Aufgabe W1a/2013

Im rechtwinkligen Dreieck ABC liegt das gleichschenklige Dreieck ADE.

Es gilt:

$\overline{AB} = 6{,}5\ cm$

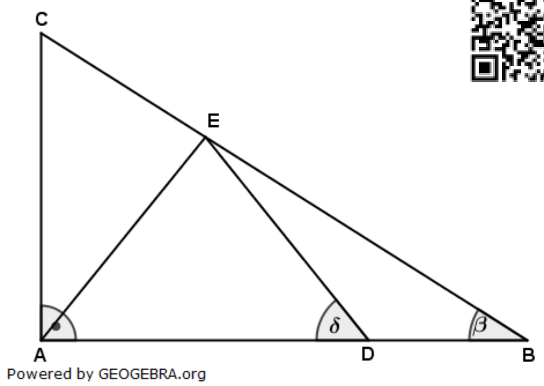
$\delta = 51{,}2\,°$

$\overline{DE} = \overline{AE} = 3{,}5\ cm$

Berechnen Sie den Winkel β.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks AEC.

Tipp: Sinussatz für $\overline{CE}$



Lösung: $\beta = 32{,}4°$

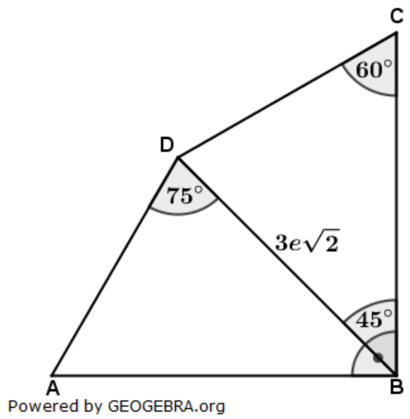
$u_{AEC} = 10{,}2\ cm$

Aufgabe W1b/2013

Gegeben ist das Viereck $ABCD$. Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ mit der Formel

$$A = 3e^2(3+\sqrt{3})$$

berechnet werden kann.



Aufgabe W2a/2013

Von einer massiven regelmäßigen sechsseitigen Pyramide sind bekannt:

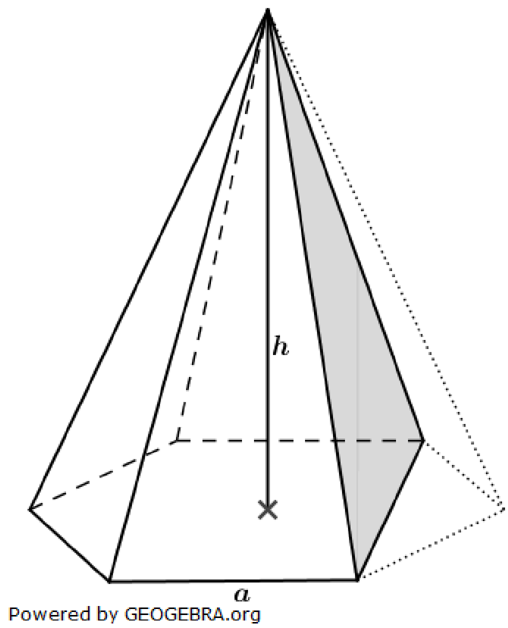
$a = 3{,}4\ cm$

$h = 6{,}7\ cm$

Ein Teil der Pyramide wird abgeschnitten (siehe Skizze).

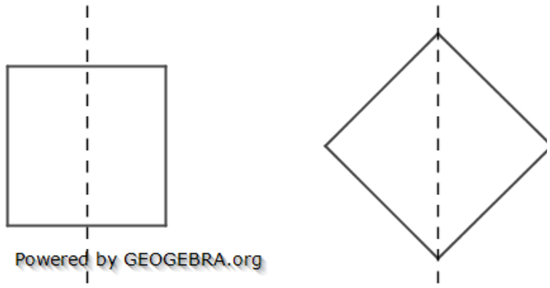
Berechnen Sie die Mantelfläche des neu entstandenen Körpers.

Lösung: $M = 70{,}1\ cm^2$



Aufgabe W2b/2013

Die Skizze zeigt die Achsenschnitte eines Zylinders und eines Doppelkegels (zwei gleich große Kegel mit gemeinsamer Grundfläche).
Die Schnittflächen der beiden Körper sind gleich große Quadrate mit einem Flächeninhalt von jeweils $36{,}0\ cm^2$.
Um wie viel Prozent unterscheiden sich die Oberflächen der beiden Körper?



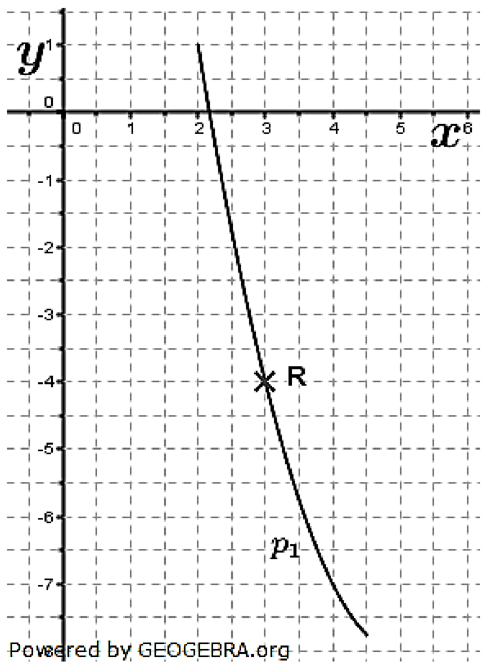
Lösung: $p\,\% = 5{,}8\,\%\ (6{,}1\%)$

Aufgabe W3a/2013

Das Schaubild zeigt einen Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p_1.
Der Punkt R liegt auf p_1.
Die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle gehört zur Normalparabel p_1.

x	3	4	5	6	7	8	9
y					-4		

Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel an und füllen Sie die Wertetabelle vollständig aus.
Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -x^2 - 4$.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die beiden Parabeln keinen gemeinsamen Punkt haben.
Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die keinen gemeinsamen Punkt mit beiden Parabeln hat.



Lösung: p_1: $y = x^2 - 10x + 17$
g: $y = -2x$ (andere möglich)

Aufgabe W3b/2013

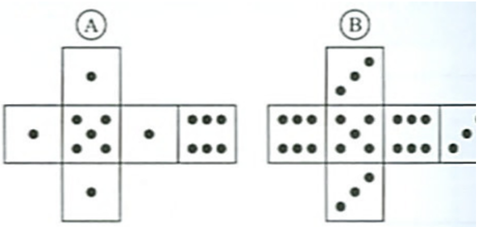
Die Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.
Eine nach oben geöffnete und verschobenen Normalparabel p_2 hat den Scheitel $S_2(3|-4)$.
Der Scheitel S_1 von p_1 sowie die Schnittpunkte N_1 und N_2 von p_2 mit der x–Achse bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1N_2S_1$.
Eine Gerade g geht durch die Schnittpunkte der beiden Parabeln und teilt somit die Fläche des Dreiecks.
Überprüfen Sie, ob die Gerade g die Fläche des Dreiecks $N_1N_2S_1$ halbiert.

Lösung: $A_{S_1N_1N_2} = 10\ FE$
Die Gerade halbiert die Fläche nicht.

Aufgabe W4a/2013

Die beiden Netze zeigen die Augenzahlen zweier besonderer Spielwürfel.
Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine „Sechs" zu werfen?

Lösung: $p = 44{,}44\,\%$



Die beiden Würfel werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.
Berechnen Sie den Erwartungswert.

Lösung: $EX = -0{,}25$

Wurfergebnisse	Gewinn
gleiche Augenzahlen (Pasch)	9,00 €
verschiedene Augenzahlen	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 1,00 €	

Der Veranstalter möchte beim Würfelnetz A die „Fünf" durch eine „Sechs" ersetzen.
Der Gewinnplan soll gleich bleiben. Wäre dies für ihn vorteilhaft?
Begründen Sie.

Lösung: nicht vorteilhaft, da sich $EX = 0$ ergibt.

Aufgabe W4b/2013

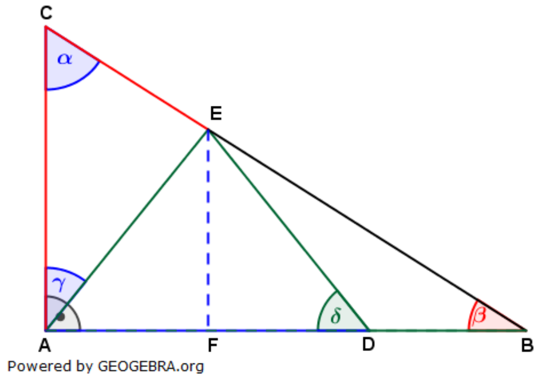
Die Grafik zeigt die Lanxess Arena in Köln.
Sie wird von einem parabelförmigen Bogen überspannt. Dieser lässt sich mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben.
Der Bogen hat am Boden eine Spannweite von $190\,m$. Die maximale Höhe des Bogens beträgt $76\,m$ über dem Boden. Geben Sie eine Gleichung der zugehörigen Parabel an.

An einem Punkt P des Bogens, der sich in $50\,m$ Höhe befindet, soll eine Befestigung angebracht werden.
Wie weit ist dieser Punkt P vom höchsten Punkt des Bogens entfernt?

Lösung: $p\colon\ y = -\frac{4}{475}x^2 + 76;\quad \overline{PS} = 61{,}35\,m$

Lösung W1a/2013

Lösungslogik



Berechnung $\overline{FD}$ im Dreieck FDE über $cos\delta$.
Berechnung von $\overline{FE}$ im Dreieck FDE über $sin\delta$.
Das Dreieck AED ist gleichschenklig, damit ist $\overline{AF} = \overline{FD}$.
Berechnung von $\overline{FB}$ über $\overline{AB} - \overline{AF}$ (identisch mit $\overline{AB} - \overline{FD}$)
Berechnung von β im Dreieck FBE über den tan.
Berechnung von α als Ergänzungswinkel zu $180\,°$ im Dreieck ABC.
Berechnung von γ als Differenzwinkel von $90\,°$ und δ.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den $tan\beta$ im Dreieck ABC.
Berechnung von $\overline{CE}$ mit dem Sinussatz über γ, $\overline{AE}$ und α.
Berechnung des Umfangs Dreiecks AEC über $\overline{AE} + \overline{EC} + \overline{AC}$.

Klausuraufschrieb

$\overline{FD}$: $\quad \frac{\overline{FD}}{\overline{DE}} = cos\delta \implies \overline{FD} = \overline{DE} \cdot cos\delta = 3{,}5 \cdot cos51{,}2\,° = 2{,}1931$

$\overline{FE}$: $\quad \frac{\overline{FE}}{\overline{DE}} = sin\delta \implies \overline{FE} = \overline{DE} \cdot sin\delta = 3{,}5 \cdot sin51{,}2\,° = 2{,}7277$

$\overline{FB}$: $\quad \overline{FB} = \overline{AB} - \overline{FD} = 6{,}5 - 2{,}1931 = 4{,}3069$

β: $\quad tan\beta = \frac{\overline{FE}}{\overline{FB}} = \frac{2{,}7277}{4{,}3069} = 0{,}6333$

$\beta = tan^{-1}(0{,}6333) = 32{,}35\,°$

α: $\quad \alpha = 90\,° - \beta = 90° - 32{,}35\,° = 57{,}65\,°$

γ: $\quad \gamma = 90\,° - \delta = 90° - 51{,}2\,° = 38{,}8\,°$

$\overline{AC}$: $\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = tan\beta \implies \overline{AC} = \overline{AB} \cdot tan\beta = 6{,}5 \cdot tan32{,}35\,° = 4{,}1165$

$\overline{CE}$: $\quad \frac{\overline{CE}}{sin\gamma} = \frac{\overline{AE}}{sin\alpha}$ | Sinussatz

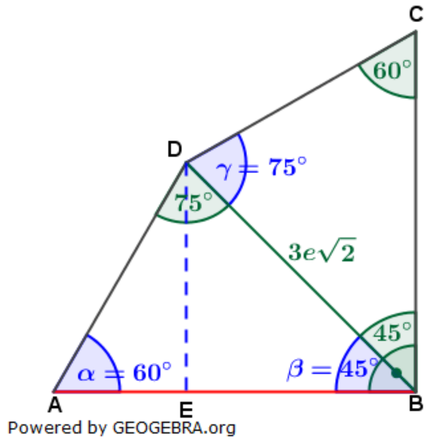
$\overline{CE} = \overline{AE} \cdot \frac{sin\gamma}{sin\alpha} = 3{,}5 \cdot \frac{sin38{,}8°}{sin57{,}65°} = 2{,}596$

u_{AED}: $\quad u_{AED} = \overline{AE} + \overline{CE} + \overline{AC} = 3{,}5 + 2{,}596 + 4{,}1165 = 10{,}2125$

Der Winkel β ist $32{,}4\,°$ groß, der Umfang des Dreiecks AEC beträgt $10{,}2\,cm$.

Lösung W1b/2013

Lösungslogik



Berechnung γ als Ergänzungswinkel zu $180\,°$ im Dreieck BDC.
Berechnung von β als Nebenwinkel zu Winkel DBC.
Berechnung α als Ergänzungswinkel zu $180\,°$ im Dreieck ABD.
Wegen $\alpha = 60° = \sphericalangle DCB$ und $\beta = 45° = \sphericalangle DBC$ sind die beiden Dreiecke ABD und BDC kongruent.
Damit ist $\overline{AB} = \overline{BC}$ und $\overline{AD} = \overline{DC}$.
Die Fläche des Vierecks $ABCD$ ist somit doppelt so groß wie die Fläche des Dreiecks ABD.
Berechnung von $\overline{ED}$ als Höhe des Dreiecks ABD über $sin\beta$ im Dreieck EBD.
Berechnung von $\overline{AB}$ über die Summe der Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{EB}$.
Berechnung von $\overline{AE}$ über $tan\alpha$ im Dreieck AED.
Berechnung von $\overline{EB}$ über $cos\beta$ im Dreieck EBD.
Berechnung von A_{ABCD} aus $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{ED}$.

Klausuraufschrieb

γ: $\gamma = 180° - 45° - 60° = 75°$

β: $\beta = 90° - 45° = 45°$

α: $\alpha = 180° - 75° - \beta = 105° - 45° = 60°$

Wegen $\alpha = 60° = \sphericalangle DCB$ und $\beta = 45° = \sphericalangle DBC$ und $\overline{BD}$ als gemeinsamer Seite der beiden Dreiecke ABD und BDC sind diese beiden Dreiecke nach WSW kongruent.

$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABD}$

$\overline{ED}$: $\frac{\overline{ED}}{\overline{BD}} = sin\beta$

$\overline{ED} = \overline{BD} \cdot sin\beta = 3e\sqrt{2} \cdot sin45° = 3e\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 3e$

$\overline{AE}$: $\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} = tan\alpha$

$\overline{AE} = \frac{\overline{ED}}{tan\alpha} = \frac{3e}{tan60°} = \frac{3e}{\sqrt{3}} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = e\sqrt{3}$

$\overline{EB}$: $\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} = cos\beta$

$\overline{EB} = \overline{BD} \cdot cos\beta = 3e\sqrt{2} \cdot cos45° = 3e\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 3e$

$\overline{AB}$: $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = e\sqrt{3} + 3e = e(3 + \sqrt{3})$

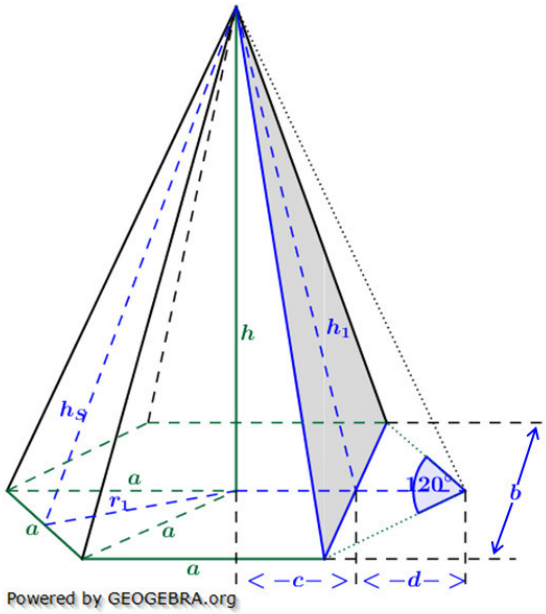
A_{ABCD}: $A_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{ED} = e\left(3 + \sqrt{3}\right) \cdot 3e$

$A_{ABCD} = 3e^2\left(3 + \sqrt{3}\right)$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2013

Lösungslogik

Der Mantel einer regelmäßigen sechseckigen Pyramide berechnet sich nach $M = 3 \cdot a \cdot h_S$. Von dem gesamten Mantel ist $\frac{1}{3}$ der Mantelfläche abgeschnitten, somit Mantelrest:
$M_{Rest} = 2 \cdot a \cdot h_S$.
Berechnung von h_S über den Satz des Pythagoras. Hierzu benötigen wir allerdings r_1. Die sechseckige Grundfläche der Pyramide besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenkante a. r_1 ist die Höhe eines solchen gleichseitigen Dreiecks. Die Höhe im gleichseitigen Dreieck berechnet sich aus $r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (siehe Formelsammlung).
Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit für h_S: $h_S = \sqrt{h^2 + r_1^2}$



Nachdem h_S bestimmt ist, Berechnung von M_{Rest}.
Durch den Abschnitt kommt die Fläche des grau gekennzeichneten Dreiecks auf der rechten Seite der Skizze zur Mantelfläche hinzu.
Diese Fläche berechnet sich aus $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_1$. Hierzu benötigen wir sowohl b als auch h_1.
b ist die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Schenkellänge a und dem Spitzenwinkel $120\,°$. Hierrüber ermittelt sich $\frac{b}{2}$ über den $sin60°$.
h_1 lässt sich mit dem Satz des Pythagoras errechnen mit $h_1 = \sqrt{h^2 + c^2}$. Hierzu benötigen wir zunächst die Strecke c.
c errechnet sich: $c = a - d$, wobei d sich über den $cos60°$ errechnen lässt.
Nach Berechnung aller Zwischenwerte kann $A_{Dreieck}$ bestimmt werden und damit auch die Mantelfläche des Restkörpers mit $M_{Körper} = M_{Rest} + A_{Dreieck}$.

Klausuraufschrieb

Der Mantel des Restkörpers besteht aus vier Seitendreiecken der Pyramide (M_{Rest}) zuzüglich der Fläche des grau gekennzeichneten Dreiecks auf der rechten Seite der Skizze ($A_{Dreieck}$).

M_{Rest}: $\quad M_{Pyr} = 3 \cdot a \cdot h_S$

h_S: $\quad h_S = \sqrt{h^2 + r_1^2}$

r_1: $\quad r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3{,}4}{2}\sqrt{3} = 2{,}94$

$h_S = \sqrt{6{,}7^2 + 2{,}94^2} = 7{,}3167$

$M_{Pyr} = 3 \cdot 3{,}4 \cdot 7{,}3167 = 74{,}63$

$M_{Rest} = \frac{2}{3} \cdot M_{Pyr} = \frac{2}{3} \cdot 74{,}63 = 49{,}75$

$A_{Dreieck}$: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_1$

b: $\frac{\frac{b}{2}}{a} = sin60°$

$b = 2 \cdot a \cdot sin60° = 2 \cdot 3{,}4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 3{,}4 \cdot \sqrt{3} = 5{,}889$

h_1: $h_1 = \sqrt{h^2 + c^2}$

c: $c = a - d$

d: $\frac{d}{a} = cos60°$

$d = a \cdot cos60° = 3{,}4 \cdot 0{,}5 = 1{,}7$

$c = 3{,}4 - 1{,}7 = 1{,}7$

$h_1 = \sqrt{6,7^2 + 1,7^2} = 6{,}9123$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}889 \cdot 6{,}9123 = 20{,}3533$

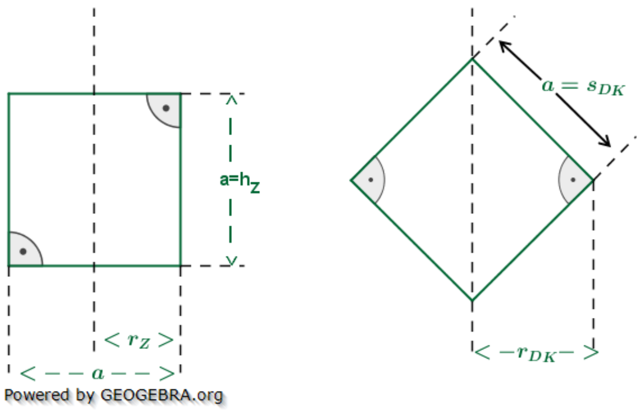
$M_{Körper}$: $M_{Körper} = M_{Rest} + A_{Dreieck} = 49{,}75 + 20{,}3533 = 70{,}10$

Der Mantel des Körpers ist etwa $70{,}1\ cm^2$ *groß.*

Lösung W2b/2013

Lösungslogik

Die nebenstehende Skizze zeigt links den Achsenschnitt durch den Zylinder und rechts den durch den Doppelkegel.
Die Schnittflächen sind nach Aufgabenstellung ein Quadrat mit $36\ cm^2$ Fläche, somit sind alle Kanten der beiden Schnittflächen $6\ cm$ lang.
Die Oberfläche des Zylinders errechnen wir über die Formel $O_{Zyl} = 2\pi r_z^2 + 2\pi \cdot r_z \cdot h_z$.



Die Oberfläche des Doppelkegels entspricht zweimal der Mantelfläche eines Kegels. Die Mantelfläche eines Kegels errechnet sich über $M_{Kegel} = \pi \cdot r_k \cdot s_K$.
Hierzu benötigen wir noch r_K, welches über den Satz des Pythagoras errechnet werden kann. Nach Berechnung der beiden Oberflächen bilden wir das prozentuale Verhältnis. Da aus der Aufgabenstellung nicht klar hervorgeht, welche der beiden Oberflächen als Grundwert genommen werden soll, berechnen wir sowohl als auch.

Klausuraufschrieb

a: $A_{Querschnitt} = 36 = a^2 \implies a = 6\ cm$

O_{Zyl}: $O_{Zyl} = 2\pi r_z^2 + 2\pi \cdot r_z \cdot h_z = 2\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$

$O_{Zyl} = \frac{3}{2}\pi \cdot 36 = 169{,}65\ \ cm^2$

M_{DK}: $M_{DK} = 2 \cdot M_{Kegel}$

M_{Kegel}: $M_{Kegel} = \pi \cdot r_k \cdot s_K$

r_k: $a^2 = r_K^2 + r_K^2 = 2r_k^2$

$r_K^2 = \frac{a^2}{2}$

$r_K = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = 4{,}2426$

$M_{Kegel} = \pi \cdot 4{,}2426 \cdot 6 = 79{,}97$

$M_{DK} = 2 \cdot 79{,}97 = 159{,}94\ cm^2$

Oberfläche Zylinder als Grundwert:

$p\ \% = \frac{M_{DK}}{O_{Zyl}} = \frac{159{,}94}{169{,}65} \cdot 100 = 94{,}28\ \%$

Die Oberfläche des Doppelkegels ist etwa $5{,}8\ \%$ *kleiner als die des Zylinders.*

Oberfläche Doppelkegel als Grundwert:

$p\ \% = \frac{O_{Zyl}}{M_{DK}} = \frac{169{,}65}{159{,}94} \cdot 100 = 106{,}1\ \%$

Die Oberfläche des Zylinders ist etwa $6{,}1\ \%$ *größer als die des Doppelkegels.*

Lösung W3a/2013

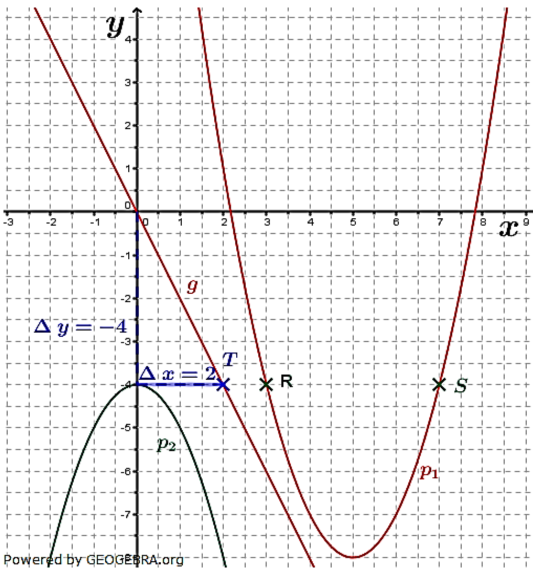
Lösungslogik

Grüne Linien und Punkte sind gegeben.

Funktionsgleichung für p_1*:*

Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + px + q$ (siehe Formelsammlung). Wir lesen den Punkt R im Koordinatensystem mit $R(3|4)$ ab. In der Wertetabelle ist eine weiterer Punkt S mit $S(7|-4)$ gegeben. Wir machen eine Punktprobe mit R und S und errechnen daraus die Koeffizienten p und q.

Jetzt können wir über die gefundene Funktionsgleichung die Wertetabelle vollständig ausfüllen.



Schnittpunkte von p_1 *und* p_2*:*

Wir setzen die beiden Gleichungen von p_1 und p_2 gleich, formen diese um in eine quadratische Gleichung und ermitteln daraus c.

Dabei stellen wir fest, dass die Lösungsmenge leer ist, was bedeutet, dass die beiden Parabeln sich in keinem Punkt schneiden.

Gleichung einer Geraden g*:*

Wir haben p_1 und p_2 in das Koordinatensystem eingezeichnet und ziehen eine Gerade durch den Ursprung, die zwischen den beiden Parabeln verläuft. Wir suchen einen weiteren leicht ablesbaren Punkt auf der Geraden und bilden über diesen Punkt das Steigungsdreieck und bestimmen daraus die Steigung der Ursprungsgeraden.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung für p_1:

p_1: $y = x^2 + px + q$

$R(3|-4)$ (abgelesen) $R(7|-4)$ (aus Tabelle)

(1) $-4 = 9 + 3p + q$ | Punktprobe mit R

(2) $-4 = 49 + 7p + q$ | Punktprobe mit S

(1)-(2) $0 = -40 - 4p \Rightarrow p = -10$

$p \longrightarrow (1)$

$-4 = 9 + 3 \cdot (-10) + q$

$30 - 13 = q$

$q = 17$

Die Gleichung der Parabel p_1 lautet $y = x^2 - 10x + 17$.

Wertetabelle:

x	3	4	5	6	7	8	9
y	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 10x + 17 = -x^2 - 4$ | $+x^2; +4$

$2x^2 - 10x + 21 = 0$ | $:2$

$x^2 - 5x + \frac{21}{2} = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 10{,}5} = 2{,}5 \pm \sqrt{-4{,}25}$

Wegen $D < 0$ ist $\mathbb{L} = \{\}$, d.h., die beiden Parabeln haben keine gemeinsamen Punkte.

Ursprungsgerade g ohne Schnittpunkte mit p_1 und p_2:

g: $y = mx + b$

Ursprungsgerade durch $O(0|0)$: $y = mx$

$T(2|-4)$ (abgelesen nach Einzeichnung einer geeigneten Geraden)

$m = \frac{-4}{2} = -2$

g: $y = -2x$

Die Gerade g mit $y = -2x$ hat keine Schnittpunkte mit $y = p_1$ und p_2.

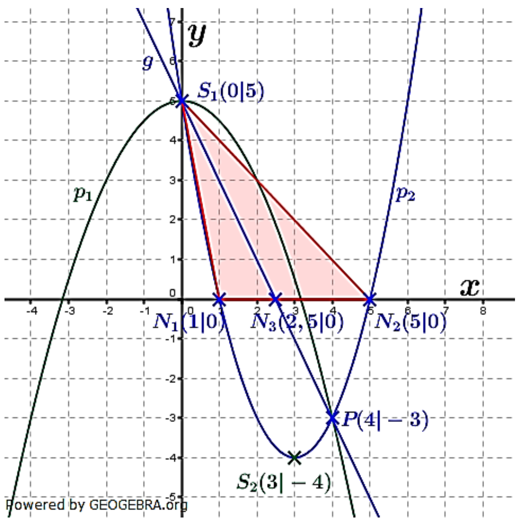
Hinweis:

Es sind natürlich noch andere Geradengleichungen denkbar.

Lösung W3b/2013

Lösungslogik

Grüne Linien und Punkte sind gegeben.
Blaue Linien und Punkte sind erforderliche Zwischenwerte.
Zur Flächenberechnung des Dreiecks $S_1N_1N_2$ benötigen wir die Koordinaten der Punkte.
S_1 ist der Scheitelpunkt der in x–Richtung unverschobenen Parabel p_1. Seine Koordinaten lesen wir unmittelbar aus der Funktionsgleichung ab.



N_1 und N_2 sind die Schnittpunkte von p_2 mit der x-Achse. Zur Bestimmung stellen wir die Parabelgleichung in Scheitelpunktform über den gegebenen Scheitelpunkt S_2 auf und lösen die entstehende quadratische
Gleichung über die p/q–Formel nach x auf.
Im Dreieck $S_1N_1N_2$ ist die Strecke $\overline{N_1N_2}$ die Basis und die Strecke $\overline{OS_1}$ die Höhe auf die Basis (Höhe liegt außerhalb des Dreiecks wegen des stumpfen Winkels bei N_1). Die Fläche des Dreiecks ergibt sich aus der Formel $A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2}\overline{N_1N_2} \cdot \overline{OS_1}$ (siehe Formelsammlung).
Zur Bestimmung der Geraden g benötigen wir die Schnittpunkte von p_1 und p_2. Schnittpunktbestimmung erfolgt durch Gleichsetzung von p_1 mit p_2. Ein Schnittpunkt ist bereits bekannt, sowohl p_1 als auch p_2 haben den y–Achsenabschnitt $c = 5$. Somit ist $S_1(0|5)$ der eine Schnittpunkt. Der zweite Schnittpunkt ergibt sich zu $P(4|-3)$. Über die Punkte S_1 und P bestimmen wir die Steigung m der Geraden g. Auch der y–Achsenabschnitt der Geraden ist $b = 5$.
Zur Prüfung, ob die Gerade g das Dreieck $S_1N_1N_2$ halbiert, benötigen wir den Schnittpunkt der Geraden mit der x–Achse, der sich zu $N_3(2{,}5|0)$ ergibt. Wir berechnen nun die Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_3$ mit $\overline{N_1N_2}$ als Basis und $\overline{OS_1}$ als Höhe. Der Vergleich der beiden Flächen zeigt, ob die Gerade g die Fläche $S_1N_1N_2$ halbiert.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_2$:

S_1: $S_1(0|5)$ | y-Achsenabschnitt von p_1.

p_2: $y = (x-3)^2 - 4$ | Scheitelpunktgleichung mit $S_2(3|4)$

$y = x^2 - 6x + 5$

N_1 und N_2:

$x^2 - 6x + 5 = 0$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$

$x_1 = 5; \quad x_2 = 1$

$N_1(1|0); \quad N_2(5|0)$

$A_{S_1N_1N_2}$:

$A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$

g: $g = \overline{N_1N_2} = \left(x_{N_2} - x_{N_1}\right) = 5 - 1 = 4$

h_g: $h_g = \overline{OS_1} = \left(y_{S_1} - y_O\right) = 5 - 0 = 5$

$A_{S_1N_1N_2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10\ FE$

Die Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_2$ ist $10\,FE$ groß.

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$: | Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$x^2 - 6x + 5 = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ | $+\frac{1}{2}x^2; -5$

$x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 6x = 02$

$\frac{3}{2}x^2 - 6x = 0$

$x\left(\frac{3}{2}x - 6\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$\frac{3}{2}x - 6 = 0 \qquad | \quad \cdot 2$
$3x - 12 = 0 \qquad | \quad +12$
$3x = 12 \qquad | \quad :3$
$x_2 = 4$
$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 5 = 5$
$S_1(0|5)$
$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 5 = -8 + 5 = -3$
$P(4|-3)$

Geradengleichung g durch S_1 und P:

g: $\quad y = mx + b$
m: $\quad m = \frac{y_P - y_{S_1}}{x_p - x_{S_1}} = \frac{-3-5}{4-0} = \frac{-8}{4} = -2$
b: $\quad$ Wegen $S_1(0|5)$ ist$b = 5$.
$y = -2x + 5$

Schnittpunkt von g mit der x–Achse:

N_3: $\quad 0 = -2x + 5$
$2x = 5$
$x_3 = 2{,}5$
$N_3(2{,}5|0)$

Fläche des Dreiecks $S_1N_1N_3$:

$A_{S_1N_1N_3}$: $\quad A_{S_1N_1N_3} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$
$g = \overline{N_1N_3} = \left(x_{N_3} - x_{N_1}\right) = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$
$h_g = \overline{OS_1} = \left(y_{S_1} - y_O\right) = 5 - 0 = 5$
$A_{S_1N_1N_3} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 5 = 3{,}75 \ FE$
$\frac{A_{S_1N_1N_3}}{A_{S_1N_1N_2}} = \frac{3{,}75}{10} \neq \frac{1}{2}$

Die Gerade g halbiert die Fläche $A_{S_1N_1N_2}$ nicht.

Lösung W4a/2013

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit „mindestens eine Sechs“:

Wir stellen die Wahrscheinlichkeit einer Sechs für Würfel A und Würfel B auf. Würfel A hat nur eine Sechs, also $P(6_A) = \frac{1}{6}$. Würfel B hat zwei Sechsen, also $P(6_B) = \frac{2}{6}$.

Mindestens eine Sechs bedeutet eine Sechs oder zwei Sechsen. Am Wort „mindestens“ erkennen wir, dass der schnellste Lösungsweg über das Gegenereignis führt, den „mindestens eine Sechs“ ist dasselbe wir $1 -$ „keine Sechs“. Keine Sechs bei Würfel A ist $P\left(\overline{6_A}\right) = \frac{5}{6}$, bei Würfel B jedoch $P\left(\overline{6_B}\right) = \frac{4}{6}$.

Erwartungswert:

Zunächst müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „Pasch“ bestimmen. Aufgrund des Aufbaus der beiden Würfel sind nur die Ereignisse $\{5; 5\}$ und $\{6; 6\}$ möglich. $P(6_A)$ und $P(6_B)$ sind bereits bekannt, $P(5_A) = P(5_B) = \frac{1}{6}$.

Wir bestimmen nun den Erwartungswert über eine Tabelle.

Ersatz der „Fünf" bei Würfel A durch eine „Sechs":
Durch den Ersatz ist nunmehr ein 5–er Pasch ausgeschlossen, es ist nur noch ein 6–er Pasch möglich, wobei jetzt $P(6_A)=P(6_B)=\frac{2}{6}$ ist. Wir berechnen den Erwartungswert neu und vergleichen diesen mit dem Vorwert.

Klausuraufschrieb

$P(6_A)=\frac{1}{6}$ $\qquad$ $P(\overline{6_A})=\frac{5}{6}$

$P(6_B)=\frac{2}{6}$ $\qquad$ $P(\overline{6_B})=\frac{4}{6}$

$P(mindestens\ 1\ Sechs)=1-P(keine\ Sechs)$

$=1-\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=1-\frac{20}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}\approx 44{,}4\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt $44{,}4\ \%$.
Erwartungswert:

$P(Pasch)=P\{(5;5),(6;6)\}=P(5;5)+P(6;6)$

$P(5;5)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ $\qquad$ $P(6;6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{36}$

$P(Pasch)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=P(Gewinn)$

$P(\overline{Gewinn})=1-P(Gewinn)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

Gewinn/Einsatz (X_i)	$8{,}00$ €	$-1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
$X_i\cdot p(X_i)$	$\frac{8}{12}$ €	$-\frac{11}{12}$ €
EX	$\frac{8}{12}$ € $-\frac{11}{12}$ € $=-\frac{3}{12}$ € $=-0{,}25$ €	

Der Erwartungswert ist $EX=-0{,}25$.
Ersatz der „Fünf" bei Würfel A
Es ist nur noch das Ereignis $\{6;6\}$ möglich.

$P(6_A)=P(6_B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(Gewinn)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

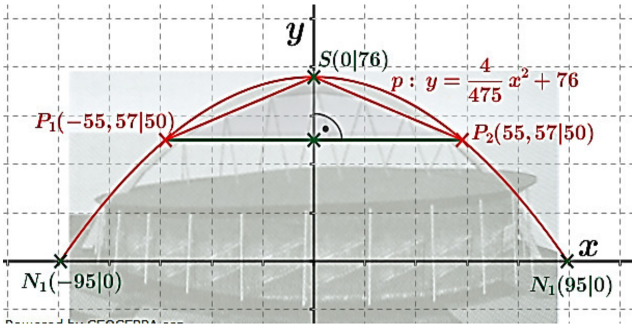
$P(\overline{Gewinn})=1-P(Gewinn)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

Gewinn/Einsatz (X_i)	$8{,}00$ €	$-1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
$X_i\cdot p(X_i)$	$\frac{8}{9}$ €	$-\frac{8}{9}$ €
EX	$\frac{8}{9}$ € $-\frac{8}{9}$ € $=0$ €	

Der Erwartungswert nach Ersatz der „Fünf" bei Würfel A ist 0, d.h., das Spiel ist fair, das Ersetzen wäre für den Veranstalter nicht vorteilhaft.

Lösung W4b/2013

Lösungslogik



Grüne Linie und Punkte sind gegeben.
Rote Linien sind gesucht.
Der Bogen der Arena entspricht einer nach unten geöffneten, in x–Richtung nicht verschobenen Parabel. Die allgemeine Gleichung dieser Parabel lautet $y = ax^2 + c$.
Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass der Scheitel dieser Parabel bei $S(0|76)$ liegt, also ist $c = 76$. Weiterhin geht aus der Aufgabenstellung hervor, dass diese Parabel die x–Achse in $N_1(-95|0)$ und $N_2(95|0)$ schneidet.
Wir machen eine Punktprobe mit N_2 (alternativ N_1) und bestimmen damit den Koeffizienten a der Parabelgleichung.
Die Koordinaten des Punktes P ermitteln wir, indem wir die Gerade g mit $y = 50$ mit der Parabel schneiden. Die Entfernung von P bis zum höchsten Punkt S (=Scheitelpunkt) berechnen wir dann über den Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung der Parabel p:

p: $y = ax^2 + c$

$c = 76$	|	wegen $S(0|76)$ höchster Punkt
$N_1 = (-95|0)$ $N_2 = (95|0)$	|	wegen unterer Breite
$0 = a \cdot 95^2 + 76$	|	Punktprobe mit N_2
$a = -\frac{76}{95^2} = -\frac{4}{475}$		

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet $y = -\frac{4}{475}x^2 + 76$

Entfernung des Punktes P vom höchsten Punkt des Bogens:

P: $y_p = 50$

$-\frac{4}{475}x^2 + 76 = 50$	|	$\cdot 475$
$-4x^2 + 475 \cdot 76 = 475 \cdot 50$	|	$-475 \cdot 60$
$-4x^2 = 475 \cdot (50 - 76) = 475 \cdot (-26)$	|	$:(-4)$
$x^2 = \frac{475 \cdot 26}{4}$	|	$\sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm 55{,}57$		
$P_1(-55{,}57|50)$; $P_2(55{,}57|50)$		

$\overline{P_2S}$: $\overline{P_2S} = \sqrt{\left(x_{P_2} - x_S\right)^2 + \left(y_{P_2} - y_S\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$= \sqrt{(55{,}57 - 0)^2 + (50 - 76)^2} \approx 61{,}35$

Der Punkt P ist $61{,}35\,m$ vom höchsten Punkt des Bogens entfernt.