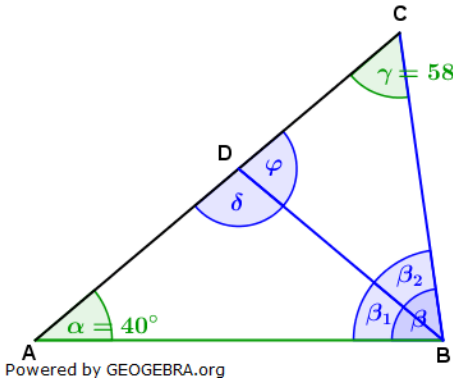
Lösung W1a/2011

<u>Lösungslogik</u> (einfach)

Bestimmung von β_1, δ, φ und β_2.
Berechnung von $\overline{BD}$ über den Sinussatz.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den Sinussatz.
Berechnung von A_{BCD} über den trigonometrischen Flächeninhalt.



<u>Klausuraufschrieb</u>

β_1: $\beta_1 = \alpha = 40°$ (gleichschenkliges Dreieck)

δ: $\delta = 180° - 40° - 40° = 100°$

φ: $\varphi = 180° - \delta = 180° - 100° = 80°$

β_2: $\beta_2 = 180° - \gamma - \varphi = 180° - 58° - 80°$

$\beta_2 = 42°$

$\overline{BD}$: $\frac{\overline{BD}}{sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{sin\delta}$ | $\cdot sin\alpha$ | Sinussatz

$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{sin\delta} \cdot sin\alpha$

$\overline{BD} = \frac{10{,}8}{sin100°} \cdot sin40° = 7{,}05$

$\overline{BC}$: $\frac{\overline{BC}}{sin\varphi} = \frac{\overline{BD}}{sin\gamma}$ | $\cdot sin\varphi$ | Sinussatz

$\overline{BC} = \frac{\overline{BD}}{sin\gamma} \cdot sin\varphi$

$\overline{BC} = \frac{7{,}05}{sin58°} \cdot sin80° = 8{,}19$

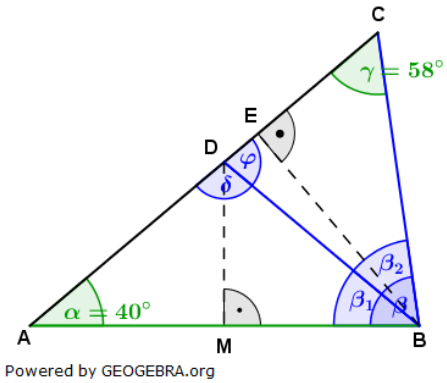
A_{BCD}: $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot sin\beta_2$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}05 \cdot 8{,}19 \cdot sin42° = 19{,}32$

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCD beträgt $19{,}3\ cm^2$.

<u>Lösungslogik</u> (umständlich)

Berechnung von $\overline{BD}$ über den $cos\beta_1$. Hierzu
Berechnung von β_1 über gleichschenkliges Dreieck ABD und $\overline{MB}$ als halbe Strecke $\overline{AB}$.
Berechnung von $\overline{BE}$ über den $sin\varphi$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den $sin\gamma$.
Berechnung von β_2 als Ergänzungswinkel zu φ und γ im Dreieck BCD.
Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks BCD über den trigonometrischen Flächeninhalt.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{BD}$: $cos\beta_1 = \frac{\overline{MB}}{\overline{BD}}$ | $\cdot \overline{BD};\ cos\beta_1$

$\overline{BD} = \frac{\overline{MB}}{cos\beta_1}$

β_1: $\beta_1 = \alpha = 40°$ (gleichschenkliges Dreieck ABD)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overline{MB}$: $\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = 5{,}4$ (gleichschenkliges Dreieck ABD)

$\overline{BD} = \frac{5{,}4}{cos40°} = 7{,}05$

$\overline{BE}$: $sin\varphi = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$ | $\cdot \overline{BD}$

$\overline{BE} = \overline{BD} \cdot sin\varphi$

δ: $\delta = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 80° = 100°$ (gleichschenkliges Dreieck ABD)

φ: $\varphi = 180° - \delta = 180° - 100° = 80°$

$\overline{BE} = 7{,}05 \cdot sin80° = 6{,}94$

$\overline{BC}$: $sin\gamma = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC};\ : sin\gamma$

$\overline{BC} = \frac{\overline{BE}}{sin\gamma} = \frac{6{,}94}{sin58°} = 8{,}18$

β_2: $\beta_2 = 180° - \gamma - \varphi = 180° - 58° - 80°$

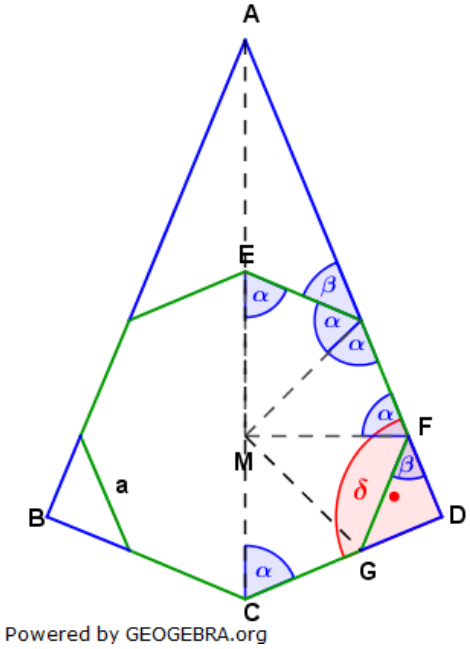
$\beta_2 = 42°$

A_{BCD}: $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot sin\beta_2$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}05 \cdot 8{,}18 \cdot sin42° = 19{,}29$

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCD beträgt $19{,}3\ cm^2$.

Lösung W1b/2011



Lösungslogik

Bestimmung von α über die Eckwinkel im Achteck.
Bestimmung von β als Ergänzungswinkel zu $180°$.
Berechnung von $\overline{GD}$ über $sin\beta$.
Berechnung von $\overline{CD}$ aus der Summe von a und $\overline{GD}$.
Berechnung von $\overline{AD}$ über $tan\alpha$.
Berechnung von u_{ABCD}.

Klausuraufschrieb

α: $2 \cdot n \cdot \alpha = n \cdot 180° - 360°$ (Winkelsumme im n-Eck)

$2 \cdot 8 \cdot \alpha = 8 \cdot 180° - 360° = 1080$

$\alpha = \frac{1080}{16} = 67{,}5°$

β: $\beta = 180° - 2 \cdot \alpha = 180° - 135° = 45°$

δ: $\delta = 180° - 2 \cdot \beta = 90°$ q.e.d.

$\overline{GD}$: $sin\beta = \frac{\overline{GD}}{a}$ | $\cdot a$

$\overline{GD} = a \cdot sin\beta = 6{,}2 \cdot sin45° = 4{,}38$

$\overline{CD}$: $\overline{CD} = a + \overline{GD} = 6{,}2 + 4{,}38 = 10{,}58$

$\overline{AD}$: $tan\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$ | $\cdot \overline{CD}$

$\overline{AD} = \overline{CD} \cdot tan\alpha = 10{,}58 \cdot tan67{,}5° = 25{,}54$

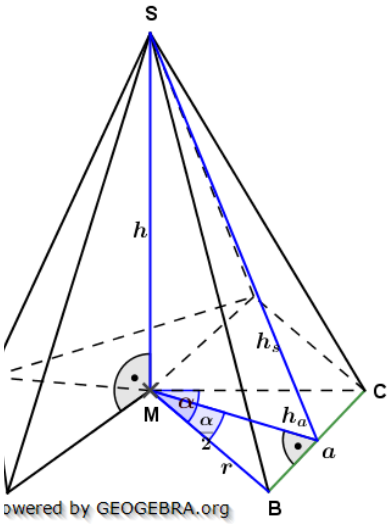
u_{ABCD}: $u_{ABCD} = 2 \cdot (\overline{AD} + \overline{CD}) = 2 \cdot 36{,}12 = 72{,}24$

Der Umfang des Vierecks $ABCD$ beträgt $72{,}2\ cm$.

Lösung W2a/2011

Lösungslogik

Wir berechnen zunächst die Oberfläche der massiven Pyramide mit $O_{Pyr} = G + M$. Die Grundfläche (regelmäßiges Fünfeck) ergibt sich aus $G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin\alpha$ (siehe Formelsammlung).
Hierzu berechnen wir α, $\frac{\alpha}{2}$ und r über den $sin\frac{\alpha}{2}$ Wir berechnen dann h über die Volumenformel der Pyramide.
Für den Mantel benötigen wir h_S.
Berechnung von h_a über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von M über 5 mal den Flächeninhalt eines Seitendreiecks.
Berechnung von O_{Pyr} aus der Summe von G und M.



Der ausgeschnittene Teil nimmt $\frac{1}{5}$ von O_{Pyr} weg, hinzu kommt jedoch zweimal der Flächeninhalt des Dreiecks BMS.
Berechnung von A_{BMS} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von O_{Neu}.

Klausuraufschrieb

$O_{Pyr} = G + M$

α: $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ hieraus $\frac{\alpha}{2} = 36°$

r: $sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r}$ | $\cdot r;\ :sin\frac{\alpha}{2}$

$r = \frac{\frac{a}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{3{,}5}{sin36°} = 5{,}95$

G: $G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin\alpha = 2{,}5 \cdot 5{,}95^2 \cdot sin72°$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$G = 84{,}17$

h: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ | $\cdot 3;\ :G$

$h = \frac{3 \cdot V_{Pyr}}{G} = \frac{3 \cdot 329}{84{,}17} = 11{,}73$

h_a: $h_a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5{,}95^2 - 3{,}5^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_a = \sqrt{23{,}1525} = 4{,}81$

h_s: $h_s = \sqrt{h^2 + h_a^2} = \sqrt{11{,}73^2 + 4{,}81^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_s = \sqrt{160{,}729} = 12{,}68$

A_{BCS}: $A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 12{,}68 = 44{,}83$

M: $M = 5 \cdot A_{BCS} = 5 \cdot 44{,}83 = 221{,}9$

O_{Pyr}: $O_{Pyr} = 84{,}17 + 221{,}9 = 306{,}07$

A_{BMS}: $A_{BMS} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5{,}95 \cdot 11{,}73 = 34{,}90$

O_{Neu}: $O_{Neu} = \frac{4}{5} \cdot O_{Pyr} + 2 \cdot A_{BMS} = \frac{4}{5} \cdot 306 + 2 \cdot 34{,}9 = 314{,}60$

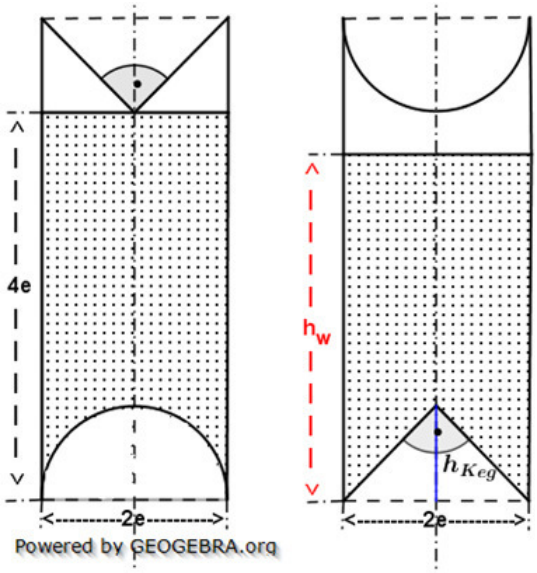
Die Oberfläche des entstandenen Körpers beträgt $314{,}6\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W2b/2011

Lösungslogik

Benötigt wird zunächst das Volumen des Wassers im nicht gedrehten Zustand. Dieses Volumen ist dann gleichzusetzen mit dem Volumen, welches sich im gedrehten Zustand bei einer Wasserhöhe h_W ergibt.



Für das Volumen des Wassers im nicht gedrehten Zustand berechnen wir:

- Volumen des Zylinders V_{Zyl} bis zur Füllhöhe $4e$.
- Volumen der Halbkugel V_{HK} mit Radius e.
- Volumen des Wassers V_W aus der Differenz von V_{Zyl} und V_{HK}.

Für den gedrehten Zustand berechnen wir:

- Volumen des Zylinders V_{Zyl_g} bis zur Füllhöhe h_W.
- Berechnung von h_{keg}.
- Berechnung des Volumens des Kegels V_{Keg} mit Radius e und Höhe h_{Keg} .
- Berechnung des Volumens des Wassers V_{W_g}.
- Gleichsetzung von V_{W_g} und V_W.
- Berechnung der Höhe des Wasserstandes h_W im gedrehten Zustand.

Klausuraufschrieb

V_{Zyl}:	$V_{Zyl} = \pi r^2 h = \pi \cdot e^2 \cdot 4e = 4\pi e^3$		
V_{HK}:	$V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot e^3$		
V_W:	$V_W = V_{Zyl} - V_{HK} = 4\pi e^3 - \frac{2}{3}\pi e^2 = \frac{12}{3}\pi e^3 - \frac{2}{32}\pi e^3 = \frac{10}{3}\pi e^3$		
V_{Zyl_g}:	$V_{Zyl_g} = \pi r^2 \cdot h_w = \pi e^2 h_w$		
h_{Keg}:	$h_{Keg} = r_{Keg} = e$	|	Wegen 90° Spitzenwinkel des Kegels
V_{Keg}:	$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot e \cdot e = \frac{1}{3}\pi e^3$		
V_{W_g}:	$V_{W_g} = V_W = V_{Zyl_g} - V_{Keg}$		
	$\frac{10}{3}\pi e^3 = \pi e^2 h_w - \frac{1}{3}\pi e^3$	|	$+\frac{1}{3}\pi e^3$
	$\frac{11}{3}\pi e^3 = \pi e^2 h_w$	|	$:\pi e^2$
	$h_w = \frac{11}{3} e$		**q.e.d.**

Lösung W3a/2011

Lösungslogik

Aufstellung der Parabelgleichung p_1 durch die Punkte A und B.
Untersuchung auf Schnittpunkte durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Aufstellung einer Geradengleichung g, die weder p_1 noch p_2 schneidet.

Klausuraufschrieb

p_2: $y = -x^2 + 2$

Funktionsgleichung von p_1 durch A und B:

p_1: $y = x^2 + px + q$

(1)	$5 = 1 + p + q$	|	Punktprobe mit $A(1\|5)$
(2)	$10 = 36 + 6p + q$	|	Punktprobe mit $B(6\|10)$
(1)-(2)	$-5 = -35 - 5p$		
	$5p = -30$	|	$:5$
	$p = -6$		

$p \longrightarrow (1)$

$5 = 1 - 6 + q$	|	$+5$
$q = 10$		

p_1: $y = x^2 - 6x + 10$

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$x^2 - 6x + 10 = -x^2 + 2$	|	$+x^2;\ -2$
$2x^2 - 6x + 8 = 0$	|	$:2$
$x^2 - 3x + 4 = 0$	|	p/q-Formel
$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 4} = 1{,}5 \pm \sqrt{-1{,}75}$		

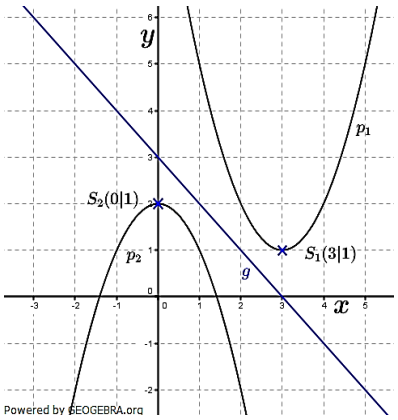
Wegen $\sqrt{-1{,}75}$ ist die Gleichung nicht lösbar, p_1 und p_2 haben keine gemeinsamen Punkte.

Geradengleichung g ohne Schnittpunkte mit p_1 und p_2:

g: $y = mx + b$

Wie aus der Graphik ersichtlich, muss die Gerade zwischen den beiden Parabeln hindurch verlaufen. Dies ist beispielsweise für $m = -1$ und $b = 3$ der Fall.

g: $y = -x + 3$ *(andere Lösungen denkbar)*



Lösung W3b/2011

Lösungslogik

Berechnung der Koordinaten von N_1 und N_2 als Nullstellen von p durch Setzen von y auf 0.
Aufstellung der Geradengleichung g mit $m = -2$ durch die rechte Nullstelle von p.
Berechnung von Q durch Gleichsetzung von p mit g.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks N_1N_2Q.
Untersuchung und Bestimmung der Lage von Q für maximalen Inhalt des Dreiecks N_1N_2Q.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

Nullstellen von p:

p: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$

$0 = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$ | Schnittpunkte mit der x–Achse über $y = 0$

$\frac{1}{2}x^2 = 4{,}5.$

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 3$

$N_1(-3|0)$; $N_2(3|0)$ | N_2 somit rechte Nullstelle

Geradengleichung g durch N_2 mit $m = -2$:

g: $y = -2x + b$

$0 = -2 \cdot 3 + b$ | Punktprobe mit $N_2(3|0)$

$b = 6$

g: $y = -2x + 6$

Schnittpunkte von p mit g:

$p \cap g$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5 = -2x + 6$ | $+2x$; -6

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1{,}5 = 0$ | $\cdot(-2)$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ | p/q-Formel

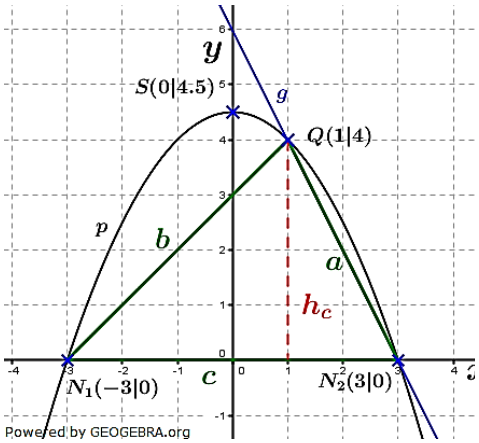
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$

$x_1 = 3$; $x_2 = 1$

$x_2 \longrightarrow g$:

$y_2 = -2 \cdot 1 + 6 = 4$

Der zweite Schnittpunkt hat die Koordinaten $Q(1|4)$.



Fläche des Dreiecks N_1N_2Q:

$A_{N_1N_2Q}$: $A_{N_1N_2Q} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$c = 6$; $h_c = 4$

$A_{N_1N_2Q} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12\,FE$

Das Dreieck N_1N_2Q hat einen Flächeninhalt von $12\,FE$.

Lage von Q für maximalen Flächeninhalt:

Die Basis c des Dreiecks bleibt unverändert. Sein Flächeninhalt wird somit durch die Länge der Höhe h_c bestimmt. h_c ist dann am größten, wenn Q in den Scheitel S wandert.

Für $Q(0|4{,}5)$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2Q maximal.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2011

Lösungslogik

Aufgabe zum Erwartungswert.
Aufstellen einer Tabelle aus drei Zeilen mit drei Spalten, die ersten zwei Spalten für die Gewinnsituationen, die dritte Spalte für die Niete.
Eintragung der jeweiligen Gewinne **abzüglich** Lospreis in die ersten beiden Spalten der ersten Zeile. Eintragung des Lospreises mit negativem Vorzeichen in die dritte Spalte der ersten Zeile.
Eintragung der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne in die ersten beiden Spalten der zweiten Zeile, Wahrscheinlichkeit für die Nieten in der dritten Spalte der zweiten Zeile.
Spalten der Zeile eins und zwei vorzeichengerecht multiplizieren und in die Spalten der dritten Zeile eintragen.
Vorzeichengerechte Addition der Spalteninhalte der dritten Zeile ergibt den Erwartungswert.
Neuberechnung des Erwartungswertes mit erhöhter Losanzahl.
Berechnung des Betrages, der gespendet werden kann über die Multiplikation von Anzahl der Lose mit dem Betrag des Erwartungswertes.

Klausuraufschrieb

$P(20\text{ €}) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ $\quad P(4\text{ €}) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$ $\quad P(-2\text{ €}) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$

Berechnung der Erwartungswerte:

18 €	2 €	$-2{,}00\text{ €}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
$0{,}90\text{ €}$	$0{,}40\text{ €}$	$-1{,}50\text{ €}$

$EX = 0{,}9 + 0{,}40 - 1{,}50 = -0{,}20\text{ €}$

Neuberechnung nach Erhöhung der Losanzahl:

$P(20\text{ €}) = \frac{10}{250} = \frac{1}{25}$ $\quad P(4\text{ €}) = \frac{40}{250} = \frac{4}{25}$ $\quad P(-2\text{ €}) = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}$

Berechnung der Erwartungswerte

18 €	2 €	$-2{,}00\text{ €}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}$
$0{,}72\text{ €}$	$0{,}32\text{ €}$	$-1{,}60\text{ €}$

$EX = 0{,}72 + 0{,}32 - 1{,}60 = -0{,}56\text{ €}$

Verkauf aller Lose:

$G = n \cdot |EX| = 250 \cdot 0{,}56 = 140\text{ €}$

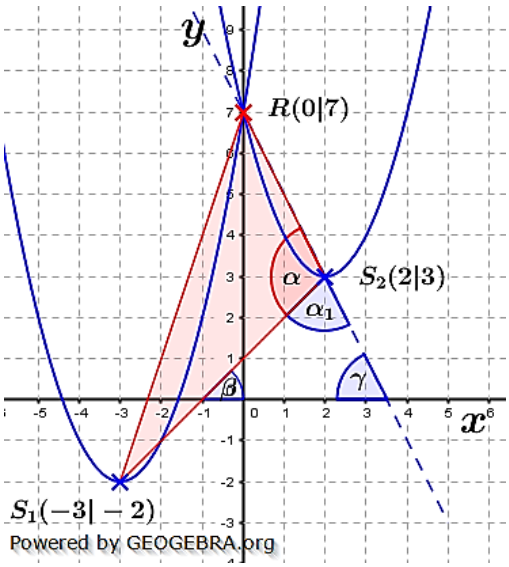
Die Schüler der Abschlussklasse können 140 € *spenden, wenn alle Lose verkauft werden.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4b/2011

Lösungslogik

Wir stellen die Scheitelpunktgleichung der Parabel p_1 auf und formen diese um in die allgemeine Form der Parabel.
Wir bestimmen den Scheitelpunkt von p_2.
Wir zeichnen die beiden Parabeln in ein Koordinatensystem und verbinden die Punkte S_1, S_2 und R zu einem Dreieck.
Aus der Zeichnung lesen wir ab, dass der stumpfe Winkel bei S_2 liegt.
Wir berechnen β über den tan.
Wir berechnen γ über den tan.
Wir berechnen α_1 über die Winkelsumme im Dreieck.
Wir berechnen α über $180° - \alpha_1$.



Klausuraufschrieb

Parabelgleichung von p_1:

p_1: $y = (x+3)^2 - 2$ | Scheitelpunktgleichung mit $S_1(-3|-2)$

$y = x^2 + 6x + 7$ | allgemeine Gleichung von p_1

Scheitelpunkt von p_2:

S_2: $y = x^2 - 4x + 7$

$y = (x-2)^2 - 4 + 7$ | quadratische Ergänzung

$y = (x-2)^2 + 3$

$S_2(2|3)$

Winkelberechnungen:

β: $tan\beta = m_{S_1S_2} = \frac{3-(-2)}{2-(-3)} = 1$

$\beta = \tan^{-1}(1) = 45°$

γ: $tan\gamma^* = m_{RS_2} = \frac{3-7}{2-0} = -2$

$\gamma^* = \tan^{-1}(-2) = -63{,}43°$ | dies ist der nach unten geöffnete spitze Winkel, den die Gerade durch R und S_2 mit der x–Achse bildet.

$\gamma = |\gamma^*| = 63{,}43\,°$

α_1: $\alpha_1 = 180° - 45° - 63{,}43° = 71{,}57°$

α: $\alpha = 180° - \alpha_1 = 180° - 71{,}57° = 108{,}43°$

Der Winkel S_1S_2R hat $108{,}43\,°$, ist also stumpf.