



Aufgabe W1a/2016

Die Eckpunkte des Vierecks $ABCD$ liegen auf den Parallelen g und h .
Die Parallelen haben einen Abstand von $9,0\text{ cm}$.

Es gilt:

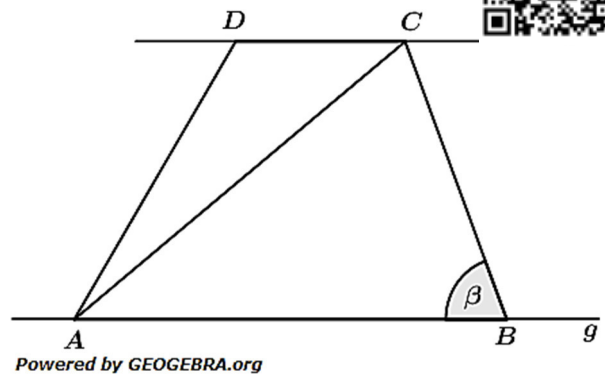
$$\overline{AD} = 10,4\text{ cm}$$

$$\beta = 70^\circ$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}.$$

Berechnen Sie den Umfang des Vierecks $ABCD$.

Lösung: $u_{ABCD} = 39,5\text{ cm}$



Aufgabe W1b/2016

Für das Papierdreieck gilt:

$$\gamma = 50^\circ$$

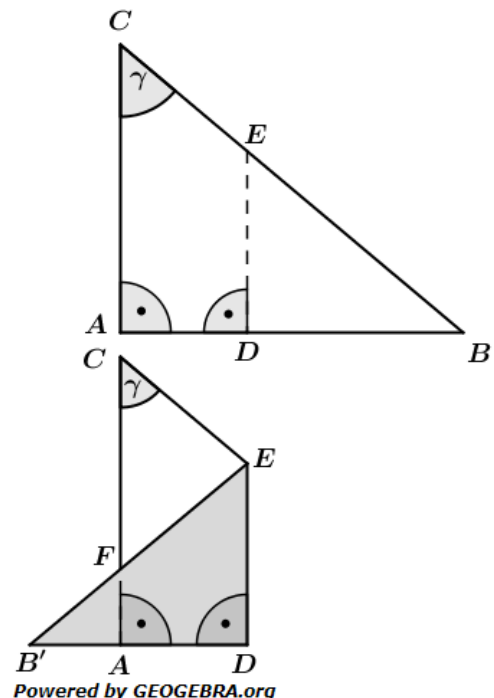
$$\overline{AC} = 11,4\text{ cm}$$

$$\overline{AD} = 5,0\text{ cm}.$$

Das Dreieck wird entlang der Strecke \overline{DE} gefaltet (siehe Skizze).

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ADEF$.

Lösung: $A_{ADEF} = 25,5\text{ cm}^2$



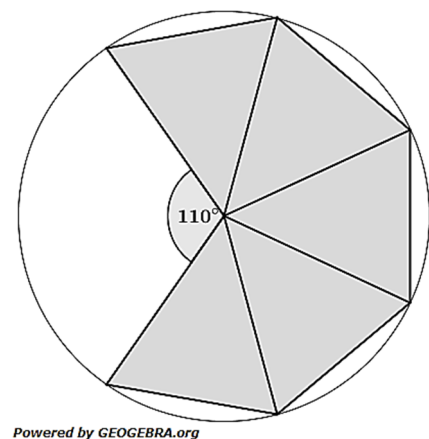
Aufgabe W2a/2016

Aus einer Kreisfläche wird die Mantelfläche einer regelmäßigen, fünfseitigen Pyramide ausgeschnitten.

Der Kreis hat einen Radius von $8,3\text{ cm}$.

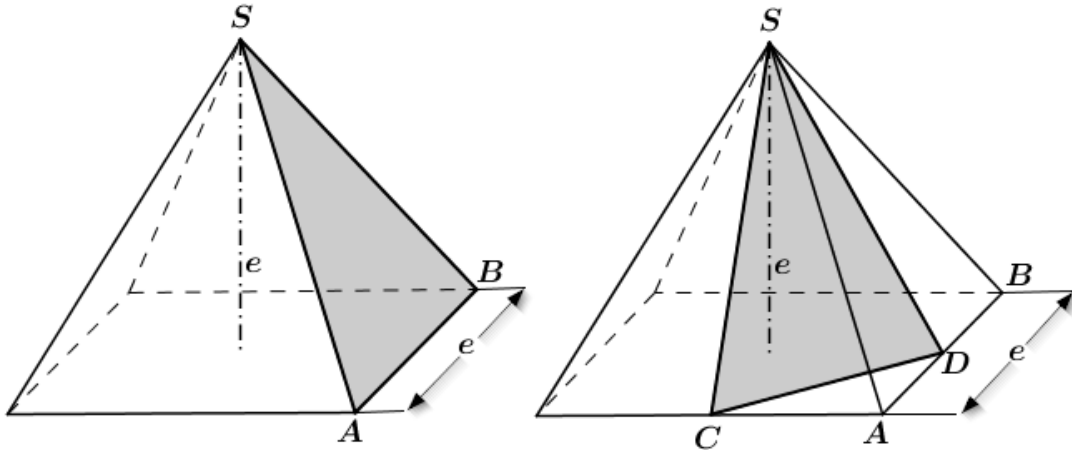
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide

Lösung: $V_{pyr} = 163\text{ cm}^3$



Aufgabe W2b/2016

Eine quadratische Pyramide ist zweimal abgebildet. In der linken Abbildung ist das Dreieck ABS markiert und in der rechten das Dreieck CDS . Die Punkte C und D halbieren jeweils die Grundkante.



Powered by GEOGEBRA.org

Welche der folgenden Formeln gehört zur Dreiecksfläche ABS und welche zur Dreiecksfläche CDS ? Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne Verwendung gerundeter Werte.

(1) $A = \frac{3e^2}{8}$

(2) $A = \frac{e^2}{4}\sqrt{6}$

(3) $A = \frac{e^2}{4}\sqrt{5}$

Lösung:

Formel (3) für Dreieck ABS
Formel (1) für Dreieck CDS

Aufgabe W3a/2016

Das Schaubild zeigt einen Ausschnitt der verschobenen Normalparabel p_1 .

Die Punkte $A(-3|-1)$ und $B(1|-1)$ liegen auf p_1 .

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p_1 .

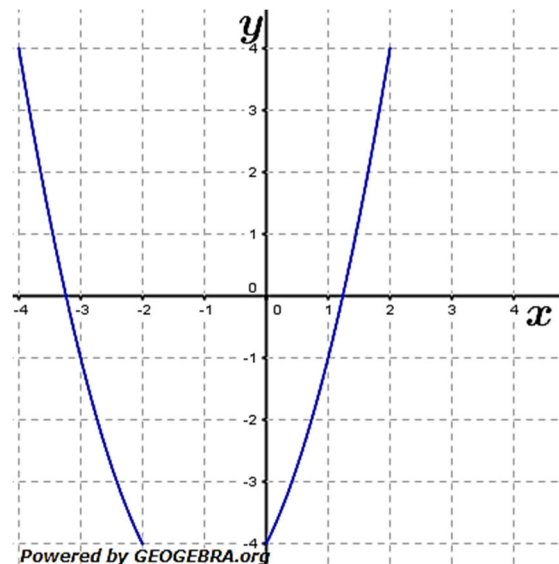
Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S(0|8)$.

Durch die beiden Scheitelpunkte verläuft eine Gerade g .

Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g .

Eine Gerade h verläuft parallel zu g und geht durch einen der beiden Schnittpunkte von p_1 und p_2 .

Berechnen Sie eine mögliche Gleichung der Geraden h .



Powered by GEOGEBRA.org

Lösung: $p_1: y = (x + 1)^2 - 5$

$S_{p_1}(-1|-5)$

$g: y = 13x + 8$

$S_1(-3|1); S_2(2|4)$

$h_1: y = 13x + 40; h_2: y = 13x - 22$

Aufgabe W3b/2016

Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + c$ und geht durch den Punkt $R(4|0)$.
 Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_2 die Gleichung $y = -x^2 + 1$.
 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q von p_1 und p_2 .

Die Scheitelpunkte S_1 und S_2 sowie die Schnittpunkte P und Q der beiden Parabeln bilden das Viereck S_1PS_2Q .

Mia behauptet: „Das Viereck hat zwei rechte Winkel.“

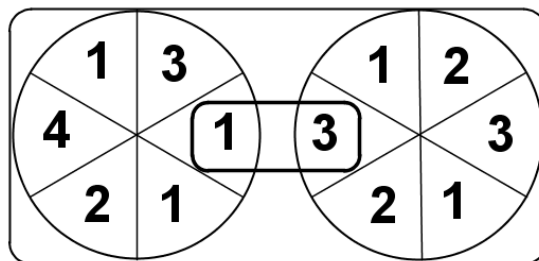
Hat Mia recht? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

Lösung: $p_1: y = \frac{1}{4}x^2 - 4$; $P(-2|-3)$; $Q(2|-3)$

Mia hat recht.

Aufgabe W4a/2016

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung werden zwei Glücksräder eingesetzt. Beide Glücksräder werden gedreht. Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster eine zweistellige Zahl. Die Abbildung zeigt die Zahl 13. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen?



Die Glücksräder werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft. Berechnen Sie den Erwartungswert.

Gewinnplan	
Ergebnisse	Gewinn
Zwei gleiche Ziffern	3,00 €
Zahl größer als 40	5,00 €
Restliche Möglichkeiten	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 2,00 €	

Bei der Wohltätigkeitsveranstaltung soll ein höherer Erlös erzielt werden. Dazu soll beim rechten Glücksrad einer der beiden Dreien durch eine fünf ersetzt werden. Der Gewinnplan bleibt gleich.

Wäre dies vorteilhaft? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder durch eine Argumentation.

Lösung: $P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = \frac{2}{9}$

$E(X) = -0,33 \text{ €}$ (aus der Sicht des Spielers)

Die Veränderung ist vorteilhaft.

Aufgabe W4b/2016

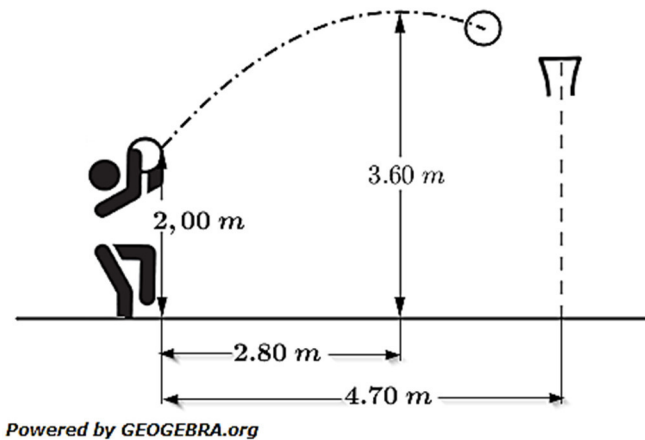
Dirk wirft im Basketballspiel auf den Korb (siehe Skizze).

Die annähernd parabelförmige Flugkurve lässt sich mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben. Geben Sie eine mögliche Gleichung der zugehörigen Parabel p an.

Trifft Dirk bei diesem Wurf direkt in den Korb, der in einer Höhe von $3,05\text{ m}$ hängt? Begründen Sie durch Rechnung.

Vor Dirk steht der Abwehrspieler Dennis im Abstand von $0,60\text{ m}$. Mit nach oben gestreckten Armen erreicht Dennis eine Höhe von $2,30\text{ m}$.

Berührt er den Ball ohne hochzuspringen? Begründen Sie durch Rechnung.



Lösung: $y = -0,2041x^2 + 3,6$

Dirk trifft nicht in den Korb, da der Wurf zu tief ist.

Dennis berührt den Ball nicht, da der Wurf für ihn zu hoch ist.

Lösung W1a/2016

Lösungslogik

Wegen $g \parallel h$ mit einem Abstand von 9 cm lässt sich die Strecke \overline{BC} über den $\sin\beta$ berechnen.

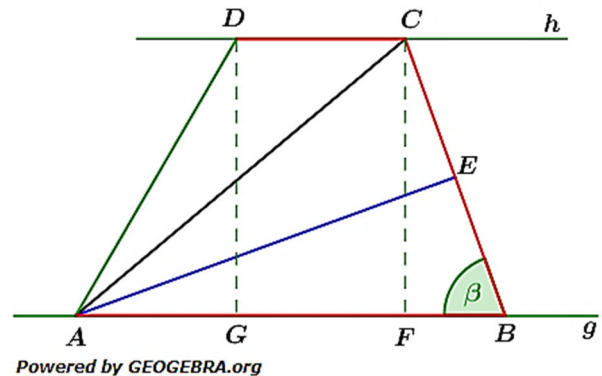
Wegen $\overline{AB} = \overline{AC}$ ist das Dreieck ABC gleichseitig. Damit ist $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Darüber berechnen wir die Strecke \overline{AB} über den $\cos\beta$.

Wir berechnen die Strecke \overline{FB} über den Satz des Pythagoras.

Wir berechnen die Strecke \overline{AG} über den Satz des Pythagoras.

Die Strecke \overline{CD} errechnet sich dann über $\overline{CD} = \overline{AB} - \overline{AG} - \overline{FB}$.

Der Umfang des Vierecks $ABCD$ kann gebildet werden.



Klausuraufschrieb

$$\overline{BC}: \quad \sin\beta = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}; : \sin\beta$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{CF}}{\sin\beta} = \frac{9}{\sin 70^\circ} = 9,5776$$

Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig. Deswegen gilt $\overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$.

$$\overline{AB}: \quad \cos\beta = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB}; : \cos\beta$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BE}}{\cos\beta} = \frac{4,7888}{\cos 70^\circ} = 14,0$$

$$\overline{FB}: \quad \overline{FB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{FC}^2} = \sqrt{9,5776^2 - 9^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{FB} = \sqrt{10,7304} = 3,2757$$

$$\overline{AG}: \quad \overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{GD}^2} = \sqrt{10,4^2 - 9^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{27,16} = 5,2115$$

$$\overline{DC}: \quad \overline{DC} = \overline{AB} - \overline{AG} - \overline{FB} = 14,0 - 5,2115 - 3,2757 = 5,5128$$

$$u_{ABCD}: \quad u_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD}$$

$$u_{ABCD} = 14,0 + 9,5776 + 5,5128 + 10,4 = 39,4904$$

Der Umfang des Vierecks $ABCD$ beträgt $39,5 \text{ cm}$.

Lösung W1b/2016

Lösungslogik

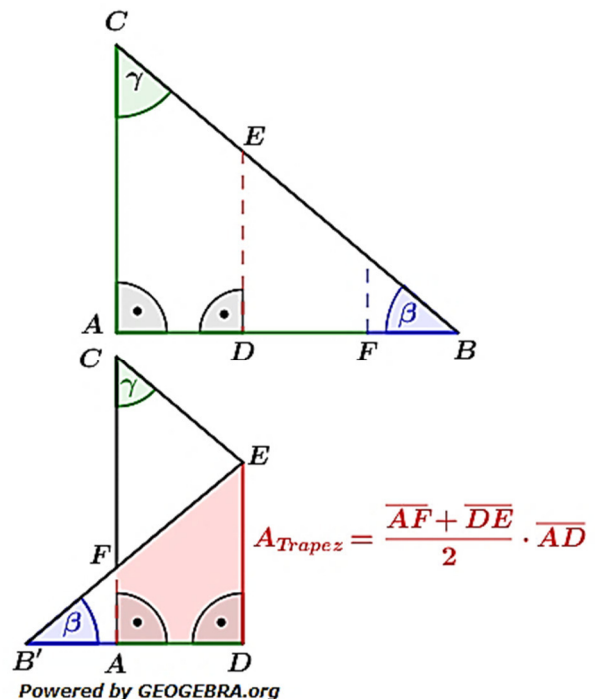
Wir bestimmen zunächst den Winkel β als Ergänzungswinkel im rechtwinkligen Dreieck ABC .

Berechnung der Strecke \overline{AB} über den $\tan\beta$.

Wegen der Klappung an der Kante \overline{DE} ist die Strecke $\overline{DF} = \overline{AD} = 5 \text{ cm}$. Dadurch können wir die Strecke \overline{FB} bestimmen. Jetzt lässt sich \overline{DE} über den $\tan\beta$ berechnen.

Weiterhin ist $\overline{B'A} = \overline{FB}$ (siehe Grafik). Damit lässt sich \overline{DE} als auch \overline{AF} über den $\tan\beta$ berechnen.

Wir berechnen abschließend noch die Fläche des Trapezes über dessen Flächenformel.



Klausuraufschrieb

$$\beta: \quad \beta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\overline{AB}: \quad \tan\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad | \quad \cdot \overline{AB}; : \tan\beta$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\tan\beta} = \frac{11,4}{\tan 40^\circ} = 13,586$$

$$\overline{FB}: \quad \overline{FB} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AD} = 13,586 - 10 = 3,586$$

$$\overline{B'A}: \quad \overline{B'A} = \overline{FB} = 3,586$$

$$\overline{AF}: \quad \tan\beta = \frac{\overline{AF}}{\overline{B'A}} \quad | \quad \cdot \overline{B'A}$$

$$\overline{AF} = \overline{B'A} \cdot \tan\beta = 3,586 \cdot \tan 40^\circ = 3,0$$

$$\overline{DE}: \quad \tan\beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{B'D}} \quad | \quad \cdot \overline{B'D}$$

$$\overline{DE} = \overline{B'D} \cdot \tan\beta = 8,586 \cdot \tan 40^\circ = 7,20$$

$$A_{\text{Trapez}}: \quad A_{\text{Trapez}} = \frac{\overline{AF} + \overline{DE}}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{3,0 + 7,20}{2} \cdot 5 = 25,5$$

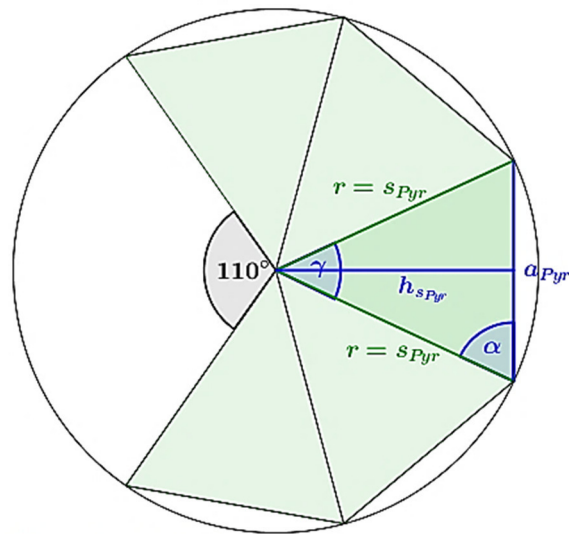
Die Fläche des Vierecks ADEF beträgt $25,5 \text{ cm}^2$.

Lösung W2a/2016

Lösungslogik

In der gegebenen Aufgabengrafik wird ein Teildreieck zur Seitenfläche der Pyramide. Zur Berechnung der regelmäßigen fünfseitigen Grundfläche der Pyramide benötigen wir zunächst die Länge der Seitenkante a_{Pyr} . Der gegebene Radius wird zur Seitenkante s_{Pyr} der Pyramide. Weiterhin benötigen wir später für die Berechnung der Höhe der Pyramide die Länge der Höhe der Seitenfläche h_{sPyr} .

Wir bestimmen als erstes die Winkel γ und α der Seitenfläche und berechnen daraus die zuvor beschriebenen Werte.



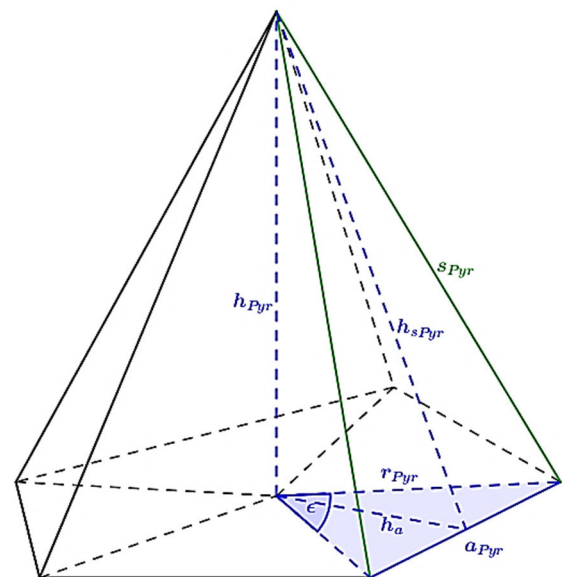
Powered by GEOGEBRA.org

Fünfeckpyramide:

Die nebenstehende Grafik zeigt die Situation nach dem Falten der Pyramide. Zur Berechnung des Volumens benötigen wir die Größe der Grundfläche sowie die Höhe h_{Pyr} der Pyramide.

Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Kantenlänge a_{Pyr} und setzt sich zusammen aus fünf gleichschenkligen Dreiecken. Wir benötigen also die Fläche eines solchen Teildreiecks, berechnen hierfür zunächst den Innenwinkel ϵ und mittels $\sin \frac{\epsilon}{2}$ und $\frac{a_{Pyr}}{2}$ dann r_{Pyr} . Mittels dem trigonometrischen Flächeninhalt für Dreiecke berechnen wir die Fläche eines Teildreiecks.

Abschließend benötigen wir noch die Höhe h_{Pyr} der Pyramide, die wir über den Satz des Pythagoras mithilfe von r_{Pyr} und s_{Pyr} berechnen.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$\begin{aligned} \gamma: & \quad \gamma = \frac{360^\circ - 110^\circ}{5} = 50^\circ \\ \alpha: & \quad \alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ \\ a_{Pyr}: & \quad \frac{a_{Pyr}}{\sin \gamma} = \frac{r}{\sin \alpha} \\ & \quad a_{Pyr} = \frac{r \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{8,3 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 65^\circ} = 7,02 \end{aligned}$$

| · siny

$$s_{P_{Yr}}: s_{P_{Yr}} = r = 8,3$$

$$\epsilon: \epsilon = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$r_{P_{Yr}}: \sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{a_{P_{Yr}}}{r_{P_{Yr}}}$$

$$r_{P_{Yr}} = \frac{a_{P_{Yr}}}{\sin \frac{\epsilon}{2}} = \frac{3,51}{\sin 36^\circ} = 5,9716$$

| Spitzenwinkel im Fünfeck

| $\cdot r_{P_{Yr}}; : \sin \frac{\epsilon}{2}$

$$A_{\Delta}: A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot r_{P_{Yr}} \cdot r_{P_{Yr}} \cdot \sin \epsilon$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 5,9716^2 \cdot \sin 72^\circ = 16,9573$$

$$G_{P_{Yr}}: G_{P_{Yr}} = 5 \cdot A_{\Delta} = 5 \cdot 16,9573 = 84,7865$$

$$h_{P_{Yr}}: h_{P_{Yr}} = \sqrt{s_{P_{Yr}}^2 - r_{P_{Yr}}^2} = \sqrt{8,3^2 - 5,9716^2}$$

$$h_{P_{Yr}} = \sqrt{33,223} = 5,7645$$

$$V_{P_{Yr}}: V_{P_{Yr}} = \frac{1}{3} \cdot G_{P_{Yr}} \cdot h_{P_{Yr}} = \frac{1}{3} \cdot 84,7867 \cdot 5,7645 = 162,9176$$

Das Volumen der Pyramide beträgt etwa 163 cm^3 .

| Satz des Pythagoras

| trigonometrischer Flächeninhalt

Lösung W2b/2016

Lösungslogik

Linke Pyramide:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_s$$

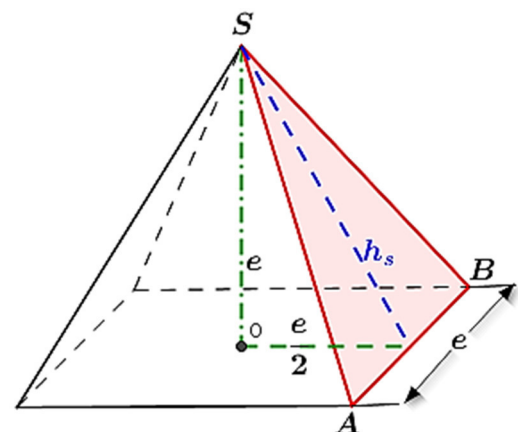
Wir berechnen h_s über den Satz des Pythagoras. Danach kann die Fläche angegeben werden.

Rechte Pyramide:

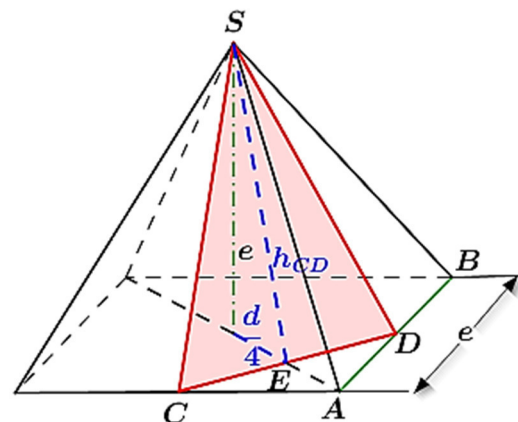
$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h_{CD}$$

Wir ermitteln \overline{CD} über den Satz des Pythagoras und den beiden bekannten Strecken $\overline{CA} = \overline{AD} = \frac{e}{2}$.

h_{CD} lässt sich ebenfalls über den Satz des Pythagoras ermitteln, hierzu benötigen wir aber zuerst die Länge der Diagonalen der Grundfläche, den die Strecke vom Fußpunkt der Höhe e zum Punkt E (siehe Grafik) entspricht einem Viertel der Diagonalen d .



Powered by GEOGEBRA.org



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

Dreieck ABS:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_s$$

$$h_s: h_s = \sqrt{e^2 + \frac{e^2}{4}} = \sqrt{\frac{5e^2}{4}} = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{5}$$

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{e}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{e^2}{4} \cdot \sqrt{5}$$

Formel (3) gehört zum Dreieck ABS.

Dreieck CDS:

$$A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h_{CD}$$

$$\overline{CD}: \quad \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2e^2}{4}} = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$d: \quad d = \sqrt{e^2 + e^2} = e\sqrt{2}$$

$$h_{CD}: \quad h_{CD} = \sqrt{e^2 + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{e^2 + \frac{2e^2}{16}} = \sqrt{\frac{18e^2}{16}}$$

$$= \frac{e}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9} = \frac{3}{4} e \cdot \sqrt{2}$$

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} e \cdot \sqrt{2} = \frac{6e^2}{16} = \frac{3e^2}{8}$$

Formel (1) gehört zum Dreieck CDS.

| Satz des Pythagoras

| Satz des Pythagoras

| Satz des Pythagoras

Lösung W3a/2016

Lösungslogik

Parabelgleichung p_1 :

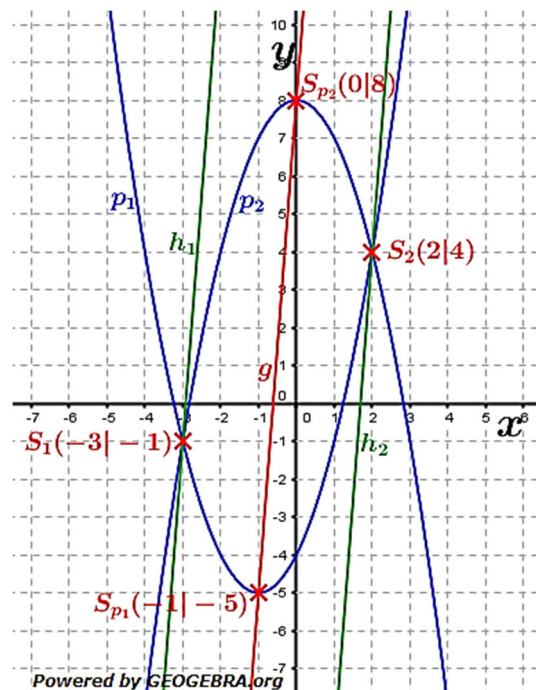
Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + bx + c$.

Elegante Lösung:

Die gegebenen Parabelpunkte A und B haben in x -Richtung einen Abstand von 4 Einheiten. Wegen der Symmetrie der Parabel liegt die Symmetrieachse somit bei $x = -1$. Da der Abstand z. B. des Punktes B zur Symmetrieachse 2 ist, muss der Scheitel der Parabel somit um 4 Einheiten tiefer liegen als die y -Koordinate des Punktes B . Der Scheitel der Parabel hat also die Koordinaten $S_{p_1}(-1 | -5)$. Damit lautet die Parabelgleichung $y = (x + 1)^2 - 5$.

Standard Lösung:

Mit dem gegebenen Punkt A sowie dem gut erkennbaren Schnittpunkt mit der y -Achse $S_y(0 | -4)$ machen wir Punktproben und berechnen damit die Parameter b und c der allgemeinen Parabelgleichung.



Geradengleichung g :

Wir bestimmen die Scheitelpunkte von p_1 und p_2 , berechnen darüber die Steigung der Geraden und setzen den y -Achsenabschnitt auf 8, da der Scheitel von p_2 auf der y -Achse liegt.

Geradengleichung h :

Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte von p_1 und p_2 durch Gleichsetzung.

Da h parallel zu g verlaufen soll, ist die Steigung von g und h dieselbe. h hat lediglich einen andere y -Achsenabschnitt b .

Wir machen in der Gleichung $y = 13x + b$ eine Punktprobe mit einem der zuvor ermittelten Schnittpunkte zur Berechnung von b . Wegen der zwei Schnittpunkte gibt es hier auch zwei Geraden. Es genügt jedoch, nur eine Gerade aufzustellen.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1 :

$$p_1: y = x^2 + bx + c$$

| allgemeine Form der Parabel

Elegante Lösung:

$$x_B - x_A = 1 - (-3) = 4$$

| waagrechte Strecke zwischen A

und B

$$\frac{x_B - x_A}{2} = 2$$

$$x_A - 2 = -1$$

| Position der Symmetrieachse

Die Symmetrieachse von p_1 ist $x = -1$

Wegen des waagrechten Abstandes von 2 der Punkte A und B zur Symmetrieachse liegt der Scheitelpunkt der Parabel 4 Einheiten tiefer als die y -Koordinate der Punkte A und B .

$$S_{p_1}(-1 | -5)$$

| Scheitelpunkt von p_1

$$y = (x + 1)^2 - 5$$

| Scheitelpunktgleichung von p_1

Standard Lösung:

Wegen des Schnittpunktes von p_1 mit der y -Achse $S_y(0 | -4)$ ist $c = -4$.

$$-1 = 1 + b - 4$$

| Punktprobe mit A | +3

$$b = 2$$

Die Gleichung der Parabel p_1 lautet $y = x^2 + 2x - 4$

Geradengleichung g :

$$y = mx + b$$

| allgemeine Geradengleichung

$$S_{p_1}(-1 | -5)$$

| siehe zuvor

$$S_{p_2}(0 | 8)$$

$$m_g = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - (-5)}{0 - (-1)} = 13$$

Wegen $S_{p_2}(0 | 8)$ ist $b = 8$

$$g: y = 13x + 8$$

Geradengleichung h :

Schnittpunktberechnung:

$$p_2: y = -x^2 + 8$$

$p_1 \cap p_2$:

$$x^2 + 2x - 4 = -x^2 + 8$$

| $+x^2$; -8

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

| :2

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 6}$$

| p/q -Formel

$$x_{1,2} = -0,5 \pm \sqrt{6,25} = -0,5 \pm 2,5$$

$$x_1 = 2; x_2 = -3$$

$x_1; x_2 \rightarrow p_2$

$$y_1 = -2^2 + 8 = -4 + 8 = 4$$

$$y_2 = -(-3)^2 + 8 = -9 + 8 = -1$$

$$S_1(2 | 4); S_2(-3 | -1)$$

$$\begin{aligned}
 h: \quad y &= 13x + b \\
 4 &= 13 \cdot 2 + b_1 = 26 + b_1 & | & -26 \\
 b_1 &= -22 \\
 h_1: \quad y &= 13x - 22 \\
 1 &= 13 \cdot (-3) + b_2 = -39 + b_2 & | & +39 \\
 b_2 &= 40 \\
 h_2: \quad y &= 13x + 40
 \end{aligned}$$

Lösung W3b/2016

Lösungslogik

Schnittpunkte P und Q:

Zunächst berechnen wir das c aus der Parabelgleichung über eine Punktprobe mit $R(4|0)$.

Die beiden Schnittpunkte ermitteln wir dann durch Gleichsetzung.

Prüfung der Behauptung Mias:

Wir fertigen eine Skizze der Situation und erkennen, dass offensichtlich ein rechter Winkel bei den Punkten S_1 und S_2 besteht.

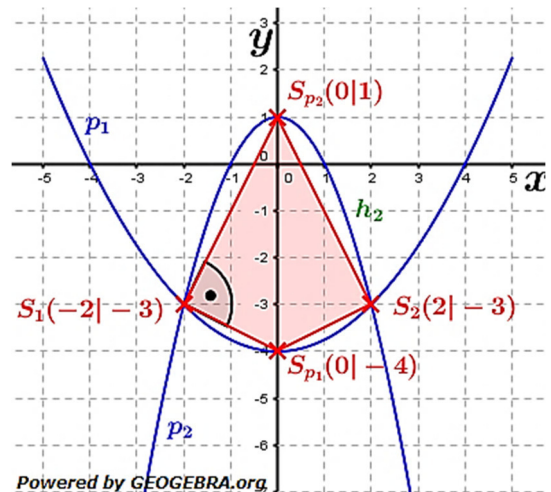
Für den rechnerischen Nachweis verwenden wir die Orthogonalitätsbedingung $m_1 \cdot m_2 = -1$ mit m_1 als

Steigung der Strecke $\overline{S_1 S_{p_2}}$ und m_2 als

Steigung der Strecke $\overline{S_1 S_{p_1}}$.

Alternativ kann der Nachweis auch über den Satz des Pythagoras geführt

werden, denn bei einem Winkel von 90° muss gelten $\overline{S_{p_1} S_{p_2}}^2 = \overline{S_1 S_{p_1}}^2 + \overline{S_1 S_{p_2}}^2$.



Klausuraufschrieb

Schnittpunkte P und Q:

$$\begin{aligned}
 p_1: \quad y &= \frac{1}{4}x^2 + c \\
 0 &= \frac{1}{4}(4)^2 + c & | & \text{Punktprobe mit } R(4|0) \\
 c &= -4 \\
 y &= \frac{1}{4}x^2 - 4
 \end{aligned}$$

$p_1 \cap p_1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}x^2 - 4 &= -x^2 + 1 & | & \text{Schnittpunkte durch Gleichsetzung} \\
 \frac{5}{4}x^2 - 5 &= 0 & | & \cdot 4; +20 \\
 5x^2 &= 20 & | & :5 \\
 x^2 &= 4 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2
 \end{aligned}$$

$x_1; x_2 \rightarrow p_2$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -(2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3 \\
 y_2 &= -(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3 \\
 P(-2|-3); \quad Q(2|-3)
 \end{aligned}$$

Prüfung der Behauptung Mias:

Orthogonalitätsbedingung für Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$m_1 = m_{S_1 S_{p_2}}; \quad m_2 = m_{S_1 S_{p_1}}$$

$$m_{S_1 S_{p_2}} = \frac{y_{S_{p_2}} - y_{S_1}}{x_{S_{p_2}} - x_{S_1}} = \frac{1 - (-3)}{0 - (-2)} = 2$$

$$m_{S_1 S_{p_1}} = \frac{y_{S_{p_1}} - y_{S_1}}{x_{S_{p_1}} - x_{S_1}} = \frac{-4 - (-3)}{0 - (-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{S_1 S_{p_2}} \cdot m_{S_1 S_{p_1}} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Der Winkel $S_{p_1} S_1 S_{p_2}$ ist ein rechter Winkel. Wegen der Symmetrie ist damit auch der Winkel $S_{p_1} S_2 S_{p_2}$ ein rechter. Mia hat recht.

Lösung W4a/2016

Lösungslogik

Zahl mit zwei gleichen Ziffern:

An Hand der Abbildung legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Zahlen 1 bis 4 pro Glücksrad fest, stellen den Ergebnisraum auf und berechnen die Wahrscheinlichkeit.

Erwartungswert:

Wir müssen zunächst noch die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 40 bestimmen. Für den Gewinn „Zwei gleiche Ziffern“ haben wir die Wahrscheinlichkeit ja schon zuvor ermittelt.

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Veränderung Glücksrad 2:

Durch eine Argumentation:

Siehe Klausuraufschrieb

Durch Rechnung:

Wir bestimmen die neuen Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn von 3,00 € und von 5,00 € und stellen eine neue Tabelle auf.

Klausuraufschrieb

Zahl mit zwei gleichen Ziffern:

Linkes Glücksrad: $P(1) = \frac{3}{6}; P(2) = \frac{1}{6}; P(3) = \frac{1}{6}; P(4) = \frac{1}{6}$

Rechtes Glücksrad: $P(1) = \frac{2}{6}; P(2) = \frac{2}{6}; P(3) = \frac{2}{6}$

$$P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = P\{(1;1), (2;2), (3;3)\} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6 + 2 + 2}{36} = \frac{10}{36}$$

Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen, beträgt $\frac{2}{9}$.

Erwartungswert:

$$P(\text{Zahl größer 40}) = P\{(4; 1), (4; 2), (4; 3)\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36}$$

	$P(\text{zwei gleiche Ziffer})$	$P(\text{Zahl größer 40})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	1,00 €	3,00 €	-2,00 €
$p(X_i)$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{20}{36}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,28 €	0,50 €	-1,11 €
$E(X)$	0,28 € + 0,50 € - 1,11 € = -0,33 €		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist -0,33 €.

Veränderung Glücksrad 2:

Argumentation:

Wird beim Glücksrad 2 eine 3 durch eine 5 ersetzt, verringert sich die Wahrscheinlichkeit für die Anzeige von (3;3) von $\frac{2}{36}$ auf $\frac{1}{36}$, damit sinkt der Auszahlungsbetrag für den Gewinn 3,00 €. Auf der anderen Seite verändert sich die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 40 nicht, da die Verringerung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl 43 durch die Erhöhung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl 45 voll ausgeglichen wird. Es sinkt also lediglich die Auszahlung für den Gewinn von 3,00 €. Dies wäre im Sinne eines höheren Erlöses vorteilhaft.

Rechnung:

$$P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = P\{(1; 1), (2; 2), (3; 3)\} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{36}$$

$$P(\text{Zahl größer 40}) = P\{(4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 5)\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$$

	$P(\text{zwei gleiche Ziffer})$	$P(\text{Zahl größer 40})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	1,00 €	3,00 €	-2,00 €
$p(X_i)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{21}{36}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,25 €	0,50 €	-1,17 €
$E(X)$	0,25 € + 0,50 € - 1,17 € = -0,42 €		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist jetzt -0,42 €.

Die Veränderung von Glücksrad 2 wäre vorteilhaft.

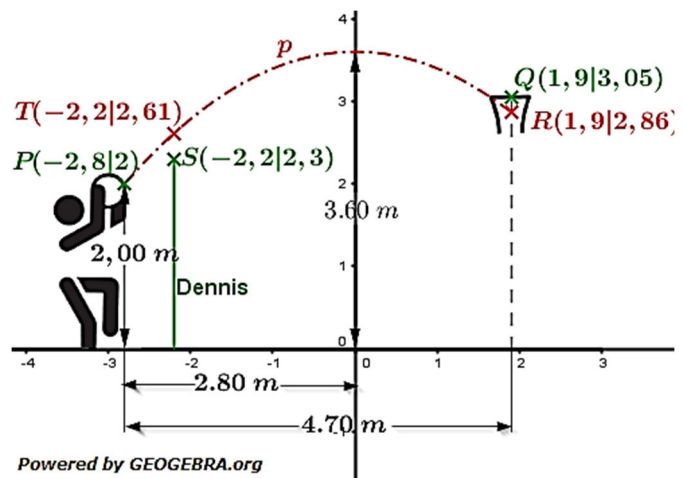
Lösung W4b/2016

Lösungslogik

Allgemeine Festlegung:

Aus der Aufgabenstellung mit $y = ax^2 + c$ muss die y -Achse durch den höchsten Punkt der Wurfbahn verlaufen, da die gegebene Parabel eine in x -Richtung unverschobene Parabel ist.

Daraus bestimmen sich die einzelnen gegebenen Punkte gemäß nebenstehender Grafik (grüne Punkte).



Parabelgleichung p :

Der Scheitel der Parabel liegt bei $S(0|3,6)$. Damit ist $c = 3,6$ (c ist y -Achsenabschnitt). Über eine Punktprobe mit $P(-2,8|2)$ (Abwurfpunkt von Dirk) errechnen wir a .

Trifft Dirk in den Korb:

Wir bestimmen die y -Koordinate der Parabel für $x = 1,9$. Liegt diese unter oder über $y = 3,05$ (Gegebene Höhe des Korbs), so trifft Dirk den Korb nicht.

Berührt Dennis den Ball:

Wir bestimmen die y -Koordinate der Parabel für $x = -2,2$ (Abstand von Dennis zum Ursprung). Liegt diese über $y = 2,3$ (höchster Punkt von Dennis), so berührt Dennis den Ball nicht.

Klausuraufschrieb

Allgemeine Festlegung:

$y = ax^2 + c$ ist eine in x -Richtung unverschobene Parabel. Der Scheitel liegt somit bei $S(0|3,6)$, die y -Achse ist Symmetrieachse.

Abwurfpunkt Dirk: $P(-2,8|2)$
 Aufhängepunkt Korb: $Q(1,9|3,05)$
 Höchster Punkt Dennis: $S(-2,2|2,3)$

Parabelgleichung p :

$S(0|3,6)$ | Scheitelpunkt der Parabel
 $3,6 = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow c = 3,6$
 $y = ax^2 + 3,6$
 $P(-2,8|2)$ | Abwurfpunkt Dirk
 $2 = (-2,8)^2 a + 3,6$ | Punktprobe mit P
 $-1,6 = 7,84a$
 $a = -\frac{1,6}{7,84} = -0,2041$

Die Parabelgleichung lautet: $y = -0,2041x^2 + 3,6$

Trifft Dirk in den Korb:

$$P(1,9|3,05)$$

$$y = -0,2041 \cdot 1,9^2 + 3,6$$

$$y = 2,86$$

| Aufhängepunkt Korb

| y-Koordinate für $x = 1,9$

Da die y –Koordinate der Parabel tiefer liegt als der Aufhängepunkt des Korbs, trifft Dirk den Korb nicht.

Berührt Dennis den Ball:

$$P(-2,2|2,3)$$

$$y = -0,2041 \cdot (-2,2)^2 + 3,6$$

$$y = 2,61$$

| Höchster Punkt Dennis

| y-Koordinate für $x = -2,2$

Da die y –Koordinate der Parabel höher liegt als der höchste Punkt von Dennis, berührt Dennis den Ball nicht.