Lösung W1a/2017

Lösungslogik

Der Abstand von E zur Strecke $\overline{AB}$ ist der kürzeste Abstand (Senkrechte auf $\overline{AB}$) $\overline{EF}$. $\overline{EF}$ ist so lang wie $\overline{BG}$.

$\overline{BG} = \overline{BD} - \overline{GD}$.

Berechnung der Strecke $\overline{GD}$ über den $sin\alpha$.

Berechnung des Abstandes über

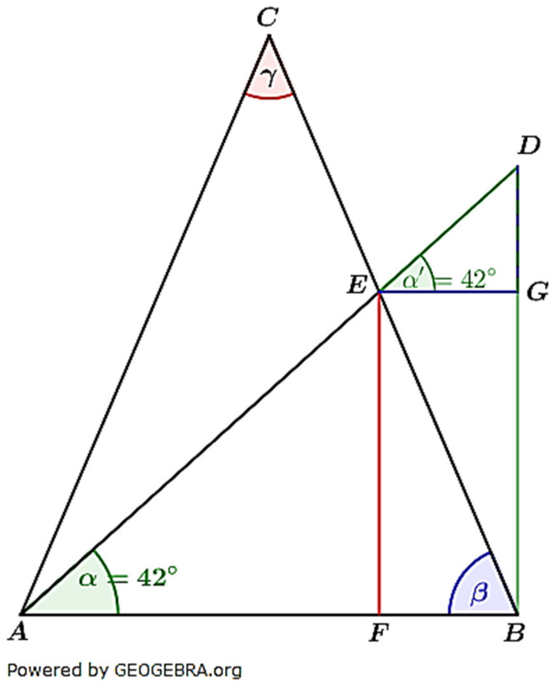
$\overline{EF} = \overline{BD} - \overline{GD}$.

Der Winkel γ ist (wegen des gleichschenkligen Dreiecks ABC) $180° - 2 \cdot \beta$.

Berechnung $\overline{EG}$ über den Satz des Pythagoras.

Berechnung β über den $tan\beta$.

Berechnung von γ.



Klausuraufschrieb

Abstand E zu $\overline{AB}$:

$\overline{EF}$: $\overline{EF} = \overline{BG} = \overline{BD} - \overline{GD}$

$\overline{GD}$: $sin\alpha = \frac{\overline{GD}}{\overline{DE}} \qquad | \cdot \overline{DE}$

$\overline{GD} = \overline{DE} \cdot sin\alpha = 3 \cdot sin42° = 2{,}007$

$\overline{EF}$: $\overline{EF} = 7{,}2 - 2{,}007 = 5{,}1926$

Der Abstand von Punkt E zur Strecke $\overline{AB}$ beträgt $5{,}2\ cm$.

Winkel γ:

γ: $\gamma = 180° - 2 \cdot \beta$

$\overline{EG}$: $\overline{EG} = \sqrt{\overline{ED}^2 - \overline{GD}^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{EG} = \sqrt{3^2 - 2{,}007^2} = 2{,}2298 = \overline{FB}$

β: $tan\beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = \frac{5{,}1926}{2{,}2298} = 2{,}3287$

$\beta = tan^{-1}(2{,}3287) = 66{,}76°$

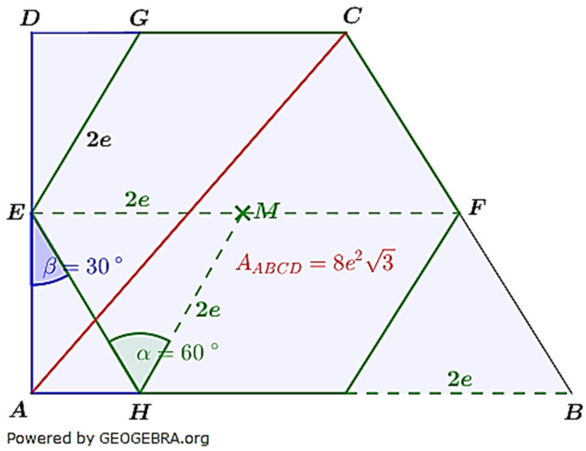
γ: $\gamma = 180° - 2 \cdot 66{,}76° = 46{,}479°$

Der Winkel γ ist $46{,}5°$ groß.

Lösung W1b/2017

Lösungslogik

Fläche des Trapezes $ABCD$:
Die Fläche des Trapezes entspricht acht Mal dem Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks EHM.
Das regelmäßige Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken. Das rechts an das Sechseck angeflanschte Dreieck ist ebenfalls gleichseitig mit einer Seitenkante von $2e$.
Die beiden linksseitigen Dreiecke AHE und EGD sind jeweils halbe gleichseitige Dreiecke mit der Länge der Grundseiten HE bzw. $EG = 2e$.



Die Flächenformel für ein gleichseitiges Dreieck lautet $A_{Dreieck} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ (siehe Formelsammlung).

Länge der Strecke $\overline{AC}$:
$\overline{AC}$ lässt sich über den Satz des Pythagoras berechnen. Hierzu benötigen wir die Strecke $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$.
$\overline{AD}$ ist zwei Mal $\overline{AE}$, Berechnung von $\overline{AE}$ über den $\cos\beta$ mit $\beta = 30\,°$.

Klausuraufschrieb

Fläche des Trapezes $ABCD$:
Das regelmäßige Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken EHM. Das rechts an das Sechseck angeflanschte Dreieck ist ebenfalls gleichseitig mit der Seitenkante $a = 2e$.
Die links an das Sechseck angeflanschten Dreiecke AHE und EGD sind jeweils ein halbes gleichseitiges Dreieck, zusammen also ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit der Seitenkante $a = 2e$.
Das Trapez hat somit eine Fläche von 8 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenkante $a = 2e$.

$$A_{ABCD} = 8 \cdot A_{HME} = 8 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 8 \cdot \frac{4e^2}{4}\sqrt{3} = 8e^2\sqrt{3}$$

q.e.d.

Länge der Strecke $\overline{AC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AE}$

$\overline{AE}$: $\cos(30°) = \frac{\overline{AE}}{\overline{HE}}$ | $\cdot \overline{HE}$

$\overline{AE} = \overline{HE} \cdot \cos(30°) = 2e \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = e\sqrt{3}$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AE} = 2e\sqrt{3}$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{DG} + \overline{GC} = e + 2e = 3e$

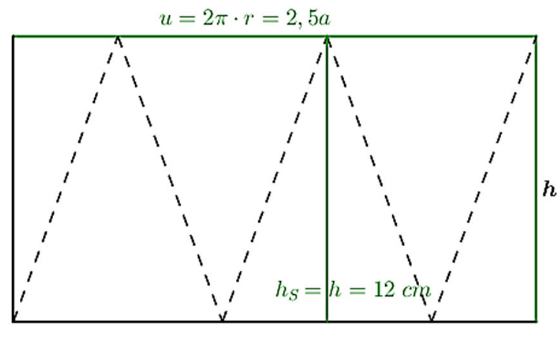
$\overline{AC} = \sqrt{(2e\sqrt{3})^2 + (3e)^2} = \sqrt{12e^2 + 9e^2} = \sqrt{21e^2} = e\sqrt{21}$

Die Strecke $\overline{AC}$ ist $e\sqrt{21}$ LE lang.

Lösung W2a/2017

Lösungslogik

Das Rechteck der Zylinderabwicklung gemäß Aufgabe wird in fünf gleichseitige Dreiecke geschnitten, die den Mantel einer fünfeckigen Pyramide bilden. Dabei ist die Höhe der Seitenfläche gleich der gegebenen Höhe des Zylinders, also $h_{s_{pyr}} = h = 12$.



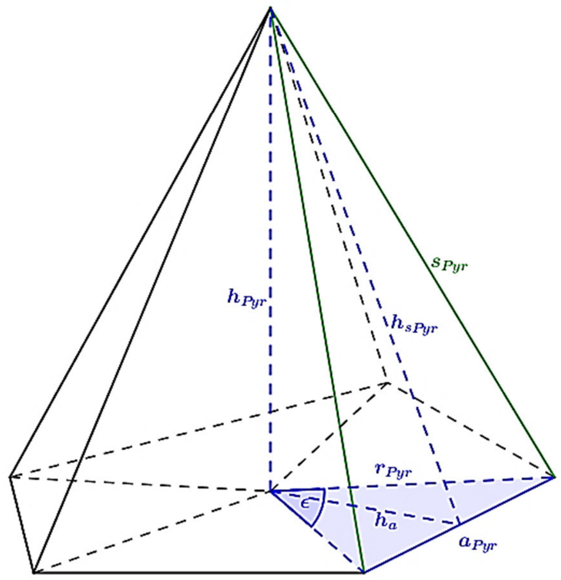
Powered by GEOGEBRA.org

Die Grundseite der Pyramide a_{Pyr} errechnet sich über den Kreisumfang der Zylinder-Grundfläche mit $u = 2\pi \cdot r_{Zyl}$. Die Länge der Seitenkante der Pyramide ist dann $a = \frac{u}{2,5} = \frac{2\pi r_{Zyl}}{2,5}$.

Weiterhin benötigen wir für die Berechnung des Volumens der Pyramide deren Höhe h_{Pyr}. Da der Mantel der Pyramide ja der Rechteckfläche des abgewickelten Zylinders entspricht, können wir diese Höhe berechnen.

Fünfeckpyramide:

Die Grafik rechts zeigt die Situation nach dem Falten der Pyramide. Zur Berechnung des Volumens benötigen wir noch die Größe der Grundfläche der Pyramide.



Powered by GEOGEBRA.org

Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Kantenlänge a_{Pyr} und setzt sich zusammen aus fünf gleichschenkligen Dreiecken.

Wir benötigen also die Fläche eines solchen Teildreiecks, berechnen hierfür zunächst den Innenwinkel ϵ und mittels $tan\frac{\epsilon}{2}$ und $\frac{a_{Pyr}}{2}$ dann h_a. Mittels der Flächenformel für Dreiecke berechnen wir die Fläche eines Teildreiecks und daraus letztendlich die Fläche des Fünfecks.

Zur Berechnung des Volumens der Pyramide benötigen wir noch deren Höhe. Nachdem jedoch h_a und $h_{s_{Pyr}}$ bekannt sind, errechnet sich die Höhe über den Satz des Pythagoras. Nun kann über die Volumenformel für Pyramiden die Lösung der Aufgabe berechnet werden.

Klausuraufschrieb

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} G \cdot h_{Pyr}$

G: Die Grundfläche der Pyramide ist nach Aufgabenstellung ein regelmäßiges Fünfeck.

$G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_{Pyr} \cdot h_a$

a_{Pyr}: In die Länge des Rechtecks des abgewickelten Zylinders passt die Grundkante der Pyramidengrundfläche $2{,}5$ mal hinein (siehe Grafik der Aufgabenstellung). Die Länge des Rechtecks entspricht dem Umfang des Grundkreises des Zylinders mit $u = 2\pi r_{Zyl}$.

$a_{Pyr} = \frac{u_{Zyl}}{2{,}5} = \frac{2\pi \cdot 3{,}5}{2{,}5} = 8{,}7965$

Die Grundkante a_{Pyr} der Pyramide beträgt $8{,}8\ cm$.

h_a: $tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{a_{pyr}}{2 \cdot h_a}$

$h_a = \frac{a_{Pyr}}{2 \cdot tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}$

ϵ: $\epsilon = \frac{360°}{5} = 72\ °$ | Mittelpunkt-Winkel eines Fünfecks

$h_a = \frac{8{,}8}{2 \cdot tan(36\ °)} = 6{,}06$

$G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_{Pyr} \cdot h_a = 2{,}5 \cdot 8{,}8 \cdot 6{,}06 = 133{,}3$

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{h_{s_{Pyr}}^2 - h_a^2} = \sqrt{12^2 - 6{,}06^2} = \sqrt{107{,}2764} = 10{,}36$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 133{,}3 \cdot 10{,}36 = 460{,}3293$

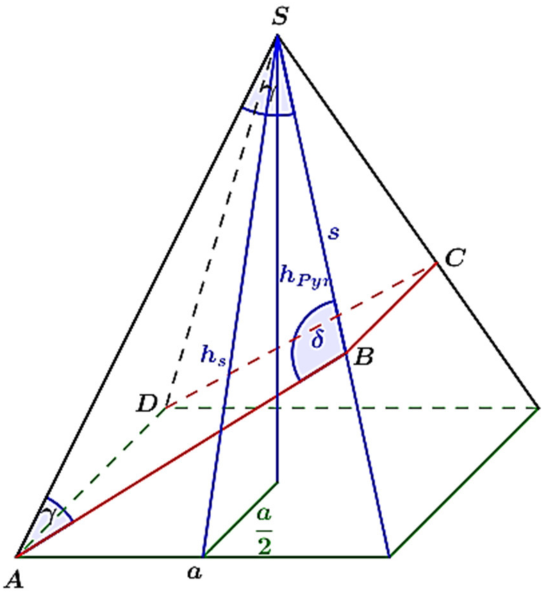
Das Volumen der Pyramide beträgt $460{,}3\ cm^3$.

Lösung W2b/2017

<u>Lösungslogik</u>

Der Umfang des Trapezes $ABCD$ ist:

$u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$



Um $\overline{AB}$ berechnen zu können, benötigen wir die Winkel γ und δ.

Der Winkel γ ist der Spitzenwinkel einer Seitenfläche. Er kann ermittelt werden über $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, hierzu benötigen wir aber die Höhe h_s der Seitenfläche. Diese können wir allerdings über $\frac{1}{4}$ des Mantels der Pyramide berechnen. Die Oberfläche ist gegeben, wir subtrahieren davon die Grundfläche (Quadrat mit $a = 10\ cm$) und dividieren das Ergebnis durch 4.

Über die Flächenformel eines Dreiecks kann nun h_s berechnet werden und daraus dann der Winkel γ. Wegen $\overline{AB} = \overline{BS}$ ist das Dreieck ABS gleichschenklig und somit der Winkel $\delta = 180° - 2 \cdot \gamma$.

Mit Hilfe des Sinussatzes können wir nun die Strecke $\overline{AB}$ berechnen, sofern uns noch die Länge einer Seitenkante s bekannt ist. Diese ist über den Satz des Pythagoras aus den bekannten Strecken $\frac{a}{2}$ und h_s ermittelbar.

Es fehlt uns jetzt lediglich noch die Länge der Strecke $\overline{BC}$. Diese kann am einfachsten über dem zweiten Strahlensatzberechnet werden, denn die Strecke $\overline{BC}$ verläuft parallel zur Grundkante a. Somit gilt:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{SB}} = \frac{a}{s} \quad => \quad \overline{BC} = \overline{SB} \cdot \frac{a}{s}$

Klausuraufschrieb

Gesucht: $u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$

$\overline{AD}$: $\overline{AD} = a = 10\,cm$

$\overline{AB}$: $\frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} = \frac{s}{\sin(\delta)}$ | Sinussatz

$\overline{AB} = \frac{s \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)}$

γ: $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a}{2 \cdot h_s}$

h_s: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{4} \cdot M_{Pyr}$

$h_s = \frac{M_{Pyr}}{2a}$

M_{Pyr}: $M_{Pyr} = O_{Pyr} - G_{Pyr} = 357 - 100 = 257$

$h_s = \frac{257}{2 \cdot 10} = 12{,}85$

$tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{10}{2 \cdot 12{,}85} = 0{,}3891$

$\frac{\gamma}{2} = tan^{-1}(0{,}3891) = 21{,}26\,°$

$\gamma = 42{,}52\,°$

δ: $\delta = 180° - 2 \cdot \gamma = 180° - 2 \cdot 42{,}52 = 94{,}96\,°$

s: $s = \sqrt{h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}85^2 + 5^2} = 13{,}79$

$\overline{AB} = \frac{s \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\delta)} = \frac{13{,}79 \cdot \sin(42{,}52\,°)}{\sin(94{,}96\,°)} = 9{,}35$

$\overline{BC}$: $\frac{\overline{BC}}{\overline{SB}} = \frac{a}{s}$ | 2. Strahlensatz

$\overline{BC} = \overline{SB} \cdot \frac{a}{s} = 9{,}35 \cdot \frac{10}{13{,}79} = 6{,}78$

$u = \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC}$

$u = 10 + 2 \cdot 9{,}35 + 6{,}78 = 35{,}48$

Das Trapez $ABCD$ hat einen Umfang von $35{,}5$ cm.

Lösung W3a/2017

Lösungslogik

Zuordnung der Graphen, Vervollständigung der Funktionsgleichungen:

Die Zuordnung der Graphen erfolgt über entweder deren Schnittpunkte mit der y-Achse bzw. über die Scheitelpunkte.

Vervollständigung über Punktproben.

Gerade g:

Aufstellung der Geradengleichung durch zwei Punkte, hier die Scheitelpunkte von p_2 und p_3.

Nachweis von Scheitelpunkt p_1 auf g:

Punktprobe von S_1 auf g.

Klausuraufschrieb

Zuordnung der Graphen, Vervollständigung der Funktionsgleichungen:

(A) gehört zu p_3, denn nur p_3 hat den Scheitel $S_3(0|-1)$.

(B) gehört zu p_2, denn $y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$ mit dem Scheitel $S_2(3|-4)$.

(C) gehört zu p_1, denn $y = x^2 + 4x + q = (x+2)^2 - 4 + q$ mit dem Scheitel $S_1(-2|-1)$.

a: $y = ax^2 - 1$ | Punktprobe mit $N_2(2|0)$

$0 = a \cdot 2^2 - 1$

$0 = 4a \;=>\; a = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

b: $y = x^2 + 4x + q$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

$5 = 0 + 4 \cdot 0 + q$

$q = 5$

$y = x^2 + 4x + 5$

Gerade g:

g: $S_2(3|-4)$ $S_3(0|-1)$

$y = mx + b$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-4)}{0-3} = \frac{3}{-3} = -1$

y-Achsenabschnitt $b = -1$ wegen $S_3(0|-1)$.

$y = -x - 1$

Nachweis von Scheitelpunkt p_1 auf g:

$y = -x - 1$ | Punktprobe mit $S_1(-2|-1)$

$-1 = -(-2) - 1 = -1$

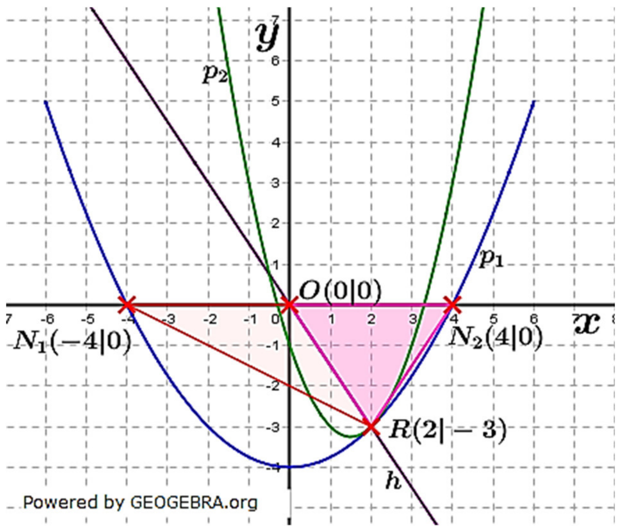
$S_1(-2|1) \in g$ **q.e.d.**

Lösung W3b/2017

Lösungslogik

Gerade h:

Aufstellung der Parabelgleichung p_2 über den gegebenen Scheitelpunkt.
Gleichsetzung von p_1 und p_2 führt zum Schnittpunkt R.
Bestimmung von m der Ursprungsgeraden h.



Flächeninhalt Dreieck N_1RN_2:

Berechnung der Nullstellen N_1 und N_2 von p_1, die Strecke $\overline{N_1N_2}$ ist Grundseite des Dreiecks mit der Höhe 3 ($|y|$-Koordinate von R).

Flächeninhalt Dreieck ORN_2:

Die Strecke $\overline{ON_2}$ ist Grundseite des Dreiecks mit derselben Höhe 3 wie Dreieck N_1RN_2.

Klausuraufschrieb

Gerade h:

p_2: $y=(x-1{,}5)^2-3{,}25=x^2-3x+2{,}25-3{,}25$

$y=x^2-3x-1$

$p_1 \cap p_2$: $x^2-3x-1=\frac{1}{4}x^2-4 \quad | \quad -\frac{1}{4}x^2;\ +4$

$\frac{3}{4}x^2-3x+3=0 \quad | \quad \cdot\frac{4}{3}$

$x^2-4x+4=0 \quad | \quad p/q$-Formel

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}$

$x_1=2$

$x_1 \to p_1$: $y_1=\frac{1}{4}\cdot 2^2-4$

$y_1=1-4=-3$

Der Schnittpunkt ist $R(2|-3)$.

h: $y=\frac{y_R}{x_R}\cdot x=\frac{-3}{2}\cdot x$

$y=-1{,}5x$

Flächeninhalt Dreieck N_1RN_2:

Nullstellen p_1:

N_1/N_2: $0=\frac{1}{4}x^2-4$

$x^2=16 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$x_{1,2}=\pm 4$

$N_1(-4|0);\quad N_2(4|0)$

N_1RN_2: $A_{N_1RN_2}=\frac{1}{2}g\cdot h_g$

$g=\overline{N_1N_2}=8 \qquad h_g=|y_R|=3$

$A_{N_1RN_2}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=12\ FE$

Flächeninhalt Dreieck ORN_2:

Argumentation:

Die Grundseite dieses Dreiecks ist halb so groß wie die des Dreiecks N_1RN_2, die Höhe ist jedoch gleich groß.

Bastian hat Recht.

Durch Rechnung:

ORN_2: $A_{ORN_1}=\frac{1}{2}g\cdot h_g$

$g=\overline{ON_2}=4 \qquad h_g=|y_R|=3$

$A_{ORN_1}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6\ FE$

Bastian hat Recht.

Lösung W4a/2017

Lösungslogik

Höchstens einmal ☺:

An Hand der gegebenen Mittelpunkt-Winkel legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Symbole ☺, 😐, sowie ☹ fest. Berechnung der Wahrscheinlichkeit für „höchstens einmal ☺„ über das Gegenereignis „zweimal ☺„.

Erwartungswert

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Faires Spiel:

Der Erwartungswert $E(X)$ muss Null sein.

Für den zu ändernden Gewinn für „zweimal ☺„ schreiben wir die Variable a.

Klausuraufschrieb

Höchstens einmal ☺:

$P(☺) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$; $P(😐) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $P(☹) = \frac{210}{360} = \frac{7}{12}$

Das Gegenereignis von „höchstens einmal ☺„ lautet „zweimal ☺„.

$P(\textit{höchstens einmal} ☺) = 1 - P(\textit{zweimal} ☺) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{36} \approx 97{,}2\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit für „höchstens einmal ☺„ beträgt etwa $97{,}2\,\%$.

Erwartungswert:

	$P(\textit{zweimal} ☺)$	$P(\textit{zweimal} 😐)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$3{,}50$ €	$1{,}50$ €	$-0{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{4}{144}$	$\frac{9}{144}$	$\frac{131}{144}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}0972$€	$0{,}09375$ €	$-0{,}4549$ €
$E(X)$	$0{,}0972\,€ + 0{,}09375\,€ - 0{,}4549\,€ = -0{,}26335\,€$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}26$ € *(aus der Sicht des Spielers).*

Faires Spiel:

	$P(\textit{zweimal} ☺)$	$P(\textit{zweimal} 😐)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$a - 0{,}50$ €	$1{,}50$ €	$-0{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{4}{144}$	$\frac{9}{144}$	$\frac{131}{144}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{4}{144}a - 0{,}0139$€	$0{,}09375$ €	$-0{,}4549$ €
$E(X)$	$0{,}0278a - 0{,}0139\,€ + 0{,}09375\,€ - 0{,}4549\,€ = 0{,}0278a - 0{,}37505\,€$		

Ein Spiel ist fair, wenn $E(X) = 0$ ist, also:

$0{,}0278a - 0{,}37505\,€ = 0 \quad | \quad +0{,}37505\,€$

$0{,}0278a = 0{,}37505\,€ \quad | \quad :0{,}0278$

$a = 13{,}491007\,€$

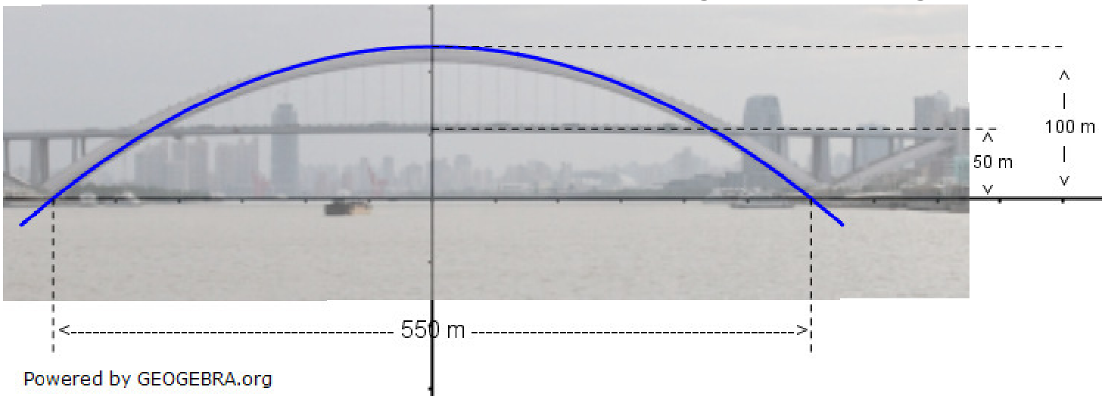
Der Gewinn für „zweimal ☺„ muss $13{,}50$ € *betragen, damit das Spiel fair ist.*

Lösung W4b/2017

Lösungslogik

Allgemeine Festlegung:

Aus der Aufgabenstellung mit $y = ax^2 + c$ muss die y–Achse durch den höchsten Punkt des Brückenbogens verlaufen, da die gegebene Parabel eine in x-Richtung unverschobene Parabel ist.
Daraus bestimmen sich die einzelnen Punkte gemäß nachfolgender Grafik.



Scheitelpunkt $S(0|100)$, Nullstelle links $N_1(-275|0)$, Nullstelle rechts $N_1(275|0)$

Funktionsgleichung des Brückenbogens:

$c = 100$ wegen Scheitelpunkt in $S(0|100)$.
Über eine Punktprobe mit $N_1(275|0)$ in $y = ax^2 + 100$ berechnen wir a.

Länge der Fahrbahn:

Die Länge der Fahrbahn ergibt sich aus der Strecke vom linken Schnittpunkt bis zum rechten Schnittpunkt der Fahrbahn mit dem Brückenbogen. Der y-Wert an diesen Stellen beträgt $50\,m$. Wir setzen $y = 50$ und lösen die Funktionsgleichung nach x auf.

Klausuraufschrieb

Allgemeine Festlegung:

$y = ax^2 + c$ ist eine in x-Richtung unverschobene Parabel. Der Scheitel liegt somit bei $S(0|100)$, die y-Achse ist Symmetrieachse.

Linke Nullstelle: $N_1(-275|0)$
Rechte Nullstelle: $N_2(275|0)$

Funktionsgleichung des Brückenbogens:

$c = 100$ wegen Scheitelpunkt in $S(0|100)$.

$y = ax^2 + 100$

$0 = a275^2 + 100$ | Punktprobe mit $N_2(275|0)$

$-100 = 75625a$ | $:75625$

$-\frac{100}{75625} = a$

$a = -0{,}001322$

Die Funktionsgleichung des Brückenbogens lautet $y = -0{,}00132x^2 + 100$.

Länge der Fahrbahn:

Der y-Wert des Schnittpunktes der Fahrbahn und des Brückenbogens hat den Wert 50.

$50 = -0{,}00132x^2 + 100 \quad | \quad -100$

$-50 = -0{,}00132x^2 \quad | \quad :(-0{,}00132)$

$\frac{-50}{-0{,}00132} = x^2$

$x^2 = 37878{,}7879 \quad | \quad \sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm 194{,}625$

$l = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 194{,}625 = 389{,}25$

Die Länge der Fahrbahn beträgt etwa $390\,m$.