

$O_{Körper}$: $\quad O_{Körper} = O_{HK} + M_{Keg} + O_{Kreisring} = 183{,}22 + 45{,}55 + 82{,}21 = 310{,}98$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $311\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3a/2009

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die beiden Punkte A und B.
Umformung der Parabelgleichung p_1 in die Scheitelpunktgleichung.
Berechnung des Scheitelpunkts S_2 von p_2 durch die angegebene Verschiebung.
Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den Scheitelpunkt S_2 und Umformung in die allgemeine Parabelgleichung.
Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.
Berechnung der Entfernung $\overline{PS_2}$ mit dem Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p_1 durch A und B:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1) $6 = 9 + 3p + q$ | Punktprobe mit $A(3|6)$

(2) $11 = 16 + 4p + q$ | Punktprobe mit $B(4|11)$

(2)-(1) $5 = 7 + p$

$p = -2$

$p \longrightarrow (1)$

$6 = 9 + 3 \cdot (-2) + q$

$q = 3$

p_1: $y = x^2 - 2x + 3$

Scheitelpunktgleichung von p_1:

$y = (x-1)^2 + 2$ | quadratische Ergänzung

$S_1(1|2)$

Verschiebung von S_1 nach S_2:

S_2: $S_2(1-5|2-5)$

$S_2(-4|-3)$

Funktionsgleichung von p_2:

p_2: $y = (x+4)^2 - 3$ | Scheitelpunktgleichung von p_2

$y = x^2 + 8x + 13$ | allgemeine Parabelgleichung p_2

Schnittpunkt von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$x^2 - 2x + 3 = x^2 + 8x + 13$ | $-x^2;\ -2x;\ -3$

$10x + 10 = 0$

$x_S = -1$

$x_S \longrightarrow p_1$

$y_s = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 6$

Der Schnittpunkt von p_1 mit p_2 hat die Koordinaten $P(-1|6)$.

Länge der Strecke $\overline{PS_2}$:

$\overline{PS_2}$: $\overline{PS_2} = \sqrt{\left(x_p - x_{S_2}\right)^2 + \left(y_p - y_{S_2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$= \sqrt{\left(-1-(-4)\right)^2 + \left(6-(-3)\right)^2}$

$\overline{PS_2} = \sqrt{3^2+9^2} = \sqrt{90} = 9{,}54$

Die Länge der Strecke $\overline{PS_2}$ beträgt $9{,}5\ LE$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W3b/2009

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p über die Scheitelpunktgleichung.
Berechnung der y–Koordinate von Punkt P.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Berechnung der Fläche des Dreiecks ABP.
Bestimmung der Punkte P_1 und P_2 auf der Parabel, die zusammen mit den Punkten A und B ein Dreieck mit Flächeninhalt $20{,}5\ FE$ bilden.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung von p über Scheitel $S(4|-2)$:

p: $y = (x-4)^2 - 2$ | Scheitelpunktgleichung p

$y = x^2 - 8x + 14$ | allgemeine Parabelgleichung p

y-Koordinate von P:

y_P: $y_P = 2^2 - 8 \cdot 2 + 14 = 2$

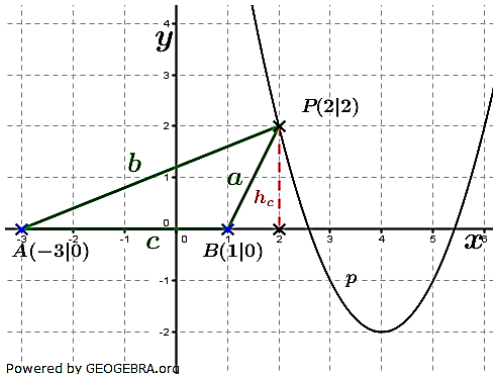
Dreieck ABP:

A_{ABP}: $A_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$c = 4;\ h_c = 2$

$A_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4\ FE$

Das Dreieck ABP hat einen Flächeninhalt von $4\ FE$.



$P_1; P_2$: Der Flächeninhalt soll $20{,}5\ FE$ sein. Die Grundseite c des Dreiecks bleibt unverändert, folglich muss sich h_c ändern. h_c^* ist jedoch die y–Koordinate der Punkte P_1 und P_2 auf der Parabel.

$20{,}5 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c^*$

$h_c^* = x^2 - 8x + 14$

$20{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (x^2 - 8x + 14)$ | $:2$

$10{,}25 = x^2 - 8x + 14$ | $-10{,}25$

$x^2 - 8x + 3{,}75 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 3{,}75}$

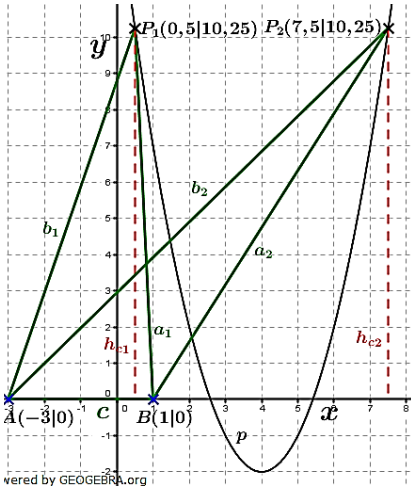
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{12{,}25} = 4 \pm 3{,}5$

$x_1 = 7{,}5;\ x_2 = 0{,}5$

$y_1 = 7{,}5^2 - 8 \cdot 7{,}5 + 14 = 10{,}25$

$y_2 = 0{,}5^2 - 8 \cdot 0{,}5 + 14 = 10{,}25$

$P_1(0{,}5|10{,}25)$; $P_2(7{,}5|10{,}25)$



Die Punkte $P_1(0{,}5|10{,}25)$ und $P_2(7{,}5|10{,}25)$ bilden zusammen mit den Punkten A und B ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $20{,}5\ FE$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2009

Lösungslogik

Aufstellung einer 6-Zeilen-6-Spaltentabelle mit Eintragung der Elementarereignisse in die einzelnen Tabellenelemente.
Ermittlung der gefragten Wahrscheinlichkeiten aus der Anzahl möglicher Elementarereignisse in der Tabelle.

Klausuraufschrieb

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

$P(Augensumme < 5) = P\{(1;1),(1:2),(2;1),(2,2);(1,3),(3,1)\}$

Die Wahrscheinlichkeit jedes Einzelelements der Tabelle beträgt $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, somit ist

$$P(Augensumme < 5) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$$

$$P(kein\ Pasch) = 1 - P(Pasch) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\ \%$$

$$p = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

$$P(Augensumme < 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

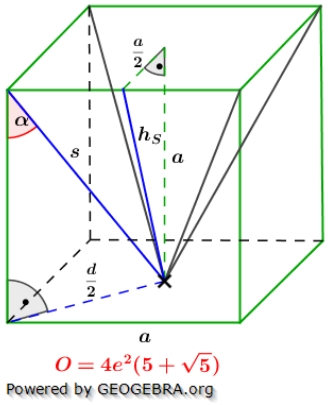
$$P(Augensumme > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4b/2009

Lösungslogik

Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus fünf Seitenflächen des Würfels (die sechste Seitenfläche oben ist offen und damit nicht vorhanden) sowie dem Mantel der „ausgearbeiteten" Pyramide).
Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Mantels der Pyramide.
Berechnung der 5 Seitenflächen des Würfels.
Berechnung der Oberfläche des Körpers.
Berechnung der Diagonalen des Würfelquadrats und daraus $\frac{d}{2}$.
Bestimmung von s über den Satz des Pythagoras.
Bestimmung von $cos\alpha$.



Klausuraufschrieb

h_S: $h_S = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e)^2 + e^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_S = \sqrt{5e^2} = e\sqrt{5}$

M_{Pyr}: $M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 2e \cdot e\sqrt{5} = 4e^2\sqrt{5}$

$O_{Würfel}$: $O_{Würfel} = 5a^2 = 5 \cdot (2e)^2 = 20e^2$

O: $O = O_{Würfel} + M_{Pyr} = 20e^2 + 4e^2\sqrt{5} = 4e^2(5+\sqrt{5})$ **q.e.d.**

d: $d = a \cdot \sqrt{2} = 2e\sqrt{2} \Longrightarrow \frac{d}{2} = e\sqrt{2}$

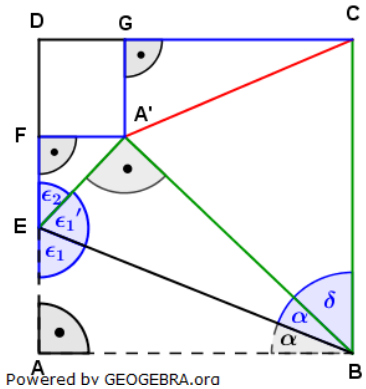
s: $s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e)^2 + \left(e\sqrt{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{4e^2 + 2e^2} = \sqrt{6e^2} = e\sqrt{6}$

$cos\alpha$: $cos\alpha = \frac{a}{s} = \frac{2e}{e\sqrt{6}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ **q.e.d.**

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von ϵ_1 über den tan. Durch das Umklappen ist $\epsilon_1 = \epsilon_1{}'$.
Berechnung von ϵ_2 über $180° - 2 \cdot \epsilon_1$.
Berechnung von $\overline{A'F}$ über den $sin\epsilon_2$, $\overline{DG}$ ist gleich lang wie $\overline{A'F}$.
Berechnung von $\overline{FE}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{DF}$ über $\overline{DA} - (\overline{AE} + \overline{FE})$, die Strecke $\overline{GA'}$ ist gleich lang wie $\overline{DF}$.
Berechnung von $\overline{A'C}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

ϵ_1: $tan\epsilon_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{10{,}0}{4{,}0}$

$\epsilon_1 = tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 68{,}2°$

ϵ_2: $\epsilon_1' = \epsilon_1 \Longrightarrow \epsilon_2 = 180° - 2 \cdot \epsilon_1$

$\epsilon_2 = 180° - 136{,}4° = 43{,}6°$

$\overline{A'F}$: $\quad sin\epsilon_2 = \frac{\overline{A'F}}{\overline{EA'}} \quad | \quad \cdot \overline{EA'}$

$\overline{A'F} = \overline{EA'} \cdot sin\epsilon_2 = 4{,}0 \cdot sin(43{,}6°) = 2{,}76$

$\overline{GD}$: $\quad \overline{GD} = \overline{A'F} = 2{,}76$

$\overline{CG}$: $\quad \overline{CG} = \overline{CD} - \overline{GD} = 10 - 2{,}76 = 7{,}24$

$\overline{FE}$: $\quad \overline{FE} = \sqrt{\overline{A'E}^2 - \overline{A'F}^2} = \sqrt{4^2 - 2{,}76^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{FE} = \sqrt{8{,}3824} = 2{,}8952$

$\overline{DF}$: $\quad \overline{DF} = \overline{DA} - \left(\overline{AE} + \overline{FE}\right) = 10 - (4 + 2{,}8952) = 3{,}1048$

$\overline{GA'} = \overline{DF} = 3{,}1048$

$\overline{A'C}$: $\quad \overline{A'C} = \sqrt{\overline{GA'}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{3{,}1048^2 + 7{,}24^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{A'C} = \sqrt{62{,}0574} = 7{,}8777$

Die Strecke $\overline{A'C}$ ist $7{,}9\ cm$ lang.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de