

### Lösung W1a/2012

#### Lösungslogik

Berechnung von  $\overline{CE}$  über  $\sin\beta$ .

Berechnung von  $A_{ABCD}$  über die Flächenformel des Trapezes.

Bestimmung von  $A_{PBCD}$ .

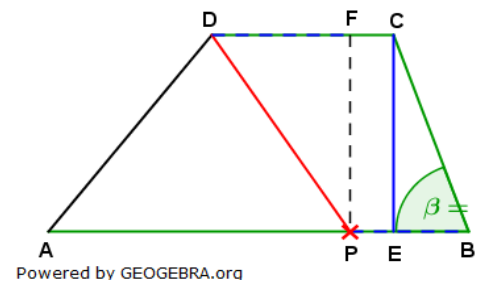
Berechnung von  $\overline{PB}$  über die Flächenformel des Trapezes.

Berechnung von  $\overline{EB}$  über den Satz des Pythagoras.

Berechnung von  $\overline{PE}$  als Differenz von  $\overline{PB}$  und  $\overline{EB}$ .

Berechnung von  $\overline{DF}$  als Differenz von  $\overline{CD}$  und  $\overline{PE}$ .

Berechnung von  $\overline{DP}$  über den Satz des Pythagoras.



#### Klausuraufschrieb

$$\overline{CE}: \quad \sin\beta = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \sin\beta$$

$$\overline{CE} = \overline{BC} \cdot \sin\beta = 4,8 \cdot \sin 70^\circ = 4,51$$

$$A_{ABCD}: \quad A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot (9,2 + 4,1) \cdot 4,51 = 30,0$$

$$A_{PBCD}: \quad A_{PBCD} = \frac{A_{ABCD}}{2} = 15,0$$

$$\overline{PB}: \quad A_{PBCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{PB} + \overline{CD}) \cdot \overline{CE} = 15,0 \quad | \quad \cdot \overline{CD}$$

$$30 = (\overline{PB} + 4,0) \cdot 4,51 \quad | \quad : 4,51; -4,0$$

$$\overline{PB} = \frac{30}{4,51} - 4,0 = 2,65$$

$$\overline{EB}: \quad \overline{EB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{4,8^2 - 4,51^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{EB} = \sqrt{2,6999} = 1,64$$

$$\overline{PE}: \quad \overline{PE} = \overline{PB} - \overline{EB} = 2,65 - 1,64 = 1,01$$

$$\overline{DF}: \quad \overline{DF} = \overline{CD} - \overline{PE} = 4,0 - 1,01 = 2,99$$

$$\overline{DP}: \quad \overline{DP} = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{CE}^2} = \sqrt{2,99^2 + 4,51^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{DP} = \sqrt{29,2802} = 5,41$$

Die Strecke  $\overline{DP}$  ist 5,4 cm lang.

#### Lösung W1b/2012

##### Lösungslogik

- Berechnung von  $\overline{AB}$  über den  $\tan 30^\circ$ .
- Berechnung von  $\overline{BE}$  über den  $\sin 30^\circ$ .
- Berechnung von  $\overline{CE}$  über den  $\cos 30^\circ$ .
- Berechnung von  $\overline{BD}$  über den  $\cos 30^\circ$ .
- Berechnung von  $\overline{ED}$ .
- Berechnung von  $\overline{CD}$  über den Satz des Pythagoras.

##### Klausuraufschrieb

$$\overline{AB}: \quad \tan 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \tan 30^\circ = 6e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = 6e$$

$$\overline{BE}: \quad \sin 30^\circ = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{BE} = \overline{BC} \cdot \sin 30^\circ = 6e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3e\sqrt{3}$$

$$\overline{CE}: \quad \cos 30^\circ = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{CE} = \overline{BC} \cdot \cos 30^\circ = 6e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 9e$$

$$\overline{BD}: \quad \cos 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \quad | \quad \cdot \overline{BD}; \quad : \cos 30^\circ$$

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{\cos 30^\circ} = \frac{6e}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{12e}{\sqrt{3}} \quad | \quad \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ (Nenner rational machen)}$$

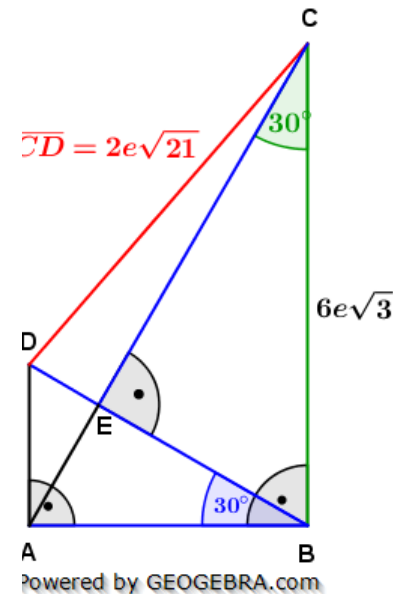
$$\overline{BD} = \frac{12e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 4e\sqrt{3}$$

$$\overline{ED}: \quad \overline{ED} = \overline{BD} - \overline{BE} = 4e\sqrt{3} - 3e\sqrt{3} = e\sqrt{3}$$

$$\overline{CD}: \quad \overline{CD} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{ED}^2} = \sqrt{(9e)^2 + (e\sqrt{3})^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{81e^2 + 3e^2} = \sqrt{84e^2} = \sqrt{84}e = e\sqrt{4 \cdot 21} = 2e\sqrt{21}$$

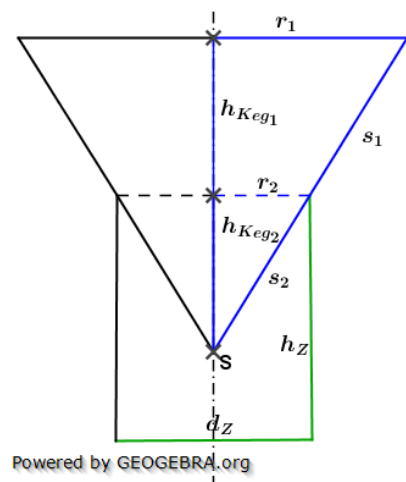
$$\overline{CD} = 2e\sqrt{21} \quad \mathbf{q.e.d.}$$



#### Lösung W2a/2012

##### Lösungslogik

- Durch das Eintauchen der Kegelspitze gehen  $210 \text{ cm}^3$  Wasser verloren, also muss das Volumen der eingetauchten Kegelspitze gleich groß sein.
- Berechnung von  $r_2$ .
- Berechnung von  $h_{Keg_2}$  über die Volumenformel des Kegels.
- Berechnung des Abstandes der Kegelspitze  $a$  zur Grundfläche aus der Differenz von  $h_Z$  und  $h_{Keg_2}$ .
- Berechnung von  $s_2$  über den Satz des Pythagoras.
- Berechnung des Mantels der eingetauchten Kegelspitze über die Mantelformel des Zylinders.
- Berechnung von  $h_{Keg_1}$ .



- Berechnung von  $r_1$  über den 2. Strahlensatz.
- Berechnung von  $s_1$  über den 1. Strahlensatz.
- Berechnung des Mantels des gesamten Kegels über die Mantelformel des Kegels.
- Berechnung des Anteils der Mantelfläche des eingetauchten Kegels zur Gesamtmantelfläche.

#### Klausuraufschrieb

$$r_2: \quad r_2 = \frac{1}{2} \cdot d_Z = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$h_{Keg_2}: \quad V_{Keg_2} = \frac{1}{3} \pi r_{Keg_2}^2 \cdot h_{Keg_2} \quad | \quad \cdot 3; : (\pi \cdot r_{Keg_2}^2)$$

$$h_{Keg_2} = \frac{3 \cdot V_{Keg_2}}{\pi \cdot r_{Keg_2}^2} = \frac{3 \cdot 210}{\pi \cdot 5^2} = 8,0$$

$$a: \quad a = h_Z - h_{Keg_2} = 12 - 8,0 = 4$$

Der Abstand der Kegelspitze  $S$  zur Grundfläche beträgt 4 cm.

$$s_2: \quad s_2 = \sqrt{r_2^2 + h_{Keg_2}^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s_2 = 9,43$$

$$M_{Keg_2}: \quad M_{Keg_2} = \pi r_{Keg_2} \cdot s_2 = \pi \cdot 5 \cdot 9,43 = 148,13$$

$$h_{Keg_1}: \quad h_{Keg_1} = h_{Keg_2} = 8 \quad | \quad \text{gemäß Aufgabenstellung}$$

$$r_1: \quad \frac{r_1}{h_{Keg_1} + h_{Keg_2}} = \frac{r_2}{h_{Keg_2}} \quad | \quad \cdot (h_{Keg_1} + h_{Keg_2})$$

$$r_1 = \frac{r_2}{h_{Keg_2}} \cdot (h_{Keg_1} + h_{Keg_2}) = \frac{5}{8} \cdot 16 = 10$$

$$s_1: \quad \frac{s_1}{h_{Keg_1}} = \frac{s_2}{h_{Keg_2}} \quad | \quad \cdot h_{Keg_1}$$

$$s_1 = \frac{s_2}{h_{Keg_2}} \cdot h_{Keg_1} = \frac{9,43}{8} \cdot 8 = 9,43$$

$$M_{Keg}: \quad M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg_1} \cdot (s_1 + s_2) = \pi \cdot 10 \cdot 18,86 = 592,50$$

$$p \%: \quad p \% = \frac{m_{Keg_2}}{M_{Keg}} \cdot 100 = \frac{148,13}{592,50} \cdot 100 = 25 \%$$

Der prozentuale Anteil des Mantels im Wasser von der Gesamtmantelfläche des Kegels beträgt 25 %.

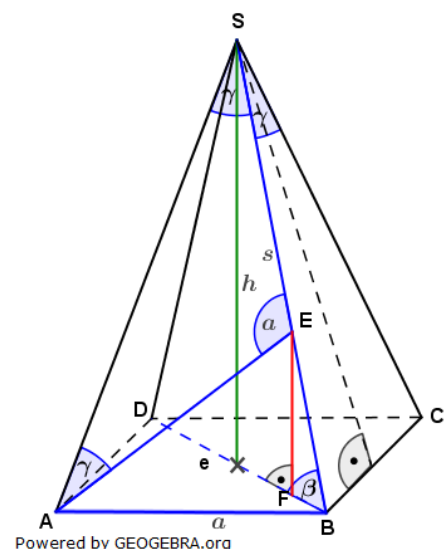
#### Lösung W2b/2012

##### Lösungslogik

- Berechnung von  $a$  über das gegebene Volumen.
- Berechnung der Diagonalen  $e$  der Grundfläche.
- Berechnung von  $s$  über den Satz des Pythagoras.
- Berechnung von  $\frac{\gamma}{2}$  über den  $\sin$ .
- Berechnung von  $\gamma$ .
- Berechnung von  $\alpha$  als Ergänzungswinkel im Dreieck  $AES$ .
- Berechnung von  $\overline{ES}$  über den Sinussatz.
- Berechnung von  $\overline{BE}$  als Differenz von  $s$  und  $\overline{ES}$ .
- Berechnung von  $\overline{EF}$  über den 2. Strahlensatz.

Alternativ:

- Berechnung von  $\beta$  über den  $\tan$ .
- Berechnung von  $\overline{EF}$  über den  $\sin$ .



Powered by GEOGEBRA.org

#### Klausuraufschrieb

$$a: \quad V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} a^2 \cdot h \quad | \quad \cdot 3; : h; \sqrt{\quad}$$

$$a = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 400}{12}} = 10$$

$$e: \quad e = a\sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,14$$

$$s: \quad s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 + 7,07^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s = 13,93$$

$$\frac{\gamma}{2}: \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{s} = \frac{5}{13,93} = 0,3589$$

$$\frac{\gamma}{2} = \sin^{-1}(0,3589) = 21,03^\circ$$

$$\gamma: \quad \gamma = 2 \cdot \gamma_1 = 2 \cdot 21,03^\circ = 42,06^\circ$$

$$\alpha: \quad \alpha = 180^\circ - 2 \cdot \gamma = 180^\circ - 2 \cdot 42,06^\circ = 95,88^\circ$$

$$\overline{ES}: \quad \frac{\overline{ES}}{\sin \gamma} = \frac{s}{\sin \alpha} \quad | \quad \text{Sinussatz}$$

$$\overline{ES} = \frac{s}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma = \frac{13,93}{\sin 96^\circ} \cdot \sin 42^\circ = 9,37$$

$$\overline{BE}: \quad \overline{BE} = s - \overline{ES} = 13,93 - 9,37 = 4,56$$

$$\overline{EF}: \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}} = \frac{h}{s} \quad | \quad \text{2. Strahlensatz}$$

$$\overline{EF} = \frac{h}{s} \cdot \overline{BE} = \frac{12}{13,93} \cdot 4,56 = 3,93$$

Der Abstand des Punktes  $E$  von der Grundfläche beträgt 3,9 cm.

Alternativ:

$$\beta: \quad \tan \beta = \frac{h}{\frac{e}{2}} = \frac{12}{7,07} = 1,6973$$

$$\beta = \tan^{-1}(1,6973) = 59,5^\circ$$

$$\overline{EF}: \quad \sin \beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}} \quad | \quad \cdot \overline{BE}$$

$$\overline{EF} = \overline{BE} \cdot \sin \beta = 4,56 \cdot \sin 59,5^\circ = 3,92$$

#### Lösung W3a/2012

##### Lösungslogik

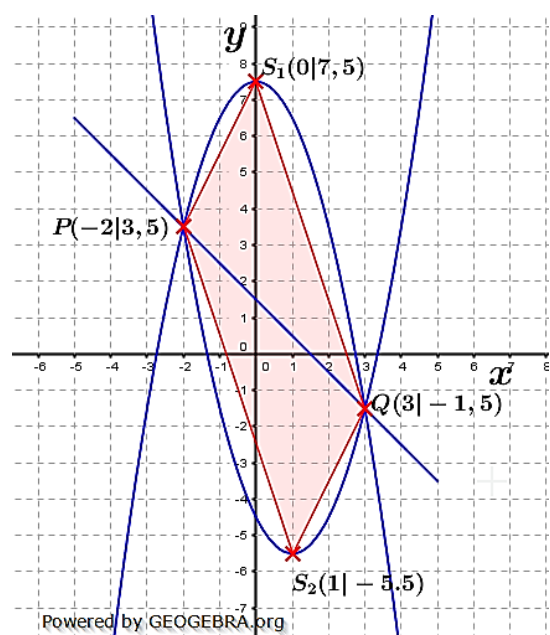
Berechnung der Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  durch Gleichsetzung von  $p_1$  mit  $g$ .

Aufstellung der Parabelgleichung  $p_2$  über Punktproben mit  $P$  und  $Q$ .

Berechnung der Scheitelpunkte von  $p_1$  und  $p_2$ .

Ermittlung der Steigungen der Geraden durch  $S_1$  und  $P$ ,  $S_2$  und  $Q$  sowie  $P$  und  $S_2$  und  $Q$  und  $S_1$ .

Das Viereck  $S_1PS_2Q$  ist dann ein Parallelogramm, wenn  $\overline{S_2Q} \parallel \overline{S_1P}$  und  $\overline{PS_2} \parallel \overline{QS_1}$  ist.



### Klausuraufschrift

Schnittpunkte von  $p_1$  mit  $g$ :

$$p_1 \cap g: \quad (1) \quad y = -x^2 + 7,5$$

$$(2) \quad y = -x + 1,5$$

$$(1)-(2) \quad 0 = -x^2 + x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

|  $\cdot -1$

|  $p/q$ -Formel

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 0,5 \pm \sqrt{6,25}$$

$$x_{1,2} = 0,5 \pm 2,5$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -2$$

$$x_1 \rightarrow g: \quad y_1 = -3 + 1,5 = -1,5$$

$$x_2 \rightarrow g: \quad y_2 = 2 + 1,5 = 3,5$$

$$P(-2|3,5); \quad Q(3|-1,5)$$

Parabelgleichung  $p_2$

$$p_2: \quad y = x^2 + bx + c$$

| allgemeine Parabelgleichung

$$(1) \quad 3,5 = 4 - 2b + c$$

| Punktprobe mit  $P(-2|3,5)$

$$(2) \quad -1,5 = 9 + 3b + c$$

| Punktprobe mit  $P(3|-1,5)$

$$(1)-(2) \quad 5 = -5 - 5b$$

$$b = -2$$

$$b \rightarrow (1): \quad 3,5 = 4 - 2 \cdot (-2) + c$$

$$3,5 = 4 + 4 + c$$

$$c = -4,5$$

$$p_2: \quad y = x^2 - 2x - 4,5$$

Scheitelpunkte  $p_1$  und  $p_2$ :

$$S_1: \quad S_1(0|7,5)$$

| aus  $p_1$  abgelesen

$$S_2: \quad y = x^2 - 2x - 4,5$$

$$y = (x - 1)^2 - 1^2 - 4,5$$

| quadratische Ergänzung

$$y = (x - 1)^2 - 5,5$$

| Scheitelpunktgleichung

$$S_2(1|-5,5)$$

Steigungen  $\overline{S_2Q}$  und  $\overline{S_1P}$ :

$$m_{\overline{S_2Q}} = \frac{y_Q - y_{S_2}}{x_Q - x_{S_2}} = \frac{-1,5 - (-5,5)}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{\overline{S_1P}} = \frac{y_P - y_{S_1}}{x_P - x_{S_1}} = \frac{3,5 - 7,5}{-2 - 0} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Steigungen  $\overline{PS_2}$  und  $\overline{QS_1}$ :

$$m_{\overline{PS_2}} = \frac{y_{S_2} - y_P}{x_{S_2} - x_P} = \frac{-5,5 - 3,5}{1 - (-2)} = \frac{-9}{3} = -3$$

$$m_{\overline{QS_1}} = \frac{y_{S_1} - y_Q}{x_{S_1} - x_Q} = \frac{7,5 - (-1,5)}{0 - 3} = \frac{9}{-3} = -3$$

Wegen  $\overline{S_2Q} \parallel \overline{S_1P}$  und  $\overline{PS_2} \parallel \overline{QS_1}$ , ist das Viereck  $S_1PS_2Q$  ein Parallelogramm.

#### Lösung W3b/2012

##### Lösungslogik

##### Aufstellung der Parabelgleichung von $p$ :

Durch die Angabe, dass die Symmetrieachse eine Parallele zur  $y$ -Achse durch den Punkt  $A(-1|0)$  ist, wissen wir, dass die  $x$ -Koordinate des Scheitels  $-1$  sein muss. Mithilfe einer Punktprobe mit dem Punkt  $P(3|12)$  in der Scheitelpunktgleichung lässt sich die  $y$ -Koordinate des Scheitels berechnen. Wir erhalten somit die vollständige Scheitelpunktgleichung und den Scheitelpunkt der Parabel.

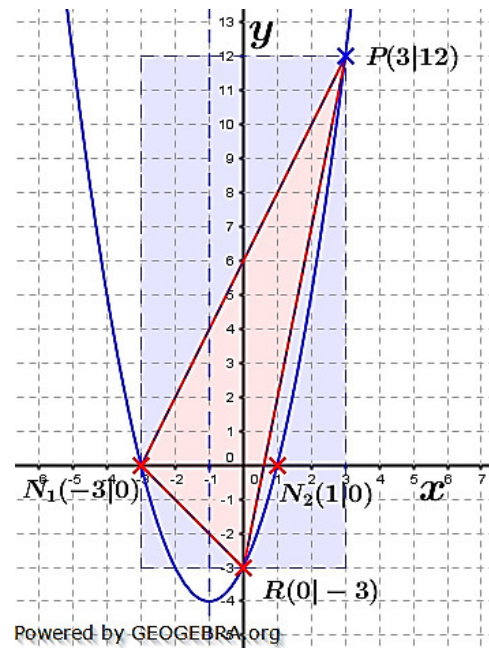
##### Nullstellenberechnung:

Wir berechnen die Nullstellen von  $p$ , indem wir  $y$  der Scheitelpunktgleichung auf  $0$  setzen und die Gleichung dann nach  $x$  auflösen.

##### Fläche des Dreiecks $RPN_1$ :

Nachdem die Eckpunkte des Dreiecks bekannt sind, erkennen wir aus der Grafik, dass das Dreieck kein rechtwinkliges Dreieck ist.

Wir müssen somit zunächst die Fläche des Rechtecks berechnen, welches das Dreieck umschließt (siehe Grafik). Von der Fläche dieses Rechtecks müssen wir dann die Flächen der seitlichen drei Dreiecke abziehen und erhalten damit die Fläche des Dreiecks  $RPN_1$ .



##### Klausuraufschrieb

##### Aufstellung der Parabelgleichung von $p$ :

$$\begin{aligned}
 p: \quad y &= (x - x_S)^2 + y_S \\
 x_S &= -1 \\
 y &= (x + 1)^2 + y_S \\
 12 &= (3 + 1)^2 + y_S \\
 12 &= 16 + y_S \\
 y_S &= -4 \\
 y &= (x + 1)^2 - 4
 \end{aligned}$$

- | Scheitelpunktgleichung
- | Symmetrieachse durch  $A(-1|0)$
- | Punktprobe mit  $P(3|12)$

##### Nullstellenberechnung:

$$\begin{aligned}
 0 &= (x + 1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 \\
 x^2 + 2x - 3 &= 0 \\
 x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm \sqrt{4} \\
 x_{1,2} &= -1 \pm 2 \\
 x_1 &= 1; \quad x_2 = -3 \\
 N_1(1|0); \quad N_2(-3|0)
 \end{aligned}$$

- |  $p/q$ -Formel

##### Fläche des Dreiecks $RPN_1$ :

$$\begin{aligned}
 A_{RPN_1}: \quad A_{RPN_1} &= A_{ABPC} - A_{N_1AR} - A_{RBP} - A_{PCN} \\
 A_{ABPC}: \quad A_{ABPC} &= 6 \cdot 15 = 90 \\
 A_{N_1AR}: \quad A_{N_1AR} &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5 \\
 A_{RBP}: \quad A_{RBP} &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15 = 22,5
 \end{aligned}$$

$$A_{PCN}: A_{PCN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$$

$$A_{RPN_1}: A_{RPN_1} = 90 - 4,5 - 22,5 - 36 = 27$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $RPN_1$  beträgt 27 FE.

## Lösung W4a/2012

### Lösungslogik

Aufgabe zum Erwartungswert.

Aufstellen einer Tabelle aus drei Zeilen mit drei Spalten, ähnlich Aufgabe W4a/2012. Da jedoch alle Farben gewinnen, wird keine Spalte für den Spieleinsatz eingetragen.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Farbe Blau über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit „Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementereignisse eines Zufallsexperiments ist stets 1,“.

Spalten der Zeile eins und zwei multiplizieren und in die Spalten der dritten Zeile eintragen. Vorzeichengerechte Addition der Spalteninhalte der dritten Zeile ergibt den Erwartungswert.

Berechnung der Veränderung des Gewinnplans, damit der Gewinn pro Spiel verdoppelt wird.

### Klausuraufschrieb

$$P(\text{rot}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{gelb}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{blau}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Berechnung der Erwartungswerte

4 €	1,50 €	0,60 €
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
1,00 €	0,50 €	0,25 €

$$EX = 1,00 + 0,50 + 0,25 = 1,75 \text{ €}$$

Gewinn pro Spiel:

$$\text{Gewinn} = \text{Einsatz} - EX = 2,00 - 1,75 = 0,25 \text{ €}$$

Verdoppelung des Gewinns:

$$2 \cdot 0,25 = 0,50 = 2,00 - EX \Rightarrow EX = 1,50$$

Mit einer Veränderung des Gewinns von 4 € auf 3 € ergibt sich:

$$EX = 3 \cdot \frac{1}{4} + 1,50 \cdot \frac{1}{3} + 0,60 \cdot \frac{5}{12} = 0,75 + 0,50 + 0,25 = 1,50 \text{ €}$$

Der Gewinnplan muss von 4 € auf 3 € verändert werden, damit die Klasse den doppelten Gewinn macht.

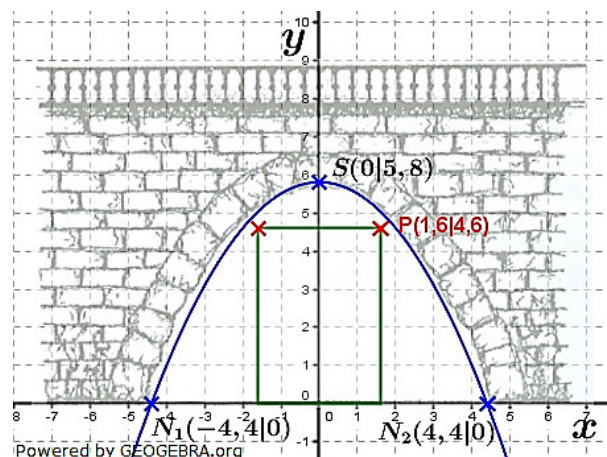
## Lösung W4b/2012

### Lösungslogik

Positionierung der Brücke in ein geeignetes Koordinatensystem (siehe Skizze), Festlegung der Koordinaten des Scheitels  $S$  sowie der Nullstellen  $N_1$  und  $N_2$ .

Aufstellung der Parabelgleichung.

Prüfung, ob der Punkt  $P(1,6|4,6)$  unterhalb oder oberhalb der Parabel liegt.



### Klausuraufschrieb

Scheitelpunkt der Parabel:  $S(0|5,8)$ .

Nullstellen  $N_1(-4,4|0)$  und  $N_2(4,4|0)$ .

$$p: y = ax^2 + 5,8$$

Punktprobe mit  $N_1$ :

$$\begin{array}{r|l} 0 = a \cdot 4,4^2 + 5,8 & -5,8 \\ -5,8 = 19,36a & : 19,36 \\ a = -0,3 & \end{array}$$

Die Gleichung der Parabel lautet  $y = -0,3x^2 + 5,8$ .

Prüfung, ob der Punkt  $P$  oberhalb oder unterhalb der Parabel liegt:

$$y = -0,3 \cdot 1,6^2 + 5,8 = 5,03$$

An der Stelle  $x_0 = 1,6$  bzw.  $x_1 = -1,6$  ist der Brückenbogen etwa 5 m hoch. Da das landwirtschaftliche Fahrzeug eine Höhe von nur 4,60 m hat, kann es unter der Brücke durchfahren.