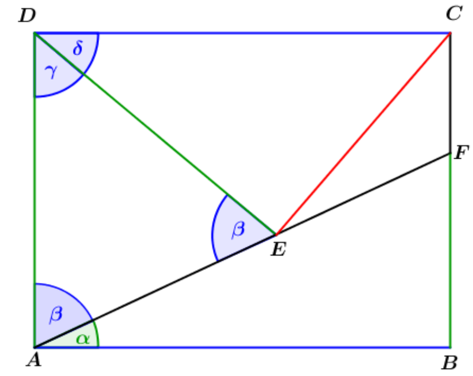
Lösung W1a/2014

Lösungslogik (einfach)

Berechnung von β als Ergänzungswinkel zu $90°$.
Das Dreieck AED ist gleichschenklig, Berechnung von γ als Spitzenwinkel.
Berechnung von δ als Ergänzungswinkel zu $90\,°$.
Berechnung von $\overline{DC} = \overline{AB}$ im Dreieck ABF über $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{CE}$ über den Kosinussatz.



Klausuraufschrieb

β: $\quad \beta = 90\,° - \alpha = 90° - 25° = 65\,°$

γ: $\quad \gamma = 180\,° - 2 \cdot \beta = 180° - 130° = 50\,°$

δ: $\quad \delta = 90\,° - \gamma = 90° - 50° = 40\,°$

$\overline{DC}$: $\quad \overline{DC} = \overline{AB}$

$\overline{AB}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB}; \ : tan\alpha$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BF}}{tan\alpha} = \frac{4{,}2}{tan25°} = 9{,}00$$

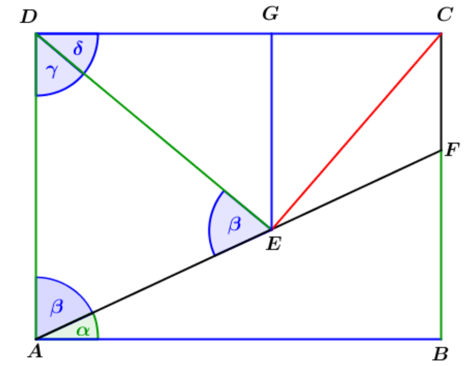
$\overline{EC}$: $\quad \overline{EC} = \sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \cdot \overline{ED} \cdot \overline{DC} \cdot cos\delta} \quad | \quad$ Kosinussatz

$$\overline{EC} = \sqrt{6{,}8^2 + 9^2 - 2 \cdot 6{,}8 \cdot 9 \cdot cos40\,°} = 5{,}7858$$

Die Strecke $\overline{EC}$ ist $5{,}8\ cm$ lang.

Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von β als Ergänzungswinkel zu $90°$.
Das Dreieck AED ist gleichschenklig, Berechnung von γ als Spitzenwinkel.
Berechnung von δ als Ergänzungswinkel zu $90\,°$.
Berechnung von $\overline{DC} = \overline{AB}$ im Dreieck ABF über $tan\alpha$.
Berechnung von $\overline{EG}$ über den $sin\delta$.
Berechnung von $\overline{DG}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{GC}$ aus Differenz von $\overline{DC}$ und $\overline{DG}$.
Berechnung von $\overline{EC}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

β: $\beta = 90° - \alpha = 90° - 25° = 65°$

γ: $\gamma = 180° - 2 \cdot \beta = 180° - 130° = 50°$

δ: $\delta = 90° - \gamma = 90° - 50° = 40°$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{AB}$

$\overline{AB}$: $tan\alpha = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}$ | $\cdot \overline{AB}$; $: tan\alpha$

$\overline{AB} = \frac{\overline{BF}}{tan\alpha} = \frac{4{,}2}{tan25°} = 9{,}00$

$\overline{EG}$: $sin\delta = \frac{\overline{EG}}{\overline{DE}}$ | $\cdot \overline{DE}$

$\overline{EG} = \overline{DE} \cdot sin\delta = 6{,}8 \cdot sin40° = 4{,}37$

$\overline{DG}$: $\overline{DG} = \sqrt{\overline{DE}^2 - \overline{EG}^2} = \sqrt{6{,}8^2 - 4{,}37^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{DG} = \sqrt{27{,}1431} = 5{,}21$

$\overline{GC}$: $\overline{GC} = \overline{DC} - \overline{DG} = 9{,}00 - 5{,}21 = 3{,}79$

$\overline{EC}$: $\overline{EC} = \sqrt{\overline{EG}^2 + \overline{GC}^2} = \sqrt{4{,}37^2 + 3{,}79^2}$ | Satz des Pythagoras

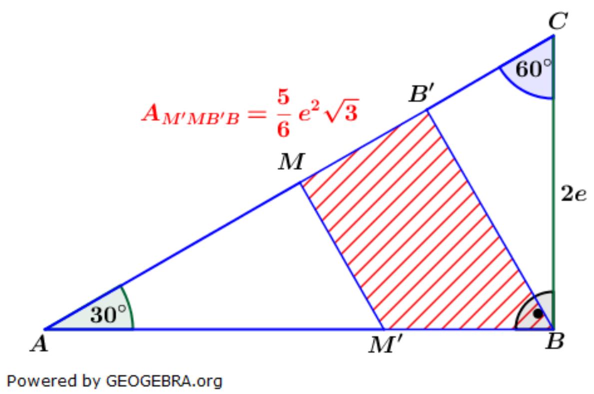
$\overline{DG} = \sqrt{33{,}461} = 5{,}785$

Die Strecke $\overline{EC}$ ist $5{,}8\,cm$ lang.

Lösung W1b/2014

Lösungslogik

Berechnung $\sphericalangle ACB$ als Ergänzungswinkel zu $90°$ im Dreieck ABC.
Berechnung von $\overline{AC}$ über $sin30°$, daraus $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Berechnung $\overline{MM'}$ über $tan\,30°$.
Berechnung $\overline{BB'}$ über $sin\,60°$.
Berechnung $\overline{AB}$ über $tan\,30°$.
Berechnung der Fläche der Dreiecke ABC, $AM'M$ und BCB'.
Fläche des Vierecks $M'MB'B$ ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC abzüglich der Fläche der Dreiecke $AM'M$ und BCB'.



Klausuraufschrieb

$A_{Viereck} = A_{ABC} - A_{BCB'} - A_{AM'M}$

$\overline{AC}$: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = sin30° \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{sin30°} = \frac{2e}{0{,}5} = 4e$

$\overline{AM}$: $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = 2e$

$\overline{AB}$: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = tan30° \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{tan30°} = \frac{2e}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = 2e\sqrt{3}$

$\overline{MM'}$: $\frac{\overline{MM'}}{\overline{AM}} = tan30° \Rightarrow \overline{MM'} = \overline{AM} \cdot tan30° = 2e \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}e\sqrt{3}$

$\overline{BB'}$: $\frac{\overline{BB'}}{\overline{BC}} = sin60° \Rightarrow \overline{BB'} = \overline{BC} \cdot sin60° = 2e \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = e\sqrt{3}$

$\overline{B'C}$: $\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}} = cos60° \Rightarrow \overline{B'C} = \overline{BC} \cdot cos60° = 2e \cdot \frac{1}{2} = e$

A_{ABC}: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2e\sqrt{3} \cdot 2e = 2e^2\sqrt{3}$

$A_{AM'M}$: $A_{AM'M} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MM'} = \frac{1}{2} \cdot 2e \cdot \frac{2}{3}e\sqrt{3} = \frac{2}{3}e^2\sqrt{3}$

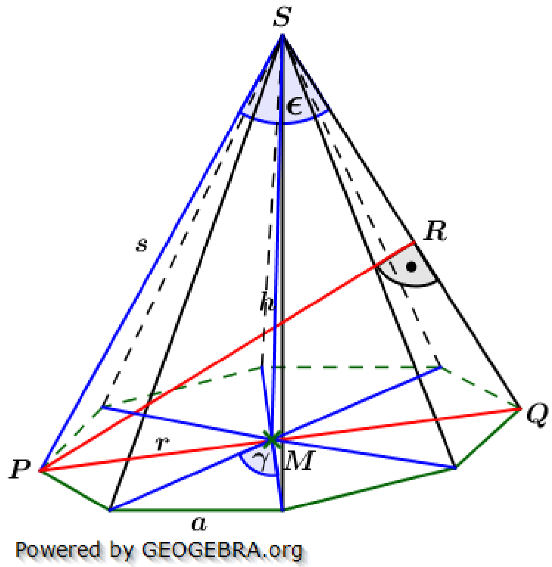
$A_{BCB'}$: $A_{BCB'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BB'} \cdot \overline{B'C} = \frac{1}{2} \cdot e\sqrt{3} \cdot e = \frac{1}{2}e^2\sqrt{3}$

$A_{Viereck} = 2e^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}e^2\sqrt{3} - \frac{2}{3}e^2\sqrt{3} = \frac{5}{6}e^2\sqrt{3}$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2014

Lösungslogik

Die Grundfläche der regelmäßigen achteckigen Pyramide lässt sich in acht gleichschenklige Dreiecke unterteilen mit der Grundseite a und den Seitenkanten r (siehe Formelsammlung). Hieraus bestimmt sich der Scheitelwinkel γ dieser Dreiecke aus $\gamma = \frac{360°}{8} = 45\,°$. Über den Kosinussatz lässt sich nun die Seitenlänge r eines solchen Dreiecks berechnen. Die Strecke $\overline{PQ}$ ist dann $2r$ lang.
Zur Berechnung der Strecke $\overline{PR}$ benötigen wir zuerst die Höhe h und die Seitenkante s der Pyramide sowie den Spitzenwinkel ϵ.



Für die Berechnung von h benötigen wir den Flächeninhalt der Grundfläche aus acht gleichseitigen Dreiecken. Die Dreiecksfläche errechnet sich mithilfe des trigonometrischen Flächeninhalts.
Mithilfe der nun bekannten Höhe h der Pyramide und Seitenkante r des gleichseitigen Dreiecks der Grundfläche lässt sich s über den Satz des Pythagoras und der halbe Winkel ϵ über den tan ermitteln. Letztendlich berechnen wir dann die Strecke $\overline{PR}$ aus s und dem Winkel ϵ über den sin.

Klausuraufschrieb

$\overline{PQ}$: $\overline{PQ} = 2 \cdot r$

r: $a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot cos\gamma$ | Kosinussatz

$a^2 = 2r^2(1 - cos\gamma) \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{2(1-cos\gamma)}$

$r = \sqrt{\frac{a^2}{2(1-cos\gamma)}}$

γ: $\gamma = \frac{360°}{8} = 45°$

$r = \sqrt{\frac{12^2}{2(1-cos45°)}} = 15{,}6787$

$\overline{PQ} = 2 \cdot 15{,}6787 = 31{,}3575$

Die Strecke $\overline{PQ}$ ist $31{,}4\ cm$ lang.

$\overline{PR}$: $\frac{\overline{PR}}{s} = sin\epsilon \Longrightarrow \overline{PR} = s \cdot sin\epsilon$

s: $s^2 = h^2 + r^2 \Longrightarrow s = \sqrt{h^2 + r^2}$ | Satz des Pythagoras

h: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \Longrightarrow h = \frac{3 \cdot V_{Pyr}}{G}$

G: $G = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin\gamma$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$G = 4 \cdot 15{,}6787^2 \cdot sin45° = 695{,}2886$

$h = \frac{3 \cdot 8346}{695{,}2886} = 36{,}01$

$s = \sqrt{36{,}01^2 + 15{,}6787^2} = 39{,}2752$ | Satz des Pythagoras

ϵ: $tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{r}{h} = \frac{15{,}6787}{36{,}01} = 0{,}4354$

$\frac{\epsilon}{2} = tan^{-1}(0{,}4354) = 23{,}53°$

$\epsilon = 47{,}06°$

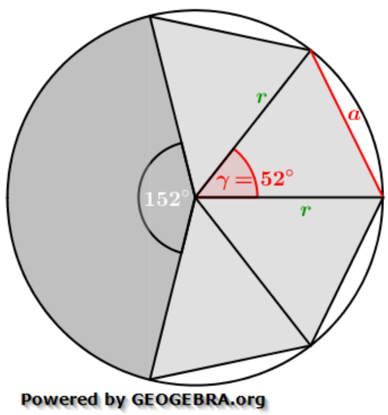
$\overline{PR} = 39{,}2752 \cdot sin(47{,}06°) = 28{,}75$

Die Strecke $\overline{PR}$ ist $28{,}8\ cm$ lang.

Lösung W2b/2014

Lösungslogik

Die quadratische Pyramide hat die Seitenkante $s = r$. Der Spitzenwinkel eines Seitendreiecks berechnet sich aus $\gamma = \frac{360° - 152°}{4}$.
Über den Kosinussatz können wir nun die Länge der Seitenkante a ermitteln. Die Höhe der Pyramide errechnet sich dann mithilfe des Satz des Pythagoras über die Seitenkante s und der halben Diagonale der quadratischen Grundfläche.
Der Kegelmantel hat einen Öffnungswinkel von $152\,°$. Der Kreisbogen dieses Öffnungswinkels errechnet sich aus $b = \frac{360°}{152°} \cdot r$, diese Bogenlänge wird zum Kreisumfang des Grundkreises des Kegels. Hieraus lässt sich r_{Keg} errechnen. Die Höhe des Kegels bestimmt sich dann über den Satz des Pythagoras aus $s = r$ und r_{Keg}.



Klausuraufschrieb

γ: $\gamma = \frac{360° - 152°}{4} = 52°$

a: $a^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot cos\gamma$ | Kosinussatz

$a^2 = 400 + 400 - 800 \cdot cos52° = 307{,}47$ | $\sqrt{\ }$

$a = 17{,}53$

d_{Pyr}: $d_{Pyr} = a \cdot \sqrt{2} = 17{,}53 \cdot \sqrt{2} = 24{,}798$

h_{Pyr}: $h_{Pyr}^2 = s^2 - \left(\frac{d_{Pyr}}{2}\right)^2$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = \sqrt{400 - 153{,}7354} = 15{,}6928$

Die Höhe der Pyramide ist etwa $15{,}7\ cm$ lang.

b: $b = \frac{152°}{360°} \cdot 2\pi r = 53{,}06$

r_{Keg}: $2\pi \cdot r_{Keg} = b$

$r_{Keg} = \frac{b}{2\pi} = \frac{53{,}06}{2\pi} = 8{,}44$

h_{Keg}: $h_{Keg}^2 = s^2 - r_{Keg}^2$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{20^2 - 8{,}44^2} = 18{,}13$

Die Höhe des Kegels ist etwa $18{,}1\ cm$ *lang.*

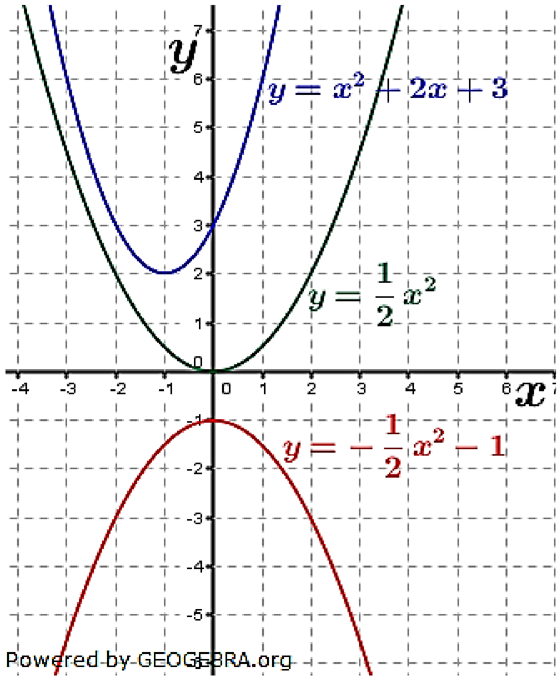
Δh: $\Delta h = h_{Keg} - h_{Pyr} = 18{,}1 - 15{,}7 = 2{,}4$

Die Differenz der Körperhöhen beträgt $2{,}4\ cm$*.*

Lösung W3a/2014

Lösungslogik

Aus der gegebenen Tabelle erkennen wir, dass der y–Wert 3 sowohl für $x = -2$ als auch für $x = 0$ gilt. Die Symmetrieachse der Parabel muss somit in der Mitte von $x = -2$ und $x = 0$ liegen, also bei $x = -1$.
Wir stellen die Scheitelpunktgleichung mit $y = (x+1)^2 + c$ auf.
Die Punktprobe mit z.B. $Q(0|3)$ führt dann zur Gleichung der Parabel, mit der dann die Wertetabelle vollständig ausgefüllt werden kann.
Die nebenstehende Grafik zeigt die Parabeln p_1, p_2 und p_3.
Nachdem p_1 und p_2 eingezeichnet sind, erkennen wir leicht, dass eine Parabel zwischen den beiden eingezeichneten Parabeln keine Schnittpunkte mit diesen hat. Dies ist z.B. die Parabel mit $y = \frac{1}{2}x^2$, was dann mit Rechnung überprüfbar ist.



Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung der Parabel p_1*:*

Wegen der beiden gegebenen Punkte $P(-2|3)$ und $Q(0|3)$ liegt die Symmetrieachse der Parabel bei $x = -1$.

p_1: $y = (x+1)^2 + c$

$3 = (0+1)^2 + c$ | Punktprobe mit $Q(0|3)$ (aus Wertetabelle)

$c = 2$

Die Gleichung der Parabel lautet: $y = (x+1)^2 + 2$ *bzw.* $y = x^2 + 2x + 3$*.*

Vervollständigte Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4	3	2	3	4	11

Funktionsgleichung p_3 ohne Schnittpunkte mit p_1 und p_2:

p_3: z. B. $y = \frac{1}{2}x^2$

Schnittpunkte von p_1 mit p_3:

$p_1 \cap p_3$:	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2$	|	$-\frac{1}{2}x^2$
$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = 0$	|	$\cdot 2$
$x^2 + 4x + 6 = 0$		
$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-6}$	|	p/q-Formel
$\mathbb{L} = \{\}$ wegen $D =< 0$.		

Schnittpunkte von p_2 mit p_3:

$p_2 \cap p_3$:	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$-\frac{1}{2}x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$	|	$+\frac{1}{2}x^2$
$x^2 = -1$		
$\mathbb{L} = \{\}$ wegen $D < 0$.		

Lösung W3b/2014

Lösungslogik

Punktproben mit $A(1|2)$ führen zur vollständigen Parabelgleichungen p_1 und p_2.
Schnittpunkt B der beiden Parabeln über Gleichsetzung der beiden Gleichungen.
Scheitelpunktbestimmung von p_1 und p_2 mit anschließender Steigungs-
berechnung der Geraden S_1B und S_2A beweisen Lucas Aussage.

Klausuraufschrieb

Funktionsgleichungen Parabeln p_1 und p_2:

p_1:	$y = x^2 + px - 1$		
	$2 = 1 - p - 1$	|	Punktprobe mit $A(-1|2)$
	$p = -2$		
	$y = x^2 - 2x - 1$		
p_2:	$y = -x^2 + c$		
	$2 = -1 + c$	|	Punktprobe mit $A(-1|2)$
	$c = 3$		
	$y = -x^2 + 3$		

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 3$	|	$+x^2;\ -3$
$2x^2 - 2x - 4 = 0$	|	$:2$
$x^2 - x - 2 = 0$	|	p/q-Formel

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25} = \frac{1}{2} \pm 1{,}5$$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = -1$

$y_1 = -2^2 + 3 = -1$

Der Punkt B hat die Koordinaten $B(2|-1)$.

Scheitelpunkte S_1 und S_2 von p_1 und p_2:

S_1:	$y = (x-1)^2 - 2$	|	Scheitelpunktform von p_1
	$S_1(1|-2)$		
S_2:	$S_2(0|3)$	|	aus Gleichung ablesbar

Steigung der Geraden durch S_1 und B:

m_{S_1B}: $m = \frac{y_B - y_{S_1}}{x_B - x_{S_1}} = \frac{-1-(-2)}{2-1} = 1$

Steigung der Geraden durch S_2 und A:

m_{S_2A}: $m = \frac{y_A - y_{S_2}}{x_A - x_{S_2}} = \frac{2-3}{-1-0} = 1$

Wegen $m_{S_1B} = m_{S_2A}$ hat Luca Recht.

Lösung W4a/2014

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Karten mit unterschiedlichen Buchstaben ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(A;B)$, $P(B;A)$, $P(B;C)$, $P(C;B)$, $P(A;C)$ und $P(C;A)$. Einfacher ist hier der Weg über das Gegenereignis, nämlich $1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$.
Für die Prüfung der Gewinnpläne erstellen wir eine Tabelle zur Errechnung der Erwartungswerte.

Klausuraufschrieb

$P(A;A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$; $P(B;B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$; $P(C;C) = 0$

$P(zwei\ unterschiedliche\ Buchstaben) = 1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$
$= 1 - \frac{22}{56} = \frac{34}{56} \approx 60{,}7\%$

Erwartungswerte:

$P(zwei\ gleichen\ Buchstaben) = \frac{22}{56}$

$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = P(A;C) + P(C;A) + P(B;C) + P(C;B)$

$P(A;C) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{56}$, $P(C;A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{56}$, $P(B;C) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$, $P(C;B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{56}$

$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = \frac{14}{56}$

Gewinnplan 1

	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-0{,}50$ €	$-2{,}50$ €	$2{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{20}{56}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}20$ €	$-0{,}62$ €	$0{,}89$ €
EX	$-0{,}20$ € $-$ $0{,}62$ € $+$ $0{,}89$ € $=$ $0{,}07$ €		

Gewinnplan 2

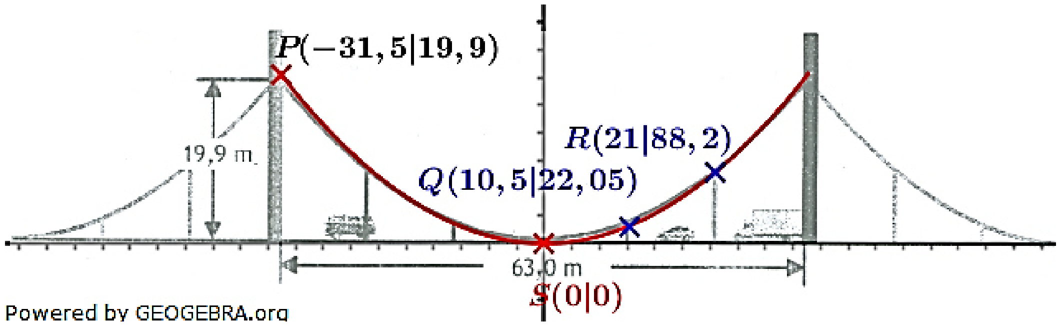
	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-2{,}50$ €	$-0{,}50$ €	$2{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{20}{56}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}98$ €	$-0{,}12$ €	$0{,}89$ €
EX	$-0{,}98$ € $-$ $0{,}12$ € $+$ $0{,}89$ € $=$ $-0{,}21$ €		

Der Spielebetreiber sollte sich für Gewinnplan 1 entscheiden, da er hier auf lange Sicht gesehen einen Gewinn pro Spiel erzielt.

Lösung W4b/2014

Lösungslogik

a) Positionierung der Brücke in ein geeignetes Koordinatensystem (siehe Skizze), Festlegung der Koordinaten des Scheitels sowie einem Aufhängepunkt des Seils am linken (oder rechten) Pylon. Mithilfe dieser Punkte kann die nach oben geöffnete Parabel mittels einer Gleichung beschrieben werden.



b) Die Gesamtbreite zwischen den Pylonen beträgt $63\ m$ und ist in Bezug auf die Drahtseile in sechs gleiche Strecken unterteilt. Somit haben die Tragseile einen Abstand von jeweils $10{,}50\ m$. In der Mitte (Scheitelpunkt) befindet sich kein Tragseil. Da die Parabel symmetrisch zur y–Achse ist, benötigen wir für die Länge der Seile lediglich die Länge des kurzen sowie des langen Seils auf der rechten Seite. Diese Längen mal 4 ergibt dann die Gesamtlänge der Seile.

Klausuraufschrieb

a) Scheitelpunkt der Parabel: $S(0|0)$, linker Aufhängepunkt (Pylon) $P(-31{,}5|19{,}9)$. Gleichung einer nach oben geöffnete Parabel im Scheitelpunkt $S(0|0)$ ist

p: $y = ax^2$ | Punktprobe mit P:

$$19{,}9 = a \cdot (-31{,}5)^2 \Rightarrow a = \frac{19{,}9}{(-31{,}5)^2} = 0{,}02$$

Die Gleichung der Parabel lautet $y = 0{,}02 \cdot x^2$

b) *Anzahl kurzer Tragseile:* 4, *Anzahl langer Tragseile:* 4

Abstand kurzes Tragseil vom Ursprung: $10{,}5\ m$

Abstand langes Tragseil vom Ursprung: $21\ m$

Länge kurzes Tragseil $l_{kurz} = 0{,}02 \cdot 10,5^2 = 2{,}205\ m$

Länge langes Tragseil $l_{lang} = 0{,}02 \cdot 21^2 = 8{,}82\ m$

Gesamtlänge Seile: $l_{gesamt} = 4 \cdot (l_{kurz} + l_{lang}) = 4 \cdot (2{,}205 + 8{,}82) = 44{,}1\ m$

Die Gesamtlänge der Seile beträgt $44{,}1\ m$.