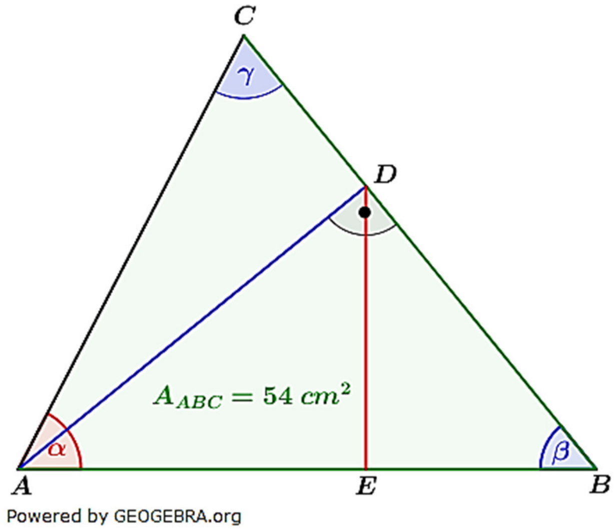
Lösung W1a/2018

Lösungslogik

Berechnung der Strecke $\overline{AD}$ über die Flächenformel für das Dreieck ABC, denn die Strecke $\overline{BC}$ als auch der Flächenhalt des Dreiecks ist bekannt.
Berechnung des Winkels β über den sin.
Berechnung der Strecke $\overline{BD}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Strecke $\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD}$.
Berechnung des Winkels γ über den tan.
Berechnung von α über die Winkelsumme im Dreieck ABC.
Berechnung der Fläche des Dreiecks ABD über die Grundseite $\overline{BD}$ und die Höhe $\overline{AD}$.



Berechnung der Höhe $\overline{ED}$ über die Fläche des Dreiecks ABD und der Grundseite $\overline{AB}$.

Klausuraufschrieb

$\overline{AD}$: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

$54 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot 11{,}6$

$\overline{AD} = \frac{108}{11{,}6} = 9{,}31$

β: $sin\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{9{,}31}{12{,}0} = 0{,}77583$

$\beta = \sin^{-1} 0{,}77583 = 50{,}88\,°$

$\overline{BD}$: $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$ | Satz des Pythagoras

$\overline{BD} = \sqrt{12^2 - 9{,}31^2} = 7{,}57$

$\overline{DC}$: $\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD} = 11{,}6 - 7{,}57 = 4{,}03$

γ: $tan\gamma = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{9{,}31}{4{,}03} = 2{,}31017$

$\gamma = \tan^{-1} 2{,}31017 = 66{,}59\,°$

α: $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 50{,}88° - 66{,}59° = 62{,}53\,°$

Der Winkel α ist $62{,}5\,°$ groß.

A_{ABD}: $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}57 \cdot 9{,}31 = 35{,}24$

$\overline{ED}$: $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{ED}$

$35{,}24 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \overline{ED}$

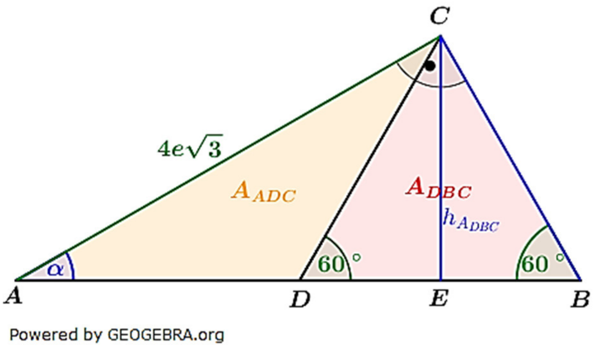
$\overline{ED} = \frac{70{,}48}{12} = 5{,}87$

Der Abstand des Punktes D von der Strecke $\overline{AB}$ beträgt $5{,}9\ cm$.

Lösung W1b/2018

Lösungslogik

Fläche der Dreiecke DBC und ADC:
Durch die Aufgabenstellung „gleichseitiges Dreieck DBC" sind die Winkel des Dreiecks mit $60\,°$ bekannt.
Berechnung von $\overline{BC}$ über den tan.
Berechnung von $h_{A_{DBC}}$ über den sin.
Berechnung von A_{DBC}.
Berechnung von A_{ABC}.
Berechnung von A_{ADC} über $A_{ABC} - A_{DBC}$.



e für Fläche von $200\ cm^2$ für Dreieck ABC:
Wir setzen $A_{ABC} = 200$ und lösen die Flächengleichung nach 2 auf.

Klausuraufschrieb

Fläche der Dreiecke DBC und ADC:

$\overline{BC}$: $\quad tan(60\,°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

$\quad \overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{tan(60\,°)} = \frac{4e\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4e$

$h_{A_{DBC}}$: $\quad sin(60\,°) = \frac{h_{A_{DBC}}}{\overline{BC}}$

$\quad h_{A_{DBC}} = \overline{BC} \cdot \sin(60\,°) = 4e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 2e\sqrt{3}$

A_{DBC}: $\quad A_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h_{A_{DBC}} = \frac{1}{2} \cdot 4e \cdot 2e\sqrt{3} = 4e^2\sqrt{3}$

A_{ABC}: $\quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 4e\sqrt{3} \cdot 4e = 8e^2\sqrt{3}$

A_{ADC}: $\quad A_{ADC} = A_{ABC} - A_{DBC} = 8e^2\sqrt{3} - 4e^2\sqrt{3} = 4e^2\sqrt{3}$ **q.e.d.**

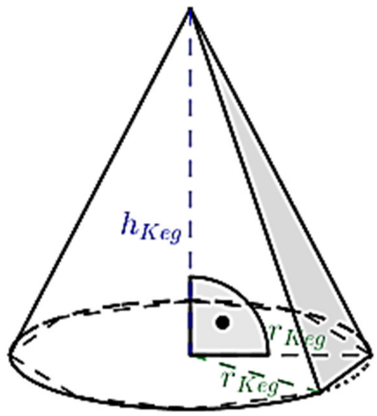
e für Fläche von $200\ cm^2$ für Dreieck ABC:

$A_{ABC} = 8e^2\sqrt{3}$	|	siehe Aufgabe 1. Teil
$8e^2\sqrt{3} = 200$	|	$:(8\sqrt{3})$
$e^2 = \frac{200}{8\sqrt{3}} = 14{,}4338$	|	$\sqrt{\ }$
$e = 3{,}799$		

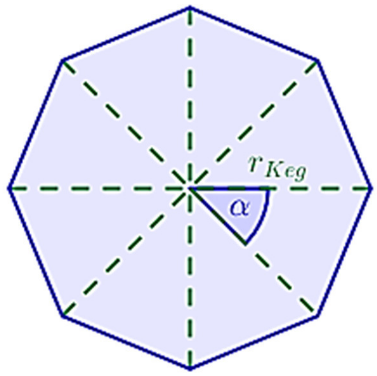
Für eine Fläche von $200\ cm^2$ des Dreiecks ABC muss $e = 3{,}8\ cm$ sein.

Lösung W2a/2018

<u>Lösungslogik</u>



Über die Volumenformel des Kegels können wir $h_{Pyr} = h_{Keg}$ bestimmen.
Die Volumenformel einer Pyramide lautet
$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$.
Da wir h_{Pyr} bereits kennen, benötigen wir nur noch die Größe der Grundfläche G. Diese ist ein gleichmäßiges Achteck.
Der Mittelpunktswinkel der Grundfläche ist
$\alpha = \frac{360\,°}{8} = 45\,°$.
Damit ergibt sich die Fläche des gleichseitigen Dreiecks der Grundfläche über den trigonometrischen Flächeninhalt $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot r_{Keg}^2 \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 6{,}5^2 \cdot \sin(45°)$.
Die Grundfläche setzt sich aus acht solcher Teildreiecke zusammen, sodass wir das Volumen nun berechnen können.



Powered by GEOGEBRA.org

<u>Klausuraufschrieb</u>

$V_{Pyr} = \frac{1\cdot}{3} G \cdot h_{Pyr}$

h_{Pyr}: $\quad V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

$500 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6{,}5^2 h_{Keg}$

$500 = 44{,}2441 \cdot h_{Keg} \quad | \quad : 44{,}2441$

$h_{Keg} = \frac{500}{44.2441} = 11{,}30 = h_{Pyr}$

α: $\quad \alpha = \frac{360}{8} = 45\,°$

G: Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Achteck, dessen Fläche sich aus acht gleichschenkligen Dreiecken zusammensetzt mit einer Schenkellänge von $s = r_{Keg} = 6{,}50$ und einem Spitzenwinkel von $\alpha = 45\,°$.

$G = 8 \cdot A_{Dreieck}$

$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_{Keg}^2 \cdot sin(\alpha) \quad |$ trigonometrischer Flächeninhalt

$G = 4 \cdot 6{,}5^2 \cdot sin(45\,°) = 119{,}50$

V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 119{,}5 \cdot 11{,}3 = 450{,}12$

Das Volumen der Pyramide beträgt $450\ cm^3$*.*

Lösung W2b/2018

<u>Lösungslogik</u>

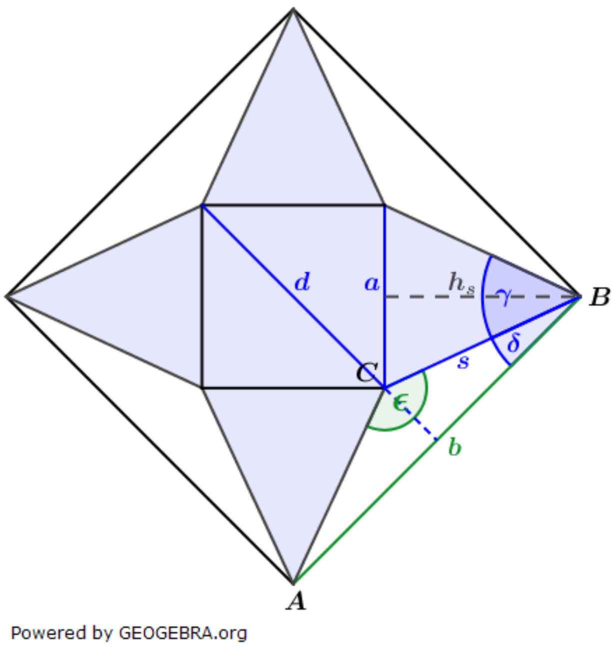
Die Höhe einer quadratischen Pyramide errechnet sich mit dem Satz des Pythagoras über:

$$h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

bzw.

$$h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Wir müssen also h_s, d und a bestimmen.
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, der Spitzenwinkel ϵ gegeben. Hieraus berechnen wir δ und den Spitzenwinkel des Seitendreiecks der Pyramide γ.
Über den $cos(\delta)$ können wir die Seitenkante s eines Seitendreiecks der Pyramide ermitteln. Über $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ berechnen wir a und daraus wiederum d.



<u>Klausuraufschrieb</u>

Gesucht: $h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ alternativ $h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

δ: $\quad \delta = \frac{180° - \epsilon}{2}$ | Dreieck ABC ist gleichschenklig

γ: $\quad 2 \cdot \delta + \gamma = 90°$

$\gamma = 90° - 2 \cdot \delta = 90° - 40° = 50°$

s: $\quad \cos(\delta) = \frac{\frac{b}{2}}{s}$

$s = \frac{\frac{b}{2}}{\cos(\delta)} = \frac{10}{\cos(20°)} = 10{,}64$

a: $\quad \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s}$

$a = 2 \cdot s \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 10{,}64 \cdot \sin(25°) = 8{,}99$

d: $\quad d = a \cdot \sqrt{2}$ | Diagonale im Quadrat (Formelsammlung)

$d = 8{,}99 \cdot \sqrt{2} = 12{,}72$

alternativ

h_s: $\quad h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10{,}64^2 - 4{,}495^2} = 9{,}64$

h_{Pyr}: $\quad h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{10{,}64^2 - 6{,}36^2} = 8{,}53$

alternativ

$h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9{,}64^2 - 4{,}495^2} = 8{,}53$

Die Höhe der Pyramide beträgt $8{,}5\ cm$.

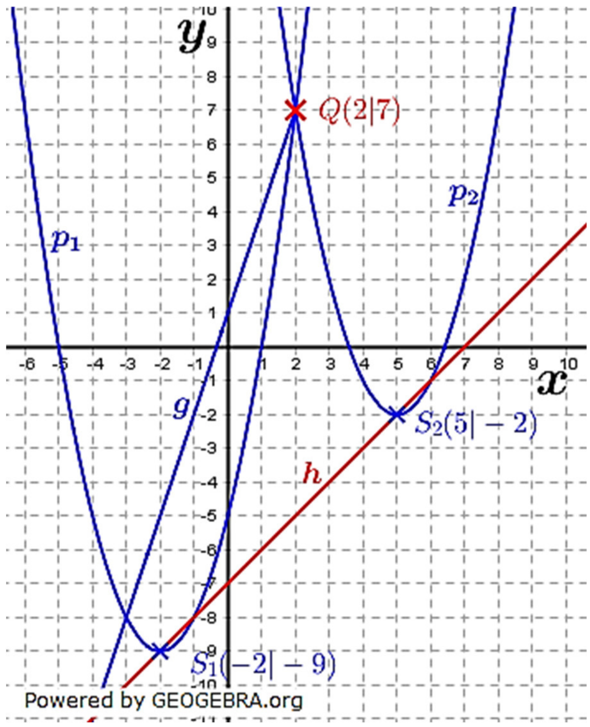
Lösung W3a/2018

Lösungslogik

Parabelgleichung p_1:
Die allgemeine Gleichung einer Normalparabel lautet $y = x^2 + bx + c$.
Aus der gegebenen Graphik lesen wir $c = -5$ ab. Zur Berechnung von b machen wir eine Punktprobe, z. B. mit der Nullstelle $N_1(-5|0)$.

Geradengleichung g:
Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet $y = mx + b$.
Aus der gegebenen Graphik lesen wir $b = 1$ ab. Das Steigungsdreieck durch die Punkte $P(0|1)$ und $Q(-5|-2)$ liefert die Steigung m.

Schnittpunkt p_1 und p_2:
Wir stellen die Parabelgleichung von p_2 mit Hilfe des gegebenen Scheitels auf, setzen die beiden Parabelgleichung gleich und lösen nach x auf.



Prüfung ob Schnittpunkt Q auf der Geraden g liegt:
Wir machen eine Punktprobe mit den Koordinaten von Q und der Geraden g.

Geradengleichung h:
Wir stellen die Parabelgleichung p_1 von der allgemeinen in die Scheitelpunktform um. Danach ermitteln wir m der Geraden h über die beiden Scheitelpunkte S_1 und S_2; machen dann eine Punktprobe mit S_1 (alternativ S_2) zur Ermittlung von b.

Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1:

p_1:	$y = x^2 + bx + c$		
	$c = -5$	|	abgelesen aus Graphik
	$N_1(-5|0)$	|	abgelesen aus Graphik
	$0 = (-5)^2 - 5b - 5$	|	Punktprobe mit N_1
	$-5b = -20$	|	$:(-5)$
	$b = 4$		
	$y = x^2 + 4x - 5$		

Geradengleichung g:

g:	$y = mx + b$		
	$b = 1$	|	abgelesen aus Graphik
	$P(0|1);\ \ Q(-2|-5)$	|	abgelesen aus Graphik
	$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-5-1}{-2-0} = 3$		
	$y = 3x + b$		
	$1 = 3 \cdot 0 + b \ \ => \ \ b = 1$	|	Punktprobe mit $P(0|1)$
	$y = 3x + 1$		

Schnittpunkt p_1 und p_2:

p_1: $y = x^2 + 4x - 5$
p_2: $y = (x-5)^2 - 2$ | Scheitelpunktform
$y = x^2 - 10x + 23$
$p_1 \cap p_2$: $x^2 + 4x - 5 = x^2 - 10x + 23$
$14x = 28$
$x = 2$
$x \rightarrow p_1$: $y = 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 7$
Q: $Q(2|7)$

Prüfung ob Schnittpunkt Q auf der Geraden g liegt:

$7 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 2 + 1$ | Punktprobe mit Q auf g
$7 = 7$ | wahre Aussage

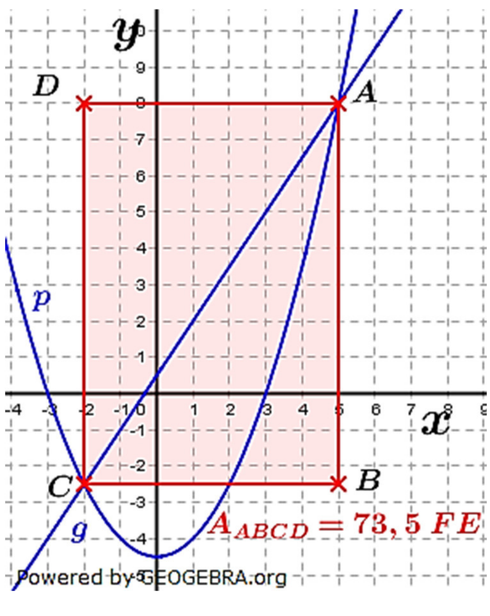
Der Punkt Q liegt auf der Geraden g.

Geradengleichung h:

h: $y = mx + b$
S_1: $y = (x+2)^2 - 4 - 5$
$y = (x+2)^2 - 9$
$S_1(-2|-9)$
m: $m = \frac{y_{S_1} - y_{S_2}}{x_{S_1} - x_{S_2}} = \frac{-9-(-2)}{-2-5} = \frac{-7}{-7} = 1$
$y = x + b$
$-9 = -2 + b$ | Punktprobe mit S_1
$b = -7$
h: $y = x - 7$

Lösung W3b/2018

<u>Lösungslogik</u>



Parabelgleichung p:
Über die Angabe $S(0|-4{,}5)$ ermitteln wir $c = -4{,}5$. Eine Punktprobe mit $P(-3|0)$ liefert den Parameter a.
Geradengleichung g:
Mit $m = 1{,}5$ und $R(0|0{,}5)$ ergibt sich die Geradengleichung zu $y = 1{,}5x + 5$.
Schnittpunkte A und C:
Durch Gleichsetzung von p und g berechnen wir die Koordinaten von A und C.
Punkte B und D:
Wir ermitteln die Koordinaten von B und D aus der Angabe, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.
Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$:
Der Flächeninhalt ergibt sich aus der Multiplikation der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Parabelgleichung:

p:	$y = ax^2 - 4{,}5$	$c = -4{,}5$ wegen Punkt $S(0\|-4{,}5)$
	$0 = a \cdot (-3)^2 - 4{,}5$	Punktprobe mit $P(-3\|0)$
	$a = \frac{1}{2}$	
	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4{,}5$	
g:	$y = 1{,}5x + b$	Steigung $m = 1{,}5$ ist gegeben
	$b = 5$	Wegen gegebenem Punkt $R(0\|0{,}5)$
	$y = 1{,}5x + 0{,}5$	

Schnittpunkte A und C:

$p \cap g$:	$\frac{1}{2}x^2 - 4{,}5 = 1{,}5x + 0{,}5$	$-1{,}5x;\ -0{,}5$
	$\frac{1}{2}x^2 - 1{,}5x - 5{,}0 = 0$	$\cdot 2$
	$x^2 - 3x - 10 = 0$	
	$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 10}$	p/q-Formel
	$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = 1{,}5 \pm 3{,}5$	
	$x_1 = 5;\quad x_2 = -2$	
	$y_A = 1{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 = 8$	
	$y_B = 1{,}5 \cdot (-2) + 0{,}5 = -2{,}5$	
	$A(5\|8);\quad C = (-2\|-2{,}5)$	

Punkte B und D:

$B(5|-2{,}5);\quad D = (-2|8)$

Strecke $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$:

$\overline{AB} = y_B - y_A = 8 - (-2{,}5) = 10{,}5$

$\overline{BC} = x_B - x_C = 5 - (-2) = 7$

Fläche Rechteck $ABCD$:

$A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 10{,}5 \cdot 7 = 73{,}50$

Das Rechteck $ABCD$ ist $73{,}5\ FE$ groß.

Lösung W4a/2018

<u>Lösungslogik</u>

Wahrscheinlichkeit für zweimal Glocke:

An Hand der gegebenen Anzahl Symbole auf den Rädern bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit für das Symbol Glocke und berechnen diese über die erste Pfadregel.

Erwartungswert:

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Merles Behauptung:

Mit einem unveränderten Erwartungswert $E(X)$ und dem neuen Einsatz berechnen wir die Auszahlung für zweimal 7 neu.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Einzelwahrscheinlichkeiten:

$P(Zitrone) = \frac{4}{7};\quad P(Glocke) = \frac{2}{7};\quad P(Sieben) = \frac{1}{7}$

Wahrscheinlichkeit für zweimal Glocken:

$P(Glocke; Glocke) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 8{,}16\ \%$

Erwartungswert:

	$P(zweimal\ Glocke)$	$P(zweimal\ 7)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$3{,}00\ €$	$9{,}00\ €$	$-1{,}00\ €$
$p(X_i)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{44}{49}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}2449€$	$0{,}1837\ €$	$-0{,}8980\ €$
$E(X)$	$0{,}2449\ € + 0{,}1837\ € - 0{,}8980\ € = -0{,}4694\ €$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}47\ €$ (aus der Sicht des Spielers).
Der Spieler verliert auf lange Sicht 0,47 € / Spiel

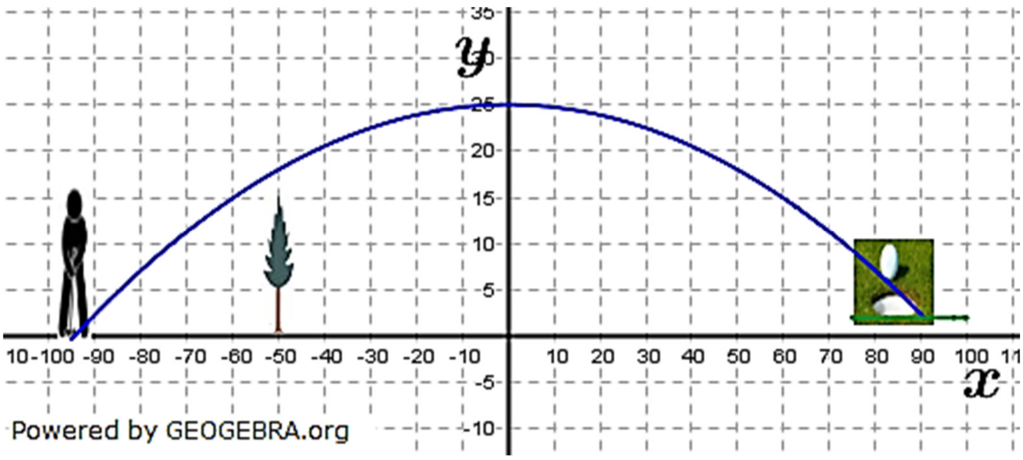
Merles Behauptung:
Neuer Einsatz ist $1{,}20\ €$; $E(X) = -0{,}47\ €$; Gewinn zweimal Glocke ist $4{,}00\ €$; Gewinn zweimal 7 ist $a + 1{,}20\ €$.

	$P(zweimal\ Glocke)$	$P(zweimal\ 7)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$2{,}80\ €$	$a - 1{,}20€$	$-1{,}20\ €$
$p(X_i)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{44}{49}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}2286€$	$0{,}0204(a - 1{,}20)\ €$	$-1{,}0776\ €$
$E(X)$	$0{,}2286\ € + 0{,}0204 \cdot a\ € - 0{,}0245\ € - 1{,}0776\ € = -0{,}47\ €$		

$0{,}2286\ € + 0{,}0204 \cdot a\ € - 0{,}0245\ € - 1{,}0776\ € = -0{,}47\ €$
$-0{,}8735\ € + 0{,}0204 \cdot a\ € = -0{,}47\ € \quad | \quad +0{,}8735\ €$
$0{,}0204 \cdot a\ € = 0{,}4035\ € \quad | \quad :0{,}0204$
$a \approx 19{,}80\ €$
Merle hat Recht, der Gewinn für zweimal 7 ist etwa 20 € (19,80 €).

Lösung W4b/2018

Lösungslogik
Die nachfolgende Graphik verdeutlicht die Situation:



Der Abschlag des Golfspielers erfolgt im Punkt $P(-95|0)$. Der Scheitel der Parabel liegt bei $S(0|25)$. Die Spitze des Baumes liegt bei $B(-50|15)$. Der Ball trifft das Green in $Q(x_Q|2)$, das Loch befindet sich in $L(85|2)$

Gleichung der Parabel p (Flugbahn):
Über den Ansatz $y = ax^2 + c$ ermitteln wir über die beiden Punkte P und S die Parameter a und c.

Überflug über Baum:
Wir berechnen die Höhe des Golfballs für $x = -50$.

Entfernung zum Loch bei Aufschlag auf das Green:
Wir berechnen die positive x_Q-Koordinate bei einer Höhe von $y = 2$ und bilden danach die Differenz aus x_Q und 85.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Gleichung der Parabel p (Flugbahn):

p:	$y = ax^2 + 25$	$c = 25$ wegen Punkt $S(0\|25)$
	$0 = a \cdot (-95)^2 + 25$	Punktprobe mit $P(-95\|0)$
	$a = -\frac{25}{9025} \approx -0{,}0028$	
	$y = -0{,}0028x^2 + 25$	

Überflug h über Baum:

h:	$y = -0{,}0028 \cdot (-50)^2 + 25 = 18$	y für $x = -50$
	$h = 18 - 15 = 3$	

Der Ball fliegt ca. $3\,m$ über die Baumspitze.

Entfernung d zum Loch bei Aufschlag auf das Green:

d:	$2 = -0{,}0028x^2 + 25$	$-25;\ :(-0{,}0028)$
	$x^2 = 8214{,}29$	$\sqrt{\ }$
	$x_{1,2} = \pm 90{,}63$	
	Nur Lösung x_1 mit $90{,}63$ ist sinnvoll.	
	$d = 90{,}63 - 85 = 5{,}63$	

Der Ball schlägt in einer Entfernung zum Loch von etwa $5{,}6\,m$ auf.