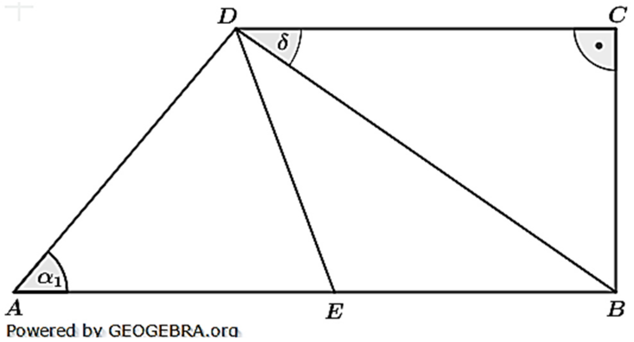
Aufgabe W1a/2015

Im Trapez $ABCD$ gilt:

$\overline{AD} = 8{,}4\ cm$
$\overline{AE} = 7{,}8\ cm$
$\alpha = 50{,}0°$
$\overline{BE} = \overline{DE}$

Berechnen Sie den Winkel δ_1.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks EBD.

Lösung: $\delta_1 = 34{,}8\,°$
$A_{EBD} = 22{,}1\ cm^2$



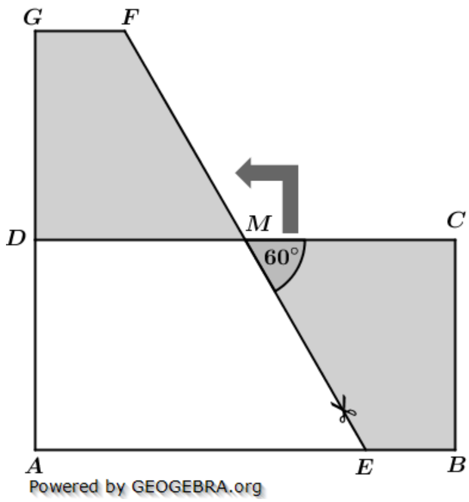
Tipp: Kosinussatz für $\overline{ED}$, Sinussatz für $\sphericalangle AED$, trigonometrischer Flächeninhalt für Dreieck EBD.

Aufgabe W1b/2015

Von einem rechteckigen Blatt Papier wird entlang der gestrichelten Linie ein Stück abgeschnitten und an anderer Stelle angelegt (siehe Skizze).
Es gilt:

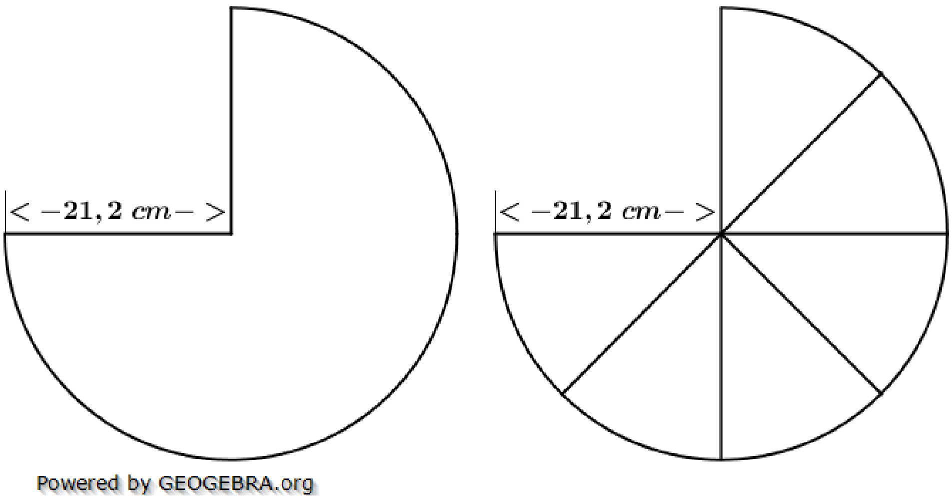
$\overline{AB} = 6e$; $\overline{BC} = 3e$.
M ist der Mittelpunkt von $\overline{CD}$.

Bea behauptet: „Das Viereck $AEFG$ hat den gleichen Umfang wie das Rechteck $ABCD$."
Hat Bea Recht? Begründen Sie Ihre Aussage rechnerisch oder durch eine Argumentation.



Aufgabe W2a/2015

Gegeben sind zwei Dreiviertelkreise. Aus ihnen werden der Mantel eines Kegels und der Mantel einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide gefertigt.



Berechnen Sie die Differenz der beiden Körperhöhen.

Lösung: $h_{Kegel} = 14{,}02\ cm$

$h_{Pyramide} = 13{,}64\ cm$

Aufgabe W2b/2015

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem gleichschenkligen Dreiecksprisma und einem halben Kegel (siehe Grafik rechts).

Es gilt:

$\overline{AC} = \overline{BC}$

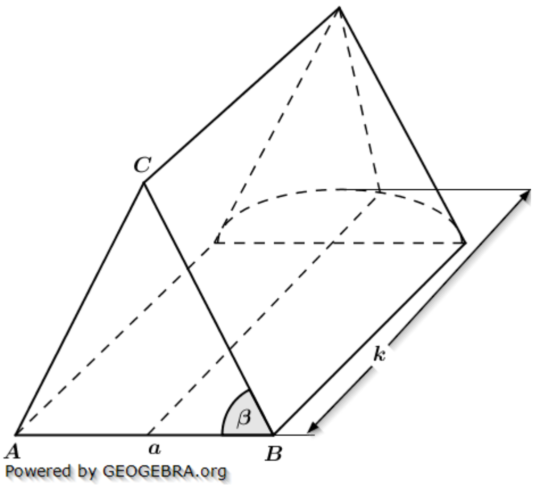
$\overline{AB} = 11{,}4\ cm$

$\beta = 62\,°$

$V_{ges} = 1280\ cm^3$ (Volumen des zusammengesetzten Körpers)

Berechnen Sie die Gesamtlänge k des zusammengesetzten Körpers.

Lösung: $k = 23{,}66\ cm$



Aufgabe W3a/2015

Zu einer verschobenen, nach oben geöffneten Normalparabel p gehört die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5
y	11	6			3	

- Geben Sie die Gleichung der Parabel p an.
- Vervollständigen Sie die Wertetabelle.
- Eine Gerade g hat die Steigung $m = -1$ und geht durch den Punkt $P(-2{,}5|6)$. Weisen Sie rechnerisch nach, dass p und g keine gemeinsamen Schnittpunkte haben.
- Eine Gerade h verläuft parallel zur Geraden g und geht durch den Scheitelpunkt von p. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes R der Geraden h mit der x–Achse.

Lösung: $R(5|0)$; $h = -x + 5$

Aufgabe W3b/2015

Eine Parabel p_1 der Form $y = ax^2 + c$ mit dem Scheitelpunkt $S_1(0|4{,}5)$ schneidet die x–Achse in den Punkten $N_1(-3|0)$ und $N_2(3|0)$.
Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(3|1{,}5)$.

- Die beiden Parabeln haben einen gemeinsamen Punkt T. Berechnen Sie die Koordinaten von T.
- Die Punkte N_1, N_2 und T bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T.
- Der Punkt T bewegt sich auf der Parabel p_1 oberhalb der x-Achse. Für welche Lage von T wird der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2T am größten? Begründen Sie Ihre Aussage rechnerisch oder durch eine Argumentation.

Lösung: $T(2|2{,}5)$; Dreieck N_1N_2T hat $A = 7{,}5\ FE$
Maximaler Flächeninhalt für $T^*(0|4{,}5)$

Aufgabe W4a/2015

In einem Kartenstapel liegen zwölf Karten. Die Verteilung ist in der Tabelle dargestellt. Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Zwei Karten werden gleichzeitig gezogen.

Kartenfarbe			
schwarz		rot	
♣ Kreuz	♠ Pik	♥ Herz	♦ Karo
Anzahl			
6	1	2	3

- Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten?

Lösung: $P(rot\ und\ schwarz) = 53{,}03\%$

Die zwölf Karten werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Es sollen ebenfalls zwei Karten gleichzeitig gezogen werden. Dazu wird der nebenstehende Gewinnplan geprüft.

Ergebnisse	Gewinn
Zweimal Karo	10,00 €
Zweimal Herz	5,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

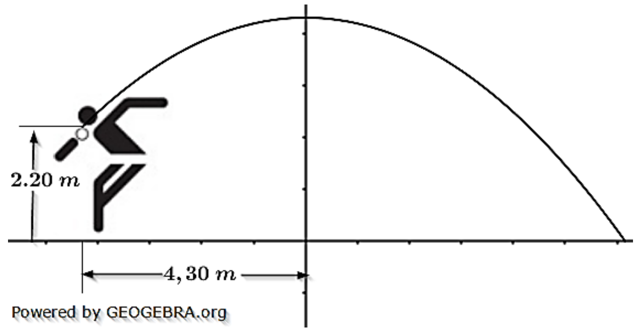
- Berechnen Sie den Erwartungswert.
- Sophie macht den Vorschlag, den Gewinn für „zweimal Karo" auf 20,00 € hochzusetzen und alles andere zu belassen. Der Betreiber des Glücksspiels protestiert und behauptet, er würde dann Verlust machen. Hat der Betreiber Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

Lösung: $E(X) = 0{,}62$ €; $E(X)_2 = 0{,}47$ €; *der Spielebetreiber hat nicht Recht.*

Aufgabe W4b/2015

David und Tom messen sich im Kugelstoßen. Beim Stoß von David verlässt die Kugel seine Hand in einer Höhe von $2{,}20\,m$ (siehe Skizze).

- Nach einer horizontalen Entfernung von $4{,}30\,m$ hat die Kugel die maximale Höhe $3{,}90\,m$ erreicht. Die Flugbahn der Kugel lässt sich annähernd durch eine Parabel mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben. Welche Weite hat David erzielt?



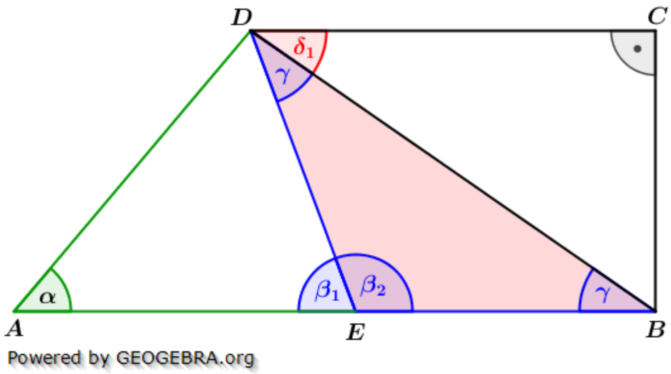
- Tom stößt die Kugel ebenfalls aus dem Stoßkreis. Die Kugel verlässt seine Hand in einer Höhe von $1{,}90\,m$. Die Parabelgleichung für diesen Stoß lautet $y = -\frac{1}{10}x^2 + 3{,}5$. Vergleichen Sie die beiden Kugelstoßweiten.

Lösung: David stößt $10{,}81\,m$

Tom stößt $9{,}92\,m$

David stößt um $0{,}89\,m$ weiter als Tom.

Lösung W1a/2015



Lösungslogik (einfach)

Berechnung von $\overline{ED} = \overline{EB}$ über den Kosinussatz.
Berechnung von β_1 über den Sinussatz.
Berechnung von β_2 als Ergänzungswinkel zu $180\,°$.
Berechnung von $\gamma = \delta_1$ im gleichschenkligen Dreieck EBD (δ_1.und γ sind Wechsel-winkel).
Berechnung der Fläche des Dreiecks EBD über den trigonometrischen Flächeninhalt.

Klausuraufschrieb

$\overline{ED}$: $\quad \overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot cos\alpha \quad$ | Kosinussatz

$\overline{ED} = \sqrt{7{,}8^2 + 8{,}4^2 - 2 \cdot 7{,}8 \cdot 8{,}4 \cdot cos50°} = 6{,}868$

β_1: $\quad \frac{sin\beta_1}{\overline{AD}} = \frac{sin\alpha}{\overline{ED}} \quad$ | Sinussatz

$sin\beta_1 = \frac{\overline{AD} \cdot sin\alpha}{\overline{ED}} = \frac{8{,}4 \cdot sin50°}{6{,}868} = 0{,}93692$

$\beta_1 = sin^{-1}(0{,}93692) = 69{,}54\,°$

β_2: $\quad \beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 69{,}54° = 110{,}46°$

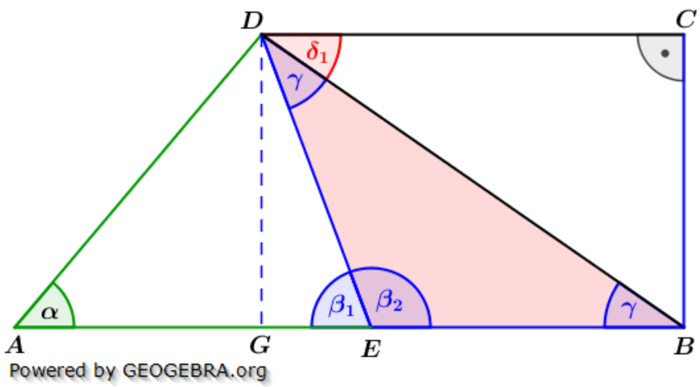
γ: $\quad \gamma = \frac{180° - \beta_2}{2} = \frac{180\,° - 110{,}46°}{2} = 34{,}77\,°$

δ_1: $\quad \delta_1 = \gamma = 34{,}77$

A_{EBD}: $\quad A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ED}^2 \cdot sin\beta_2 \quad$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}868^2 \cdot sin110{,}46° = 22{,}096$

Der Winkel δ_1 hat $34{,}8\,°$, die Fläche des Dreiecks EBD beträgt $22{,}1\ cm^2$.



Lösungslogik (umständlich)

Berechnung von $\overline{DG} = \overline{BC}$ über den $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{AG}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{GE}$ aus der Differenz von $\overline{AE}$ und $\overline{AG}$.
Berechnung von β_1 über den tan.
Berechnung von β_2 als Ergänzungs-winkel zu $180\,°$.
Berechnung von $\gamma = \delta_1$ im gleichschenkligen Dreieck EBD (δ_1.und γ sind Wechsel-winkel).

Berechnung von $\overline{GB}$ über den $\tan\gamma$.
Berechnung von $\overline{EB}$ aus der Differenz von $\overline{GB}$ und $\overline{GE}$.
Berechnung der Fläche A_{EBD} über die Grundseite $\overline{EB}$ und die Höhe $\overline{DG}$.

Klausuraufschrieb

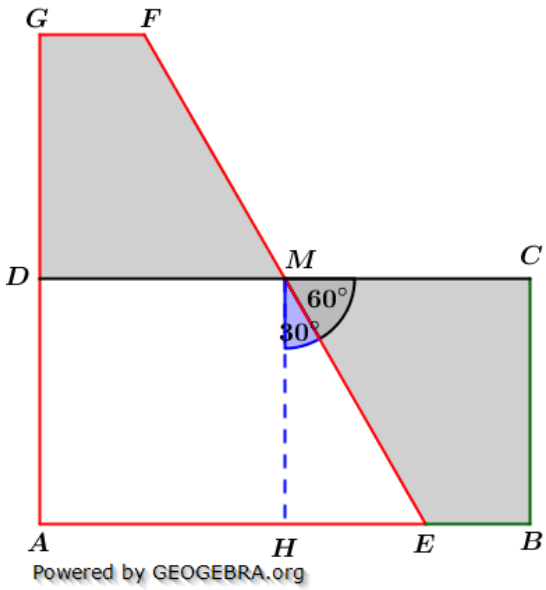
$\overline{DG}$:	$sin\alpha = \frac{\overline{DG}}{\overline{AD}}$	$\mid \quad \cdot \overline{AD}$
	$\overline{DG} = \overline{AD} \cdot sin\alpha = 8{,}4 \cdot sin50° = 6{,}4348$	
$\overline{AG}$:	$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DG}^2} = \sqrt{8{,}4^2 - 6{,}4348^2}$	$\mid$ Satz des Pythagoras
	$\overline{DG} = \sqrt{29{,}1533} = 5{,}399$	
$\overline{GE}$:	$\overline{GE} = \overline{AE} - \overline{AG} = 7{,}8 - 5{,}399 = 2{,}401$	
β_1:	$\frac{\overline{DG}}{\overline{GE}} = tan\alpha$	
	$tan\alpha = \frac{6{,}4348}{2{,}401} = 2{,}680$	
	$\alpha = tan^{-1}(2{,}680) = 69{,}54\,°$	
β_2:	$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 69{,}54° = 110{,}46°$	
γ:	$\gamma = \frac{180° - \beta_2}{2} = \frac{180\,° - 110{,}46°}{2} = 34{,}77\,°$	
δ_1:	$\delta_1 = \gamma = 34{,}77$	
$\overline{GB}$:	$tan\gamma = \frac{\overline{DG}}{\overline{GB}}$	$\mid \quad \cdot \overline{GB};\ :tan\gamma$
	$\overline{GB} = \frac{\overline{DG}}{tan\gamma} = \frac{6{,}4348}{\tan\ 34{,}77°} = 9{,}2688$	
$\overline{EB}$:	$\overline{EB} = \overline{GB} - \overline{GE} = 9{,}2688 - 2{,}401 = 6{,}8678$	
A_{EBD}:	$A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{DG}$	$\mid$ Die Höhe $\overline{DG}$ liegt außerhalb EBD
	$A_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}8678 \cdot 6{,}4348 = 22{,}096$	

Der Winkel δ_1 hat $34{,}8\,°$, die Fläche des Dreiecks EBD beträgt $22{,}1\ cm^2$.

Lösung W1b/2015

Lösungslogik

Durch eine Argumentation:
Siehe Klausuraufschrieb.
Durch Berechnung:
Der Umfang des Rechtecks $ABCD$ ist:
$2 \cdot (\overline{AB} + \overline{AD})$
Der Umfang des Vierecks $AEFG$ setzt sich zusammen aus den Strecken $\overline{AD}$, $\overline{DG} = \overline{MD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$, $\overline{GF} = \overline{EB}$ $\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \overline{HE}$ sowie $2 \cdot \overline{EM}$.
Berechnung $\overline{HE}$ über $\tan 30°$.
Berechnung $\overline{EM}$ über $\cos 30°$.
Berechnung des Umfangs des Vierecks $AEFG$.



Klausuraufschrieb

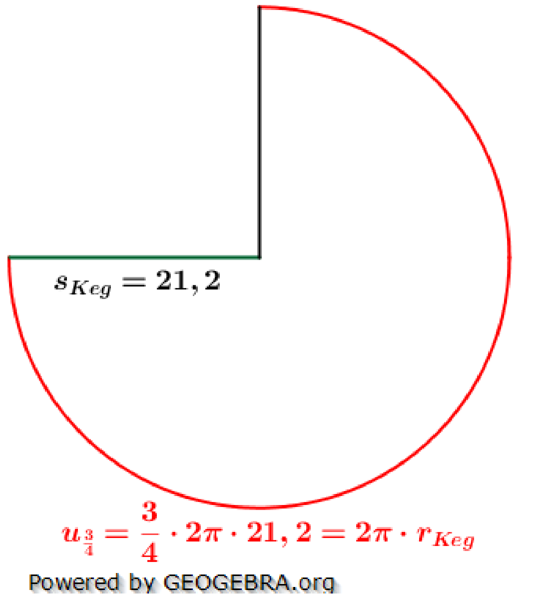
Durch eine Argumentation:
Vom Abschnitt $EBCM$ wird lediglich die Strecke $\overline{EB}$ zur Strecke $\overline{GF}$ und $\overline{BC}$ zu $\overline{DG}$. Nicht mehr enthalten ist somit die Strecke $\overline{DC}$. Es kommt allerdings die Schnittstrecke $\overline{EM}$ zweimal hinzu, also insgesamt die Strecke $\overline{EF}$. Diese ist jedoch länger, als die Strecke $\overline{DC}$.
Bea hat nicht Recht.

Durch Berechnung:
$u_{ABCD} = 2 \cdot \left(\overline{AB} + \overline{AD}\right) = 2 \cdot (6e + 3e) = 18e$
u_{AEFG}: $u_{AEFG} = \overline{AG} + \overline{GF} + \overline{FE} + \overline{AE}$
$\overline{AG}$: $\overline{AG} = \overline{AD} + \overline{DG} = 2 \cdot \overline{AD} = 6e$
$\overline{GF}$: $\overline{GF} = \overline{EB} = \overline{HB} - \overline{HE}$ mit $\overline{HB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 6e = 3e$
$\overline{HE}$: $\tan 30° = \frac{\overline{HE}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{HE}}{3e}$ $\quad | \quad \cdot 3e$
$\overline{HE} = 3e \cdot \tan 30° = 3e \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}e$
$\overline{GF} = 3e - \sqrt{3}e$
$\overline{FE}$: $\overline{FE} = 2 \cdot \overline{EM}$
$\frac{\overline{HM}}{\overline{EM}} = \cos 30°$ $\quad | \quad \cdot \overline{EM};\ : \cos 30°$
$\overline{EM} = \frac{\overline{HM}}{\cos 30°} = \frac{3e}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6e}{\sqrt{3}} = 2e \cdot \sqrt{3}$
$\overline{FE} = 4e \cdot \sqrt{3}$
$\overline{AE}$: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 6e - \left(3e - \sqrt{3}e\right) = 3e + \sqrt{3}e$
$u_{AEFG} = 6e + 3e - \sqrt{3}e + 4e \cdot \sqrt{3} + 3e + \sqrt{3}e = 12e + 4e \cdot \sqrt{3}$
Wegen $18e \neq 12e + 4e \cdot \sqrt{3}$ *hat Bea nicht Recht.*

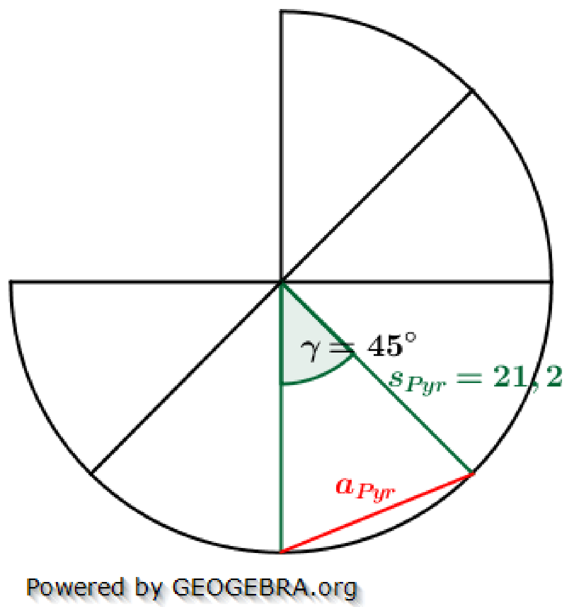
Lösung W2a/2015

Lösungslogik

Kegel:
Der Radius des Dreiviertelkreises wird zur Seitenlänge s_{Keg} des Kegels. Die Länge des Kreisbogens des Dreiviertelkreises wird zum Umfang des Grundkreises des Kegels. Über diesen Umfang ermitteln wir den Radius r_{Keg} des Kegels. Mithilfe des Satz des Pythagoras ergibt sich dann die Höhe h_{Keg} des Kegels.



Sechseckpyramide:
Der Radius des Dreiviertelkreises wird zur Seitenlänge s_{Pyr} der Pyramide. Der Spitzenwinkel eines Seitendreicks ergibt sich aus dem Öffnungswinkel des Dreiviertelkreises von $270°$ dividiert durch 6 zu $\gamma = 45°$.
Wir berechnen nun die Seitenkante a_{Pyr} der Pyramide über den $sin\frac{\gamma}{2}$.
Die Grundfläche der Sechseck-pyramide ist ein gleichmäßiges Sechseck. Ein Teildreieck dieses Sechsecks ist ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen a_{Pyr}. Die Höhe der Pyramide lässt sich nun über den Satz des Pythagoras ermitteln aus
$h_{Pyr} = \sqrt{s_{Pyr}^2 - a_{Pyr}^2}$.



Klausuraufschrieb

Kegel:
$s_{Keg} = 21,2$

$u_{\frac{3}{4}}$: $\quad u_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 21,2 = 99,90$

r_{Keg}: $\quad u_{\frac{3}{4}} = 2\pi \cdot r_{Keg} = 99,90 \qquad | \quad :2\pi$

$\quad r_{Keg} = \frac{99,90}{2\pi} = 15,9$

h_{Keg}: $\quad h_{Keg} = \sqrt{s_{Keg}^2 - r_{Keg}^2} = \sqrt{21,2^2 - 15,9^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$\quad h_{Keg} = \sqrt{196,63} = 14,02$

Sechseckpyramide:

$s_{Pyr} = 21{,}2$

γ: $\gamma = \frac{270°}{6} = 45\,°$

a_{Pyr}: $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a_{Pyr}}{2}}{s_{Pyr}}$ | $\cdot s_{Pyr}$

$\frac{a_{Pyr}}{2} = s_{Pyr} \cdot sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ | $\cdot 2$

$a_{Pyr} = 2 \cdot s_{Pyr} \cdot sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 21{,}2 \cdot sin22{,}5° = 16{,}2258$

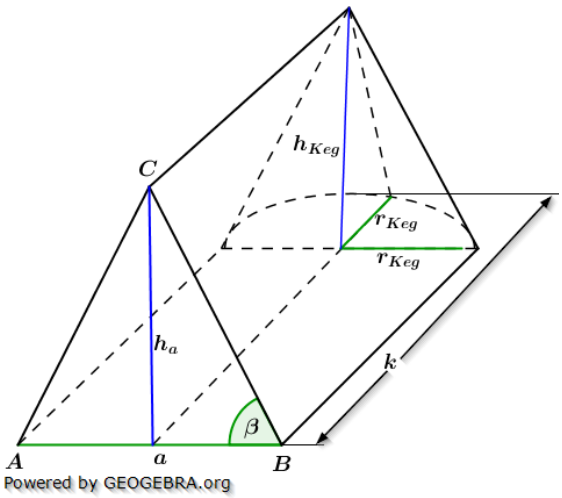
h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{s_{Pyr}^2 - a_{Pyr}^2} = \sqrt{21{,}2^2 - 16{,}2258^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{186{,}1634} = 13{,}64$

Lösung W2b/2015

Lösungslogik

Das gegebene Volumen $V_{Körper} = 1280\ cm^3$ setzt sich zusammen aus dem Volumen des Dreiecksprismas zuzüglich dem Volumen des Halbkegels. Der Radius r_{Keg} ist gleich der halben Länge der Kante a. Die Höhe h_a zur Berechnung des Volumens des Dreiecksprismas ermitteln wir über den $tan\beta$. Die Höhe des Dreiecksprismas ergibt sich aus $k - r_{Keg}$.
Zur Berechnung des Volumen des Halbkegels ist $h_{Keg} = h_a$.
Alle erforderlichen Werte sind nun bekannt, wir stellen die Formel für das Gesamtvolumen auf und lösen die Formel nach k auf.



Klausuraufschrieb

$V_{Körper} = 1280 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a.\left(k - r_{Keg}\right) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

r_{Keg}: $r_{Keg} = \frac{a}{2} = 5{,}7$

h_a: $tan\beta = \frac{h_a}{\frac{a}{2}}$ | $\cdot \frac{a}{2}$

$h_a = \frac{a}{2} \cdot tan\beta = 5{,}7 \cdot tan62° = 10{,}72$

h_{Keg}: $h_{Keg} = h_a$

Alle Unbekannten sind nun bekannt.

k: $\frac{1}{2} \cdot 11{,}4 \cdot 10{,}72 \cdot (k - 5{,}7) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5{,}7^2 \cdot 10{,}72 = 1280$

$61{,}104 \cdot (k - 5{,}7) + 182{,}3657 = 1280$ | $-182{,}3657$

$61{,}104 \cdot (k - 5{,}7) = 1097{,}6343$ | $:61{,}104$

$k - 5{,}7 = 17{,}9634$ | $+5{,}7$

$k = 23{,}66$

Die Gesamtlänge von k beträgt $23{,}66\ cm$.

Lösung W3a/2015

Lösungslogik

Parabelgleichung:
Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + bx + c$. In der Wertetabelle lesen wir den Punkt $P(0|11)$ ab, was zu $c = 11$ führt (c ist y–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit einem der beiden anderen gegebenen Punkte errechnen wir b.
Wertetabelle:
Mithilfe der gefundenen Parabelgleichung ermitteln wir die fehlenden y–Werte.
Gerade g:
Mit der gegebenen Steigung $m = -1$ lautet die allgemeine Gleichung $y = -x + b$.
Mithilfe einer Punktprobe mit $P(-2{,}5|6)$ errechnen wir b.
Anschließend schneiden wir die Parabel p mit der Geraden g und stellen fest, dass die daraus entstehende Gleichung keine Lösung hat.
Gerade h:
Wegen Parallelität hat auch h die Steigung $m = -1$. Wir ermitteln zunächst den Scheitelpunkt S der Parabel p, machen eine Punktprobe mit der Geraden h und erhalten die vollständige Geradengleichung.
Wir setzen diese Geradengleichung auf 0, lösen nach x auf und erhalten dadurch den Schnittpunkt von h mit der x–Achse.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung:

p:	$y = x^2 + bx + c$	allgemeine Form der Parabel
	$S_y(0|11)$	Schnittpunkt mit der y-Achse
	$y = x^2 + bx + 11$	
	$P_1(1|6);\ P_2(4|3)$	Punkte aus Wertetabelle
	$6 = 1^2 + b + 11$	Punktprobe mit P_1
	$6 - 12 = b \implies b = -6$	

Die Gleichung der Parabel lautet $y = x^2 - 6x + 11$.
Wertetabelle:

$y_2 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3$	y-Wert für $x = 2$
$y_3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 11 = 2$	y-Wert für $x = 3$
$y_5 = 6$	y-Wert für $x = 5$

x	0	1	2	3	4	5
y	11	6	3	2	3	6

Gerade g:

g:	$y = -x + b$	Geradengleichung mit $m = -1$
	$P(-2{,}5|6)$	
	$6 = -(-2{,}5) + b$	Punktprobe mit $P(-2{,}5|6)$
	$6 - 2{,}5 = b \implies b = 3{,}5$	
	$y = -x + 3{,}5$	
$p \cap g$:	$x^2 - 6x + 11 = -x + 3{,}5$	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
	$x^2 - 5x + 7{,}5 = 0$	p/q-Formel
	$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 7{,}5}$	
	$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{-0{,}75}$	

Wegen $D < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung und damit haben p und g keine gemeinsamen Punkte.

Gerade h:

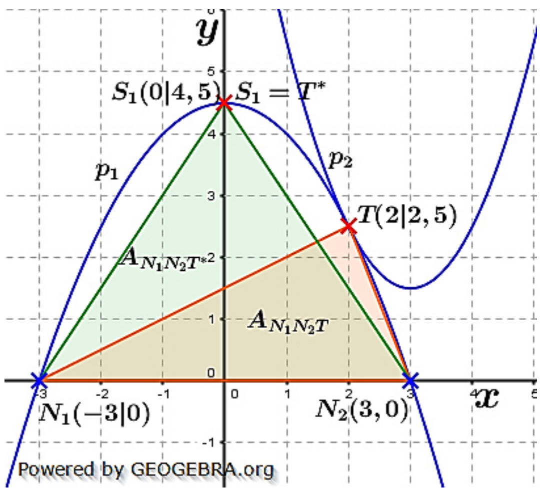
S_p:	$y = x^2 - 6x + 11$	|	Parabelgleichung von p
	$y = (x-3)^2 - 9 + 11$	|	quadratische Ergänzung
	$y = (x-3)^2 + 2$	|	Scheitelpunktform von p
	$S_p(3\|2)$	|	Koordinaten des Scheitels
h:	$y = -x + b$	|	Geradengleichung mit $m = -1$
	$2 = -3 + b$	|	Punktprobe mit $S_p(3\|2)$
	$b = 5$		
	$y = -x + 5$		
	$0 = -x + 5 \Longrightarrow \; x = 5$	|	Schnittpunkt mit der x-Achse

Die Koordinaten des Schnittpunktes von h mit der x–Achse sind $R(5|0)$.

Lösung W3b/2015

Lösungslogik

Parabelgleichungen:
Für die Parabel p_1 lesen wir c aus dem gegebenen Scheitelpunkt S_1 mit $4{,}5$ ab. (c ist y–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit N_1 oder N_2 errechnet sich a.
Für die Parabel p_2 stellen wir die Scheitelpunktgleichung auf und wandeln diese in die allgemeine Form um.



Gemeinsamer Punkt:
Mithilfe der gefundenen Parabelgleichungen ermitteln wir den gemeinsamen Punkt T durch Gleichsetzung.
Dreieck N_1N_2T:
Die Basis des Dreiecks ist die Strecke zwischen N_1 und N_2. Die Höhe des Dreiecks entspricht der y–Koordinate des Punktes T.
Maximaler Flächeninhalt für Dreieck $N_1N_2T^*$
T wandert auf p_1 oberhalb der x–Achse nach T^*. Im Scheitel von p_1 ist der y–Wert des Punkte T^* maximal und damit auch die Höhe des Dreiecks $N_1N_2T^*$ sowie dessen Fläche.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichungen:

p_1:	$y = ax^2 + c$		
	$S_1(0\|4{,}5)$	|	Schnittpunkt mit der y-Achse
	$c = 4{,}5$		
	$y = ax^2 + 4{,}5$		
	$N_1(-3\|0)$; $N_2(3\|0)$	|	gegebene Punkte
	$0 = 3^2a + 4{,}5$	|	Punktprobe mit N_2
	$-4{,}5 = 9a \;\Longrightarrow\; a = -\frac{1}{2}$		

Die Gleichung der Parabel p_1 lautet $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$.

p_2:	$y = (x - x_S)^2 + y_S$	| Scheitelpunktform
	$S_2(3\|1{,}5)$	| gegebener Scheitel
	$y = (x-3)^2 + 1{,}5$	
	$y = x^2 - 6x + 10{,}5$	

Die Gleichung der Parabel p_2 lautet $y = x^2 - 6x + 10{,}5$.

Gemeinsamer Punkt:

$p_1 \cap p_2$:	$x^2 - 6x + 10{,}5 = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$	| Schnittpunkte durch Gleichsetzung
	$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0$	| $\cdot \frac{2}{3}$
	$x^2 - 4x + 4 = 0$	
	$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4}$	| p/q-Formel
	$x_T = 2$	
	$y_T = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4{,}5 = 2{,}5$	

Der gemeinsame Punkt T hat die Koordinaten $T(2|2{,}5)$.

Dreieck N_1N_2T:

$A_{N_1N_2T}$:	$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$	| Flächenformel Dreieck
	$c = \overline{N_1N_2} = 6$	
	$h_c = y_T = 2{,}5$	
	$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$	

Das Dreieck N_1N_2T hat eine Fläche von $7{,}5\ FE$.

Dreieck $N_1N_2T^*$:

Die y–Koordinate von T^* auf p_1 ist dann am größten, wenn T in den Scheitelpunkt S_1 von p_1 wandert. Diese ist jedoch $4{,}5$. Damit ist auch die Dreiecksfläche $N_1N_2T^*$ am größten.

$A_{N_1N_2T^*}$:	$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$	| Flächenformel Dreieck
	$c = \overline{N_1N_2} = 6$	
	$h_c = y_{T^*} = 4{,}5$	
	$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4{,}5 = 13{,}5$	

Mit T^* im Scheitelpunkt von p_1 hat das Dreieck $N_1N_2T^*$ eine Fläche von $13{,}5\ FE$.

Lösung W4a/2015

Lösungslogik

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für die schwarzen und die roten Karten.
Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen.
Eine rote und eine schwarze Karte hat die Ergebnisse „schwarz, rot“ oder „rot, schwarz“.
Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.
Berechnung des Erwartungswertes für geänderten Gewinnplan über eine Tabelle.

Klausuraufschrieb

$P(schwarz) = \frac{7}{12}; \quad P(rot) = \frac{5}{12}$

$P(eine\ rote\ und\ eine\ schwarze\ Karte) = P\{(r;s),(s,r)\} = P(r,s) + P(s,r)$

$P(r,s) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132} \qquad P(r,s) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$

$P(eine\ rote\ und\ eine\ schwarze\ Karte) = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} \approx 53{,}03\ \%$

Erwartungswerte:

$P(zweimal\ Karo) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{132} \qquad P(zweimal\ Herz) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

Gewinnplan 1

	$P(zweimal\ Karo)$	$P(zweimal\ Herz)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-9{,}00$ €	$-4{,}00$ €	$1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{2}{132}$	$\frac{6}{132}$	$\frac{124}{132}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}14$ €	$-0{,}18$ €	$0{,}94$ €
EX	$-0{,}14\ € - 0{,}18\ € + 0{,}94\ € = 0{,}62\ €$		

Der Spielebetreiber kann auf lange Sicht gesehen mit einer Einnahme von $0{,}62$ € pro Spiel rechnen.

Gewinnplan 2

	$P(zweimal\ Karo)$	$P(zweimal\ Herz)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-19{,}00$ €	$-4{,}00$ €	$1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{2}{132}$	$\frac{6}{132}$	$\frac{124}{132}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}29$ €	$-0{,}18$ €	$0{,}94$ €
EX	$-0{,}29\ € - 0{,}18\ € + 0{,}94\ € = 0{,}47\ €$		

Der Spielebetreiber kann nach wie vor mit einer Einnahme pro Spiel rechnen, der Spielebetreiber hat nicht Recht.

Lösung W4b/2015

Lösungslogik

Aus der Skizze lesen wir ab, dass die y–Achse des Koordinatensystems gleichzeitig Symmetrieachse der Wurfparabel ist. Damit befindet sich der Abwurfpunkt bei $P(-4{,}3|2{,}2)$.

Parabelgleichung und Wurfweite von David:

Aus dem Aufgabentext ergibt sich, dass sich der Scheitel der Parabel bei $S_{David}(0|3{,}9)$ befindet. Damit ist $c = 3{,}9$ (c ist y–Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit $P(-4{,}3|2{,}2)$ errechnen wir a.

Die Weite, die David stößt, ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Parabel mit der x–Achse für ein positives x. Dem errechneten Wert müssen noch $4{,}3\ m$ zugeschlagen werden wegen der Abwurfstelle bei $x = -4{,}3$.

Wurfweite von Tom:

Da die Parabelgleichung gegeben ist, ist die Angabe der Abwurfhöhe von Tom überflüssig. Die Wurfweite von Tom ergibt sich wie die Wurfweite von David über die Rechte Nullstelle von Toms Parabelgleichung zuzüglich $4{,}3\ m$.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichungen und Wurfweite von David:

p_{David}: $y = ax^2 + c$

$S_1(0|3,9)$ | Schnittpunkt mit der y-Achse

$c = 3,9$

$y = ax^2 + 3,9$

$P(-4,3|2,2)$ | Abwurfstelle David

$2,2 = (-4,3)^2 a + 3,9$ | Punktprobe mit P

$-1,7 = 18,49a$

$a = -\frac{1,7}{18,49} = -0,092$

$y = -0,092x^2 + 3,9$

$-0,092x^2 + 3,9 = 0$ | Nullstellenberechnung

$0,092x^2 = 3,9$ | $:0,092$

$x^2 = \frac{3,9}{0,092} = 42,3913$ | $\sqrt{\quad}$

$x_1 = 6,51$

$w_{David} = 6,51 + 4,3 = 10,81$

David stößt $10,81\ m$ *weit.*

Wurfweite von Tom:

p_{Tom}: $y = -\frac{1}{10}x^2 + 3,5$

Sei Q der Abstoßpunkt, dann gilt:

$1,90 = -\frac{1}{10}x^2 + 3,5$ | $\cdot 10;\ +x^2;\ -19$

$x^2 = 35 - 19 = 16$

$x_{1,2} = \pm 4$

Da sich die Abwurfstelle links des Ursprungs befindet, gilt:

$Q(-4|1,9)$

Berechnung des rechten Auftreffpunktes der Kugel:

$-\frac{1}{10}x^2 + 3,5 = 0$ | Nullstellenberechnung

$0,1x^2 = 3,5$ | $:0,1$

$x^2 = \frac{3,5}{0,1} = 35$ | $\sqrt{\quad}$

$x_1 = 5,92$

$w_{Tom} = 5,92 + 4 = 9,92$

Tom stößt $9,92\ m$ *weit.*

$w_{David} - w_{Tom} 10,81 - 9,92 = 0,89$

David stößt um $0,89\ m$ *weiter als Tom.*