Lösung W1a/2019

Lösungslogik

Ermittlung von α :

Das Dreieck ABF ist gleichseitig (Aufgabenstellung). Damit ist $\alpha = 60\,°$.

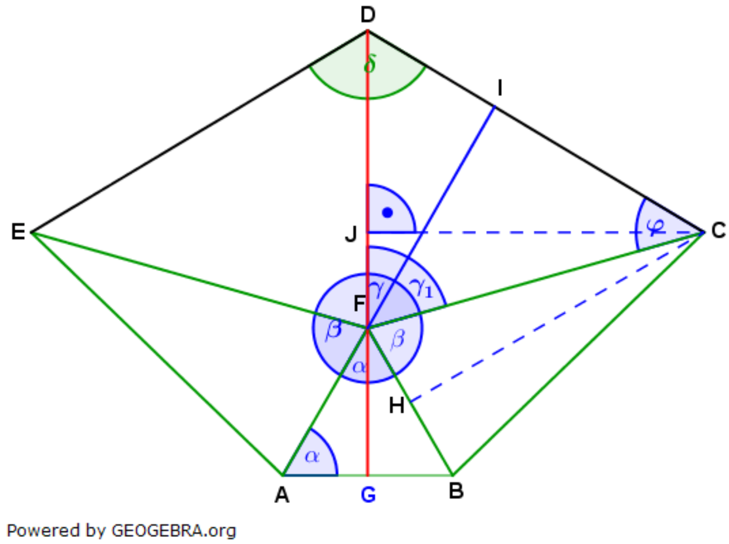
Berechnung von β :

Das Dreieck BCF ist gleichseitig (Aufgabenstellung). Die Höhe $\overline{HC}$ halbiert die Seite $\overline{FB} = \overline{AB}$ im Punkt H. Damit gilt:

$cos(\beta) = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{FC}}$.

Berechnung von γ :

Der überstumpfe Winkel bei F ergibt sich aus der Summe von $\alpha + 2 \cdot \beta$.



Der Innenwinkel γ der Raute ist die Ergänzung zu $360\,°$ zum überstumpfen Winkel bei F, somit $\gamma = 360\,° - (\alpha + 2 \cdot \beta)$.

Berechnung von φ :

Die Winkelsumme im Viereck ist $360\,°$. Somit verbleiben für die beiden Winkel bei E und C: $2 \cdot \varphi = 360\,° - \delta - \gamma$.

Berechnung von $\overline{FD}$:

Berechnung über den Sinussatz:

Nach dem Sinussatz gilt: $\frac{\overline{FC}}{sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\overline{FD}}{sin(\varphi)}$, *bzw.* $\overline{FD} = \frac{\overline{FC} \cdot sin\,(\varphi)}{sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$

Berechnung über trigonometrische Funktionen:

Wir betrachten das Dreieck CDF. Der Winkel φ bei Punkt C ist errechnet. Der Winkel bei Punkt D ist $\frac{\delta}{2}$. Der Winkel γ_1 bei Punkt F ist $180\,° - \frac{\delta}{2} - \varphi$

Es gilt: $cos(\gamma_1) = \frac{\overline{JF}}{\overline{FC}}$; $\overline{JC} = \sqrt{\overline{FC}^2 - \overline{JF}^2}$

$tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\overline{JC}}{\overline{JD}}$

$\overline{FD} = \overline{JF} + \overline{JD}$

Berechnung der Strecke $\overline{FG}$ aus der Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABF.

Berechnung von $\overline{DG}$ aus der Summe von $\overline{DF}$ und $\overline{FG}$.

Klausuraufschrieb

α : Das Dreieck ABF ist gleichseitig (Aufgabenstellung).

$\alpha = 60\,°$

β : Das Dreieck BCF ist gleichseitig (Aufgabenstellung). Die Höhe $\overline{HC}$ halbiert die Seite $\overline{FB} = \overline{AB}$ im Punkt H.

$cos(\beta) = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{FC}} = \frac{1,7}{7,0}$

$\beta = cos^{-1}\frac{1,7}{7,0} = 75,94\,°$

γ : Der überstumpfe Winkel bei F ergibt sich aus der Summe von $\alpha + 2 \cdot \beta$. Der Innenwinkel γ der Raute ist die Ergänzung zu $360\,°$ zum überstumpfen Winkel bei F.

$\gamma = 360\,° - (\alpha + 2 \cdot \beta) = 360\,° - (60 + 121,88) = 148,11\,°$

φ : Die Winkelsumme im Viereck ist $360\,°$. Somit verbleiben für die beiden Winkel bei E und C:

$2 \cdot \varphi = 360\,° - \delta - \gamma = 360\,° - 118\,° - 148,11\,° = 93,89\,°$

$\varphi = 46,95\,°$

$\overline{FD}$:

Berechnung über den Sinussatz:

$\frac{\overline{FC}}{sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\overline{FD}}{sin(\varphi)}$ | Sinussatz

$\overline{FD} = \frac{\overline{FC} \cdot sin\,(\varphi)}{sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{7 \cdot sin\,(46,95\,°)}{sin\,(59\,°)} = 5,968$

Alternativ: **Berechnung über trigonometrische Funktionen:**

γ_1: $\gamma_1 = 180\,° - \frac{\delta}{2} - \varphi = 180\,° - 59\,° - 46,95\,° = 74,05\,°$

$\overline{JF}$: $cos(\gamma_1) = \frac{\overline{JF}}{\overline{FC}}$ | $\cdot\,\overline{FC}$

$\overline{JF} = \overline{FC} \cdot \cos(\gamma_1) = 7 \cdot \cos(74,05\,°) = 1,924$

$\overline{JC}$: $\overline{JC} = \sqrt{\overline{FC}^2 - \overline{JF}^2} = \sqrt{7^2 - 1,924^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{JC} = 6,73$

$\overline{JD}$: $tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\overline{JC}}{\overline{JD}}$ | $\cdot\,\overline{JD};\ :\ tan\left(\frac{\delta}{2}\right)$

$\overline{JD} = \frac{\overline{JC}}{tan\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{6,73}{\tan\,(59°)} = 4,044$

$\overline{FD}$: $\overline{FD} = \overline{JF} + \overline{JD} = 1,924 + 4,044 = 5,968$

$\overline{FG}$: $\overline{FG}$ ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABF.

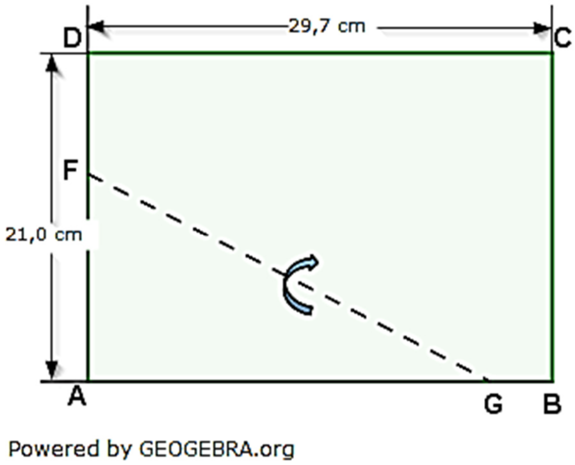
$\overline{FG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 3,4 \cdot \sqrt{3} = 2,944$

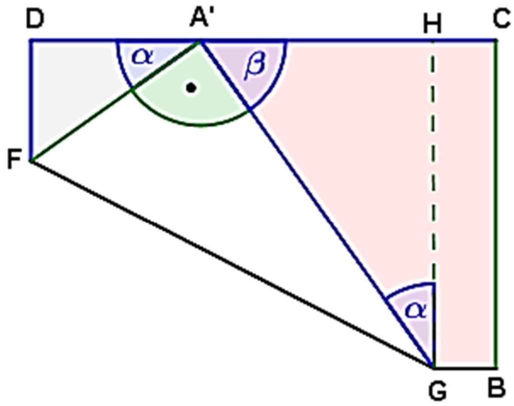
$\overline{DG}$: $\overline{DG} = \overline{FD} + \overline{FG} = 5,968 + 2,944 = 8,912$

Der Abstand des Punktes D von der Strecke $\overline{AB}$ ist $8,9\ cm$ lang.

Lösung W1b/2019

<u>Lösungslogik</u>





Das Viereck $GBCA'$ ist ein Trapez. Die Fläche errechnet sich aus:
$A_{GBCA'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{GB} + \overline{A'C}\right) \cdot \overline{BC}$
$\overline{A'C} = \overline{A'H} + \overline{GB}$
$\overline{A'H}$ lässt sich über den $\tan(\alpha)$ aus $\tan(\alpha) = \frac{\overline{A'H}}{\overline{GH}}$ mit $\overline{GH} = \overline{BC} = 21\ cm$ ermitteln.
Berechnung von α über den sin aus $\frac{\overline{FD}}{\overline{FA'}}$ mit $\overline{FA'} = 13{,}3\ cm$ (Aufgabenstellung) und $\overline{FD} = \overline{AD} - \overline{AF}$.
Wegen $\alpha + 90° + \beta = 180°$ ist der Winkel bei G gleich dem Winkel α.

Berechnung von $\overline{DA'}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{A'H}$ über den $tan\,(\alpha)$.
Berechnung von $\overline{GB}$ über $\overline{GB} = 29{,}7 - \overline{DA'} - \overline{A'H}$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Das Viereck $GBCA'$ ist ein Trapez.
$A_{GBCA'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{GB} + \overline{A'C}\right) \cdot \overline{BC}$

α: $sin(\alpha) = \frac{\overline{FD}}{\overline{FA'}} = \frac{21-13{,}3}{13{,}3} = \frac{7{,}7}{13{,}3}$
$\alpha = sin^{-1}\frac{7{,}7}{13{,}3} = 35{,}3765°$

Wegen $\alpha + 90° + \beta$ bei A' ist der Winkel bei B ebenfalls gleich α.

$\overline{DA'}$: $\overline{DA'} = \sqrt{\overline{FA'}^2 - \overline{FD}^2}$ | Satz des Pythagoras
$\overline{DA'} = \sqrt{13{,}3^2 - (21-13{,}3)^2} = 10{,}84$

$\overline{A'H}$: $ta\,n(\alpha) = \frac{\overline{A'H}}{\overline{BC}}$ | $\cdot\,\overline{BC}$
$\overline{A'H} = \overline{BC} \cdot tan(\alpha) = 21{,}0 \cdot tan(35{,}3765°) = 14{,}91$

$\overline{GB}$: $\overline{GB} = 29{,}7 - \overline{DA'} - \overline{A'H} = 29{,}7 - 10{,}84 - 14{,}91 = 3{,}95$

$A_{GBCA'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{GB} + \overline{A'H} + \overline{GB}\right) \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot (3{,}95 + 14{,}91 + 3{,}95) \cdot 21 = 239{,}51$

Die Fläche des Vierecks $GBCA'$ ist $239{,}5\ cm^2$ groß.

Lösung W2b/2019

Lösungslogik

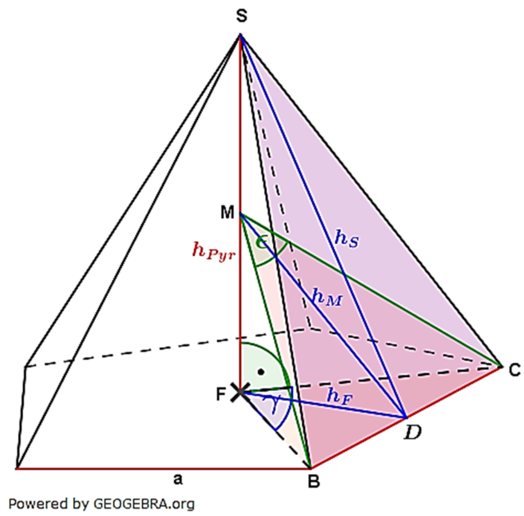
Höhe h_{Pyr} der Fünfeckpyramide:

Zur Berechnung der Höhe h_{Pyr} der Pyramide benötigen wir zunächst die Länge der Grundkante a. Da das Dreieck BCS gleichschenklig ist, halbiert die Höhe h_M die Seitenkante $a = \overline{BC}$ als auch den Winkel ϵ.

Somit gilt $sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{BM}}$. Die Höhe h_M folgt nun aus dem Satz des Pythagoras:

$h_M = \sqrt{\overline{BM}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

Wir betrachten nun das Teildreieck BFC der Pyramidengrundfläche. Der Winkel γ errechnet sich bei einem regelmäßigen Fünfeck aus $\gamma = \frac{360\,°}{5}$. Für die Höhe h_F gilt nun $tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_F}$.



Die Strecke $\overline{FM} = \frac{h_{Pyr}}{2}$ folgt aus dem Satz des Pythagoras mit $\frac{h_{Pyr}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2}$.

Minimale bzw. maximale Fläche des Dreiecks BCM':

Aus der Grafik erkennen wir, dass der minimale Flächeninhalt dann entsteht, wenn der Punkt M mit dem Punkt F zusammenfällt und der maximale Flächeninhalt dann, wenn der Punkt M mit dem Punkt S zusammenfällt.

$A_{BCM'_{min}} = A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_F$, alle Werte bereits bekannt.

$A_{BCM'_{max}} = A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S$.

h_S muss noch ermittelt werden über den Satz des Pythagoras aus $h_S = \sqrt{h_F^2 + h_{Pyr}^2}$.

Klausuraufschrieb

a: $\quad \overline{BD} = \frac{a}{2}$

$sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{BM}} \quad | \quad \cdot \overline{BM}$

$\frac{a}{2} = \overline{BM} \cdot sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = 8{,}0 \cdot sin(24°) = 3{,}254 \quad | \quad \cdot 2$

$a = 6{,}51$

h_{Pyr}: $\quad \overline{FM} = \frac{h_{Pyr}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2}$

h_M: $\quad h_M = \sqrt{\overline{BM}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$h_M = \sqrt{8{,}0^2 - 3{,}254^2} = 7{,}308$

h_F: $\quad \gamma = \frac{360°}{5} = 72\,°$

$tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_F} \quad | \quad \cdot h_F;\ : tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$h_F = \frac{\frac{a}{2}}{tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{3{,}254}{\tan(36°)} = 4{,}479$

h_{Pyr}: $\quad \overline{FM} = \frac{h_{Pyr}}{2} = \sqrt{h_M^2 - h_F^2} \quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = 2 \cdot \sqrt{7{,}308^2 - 4{,}479^2} = 11{,}549$

Die Höhe der Pyramide beträgt $11{,}5\ cm$

Minimale bzw. maximale Fläche des Dreiecks BCM':

$A_{BCM'_{min}}$: $A_{BCM'_{min}} = A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_F$

$A_{BCM'_{min}} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}51 \cdot 4{,}479 = 14{,}579$

$A_{BCM'_{max}}$ $A_{BCM'_{max}} = A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S$

h_S: $h_S = \sqrt{h_F^2 + h_{Pyr}^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_S = \sqrt{4{,}479^2 + 11{,}549^2} = 12{,}387$

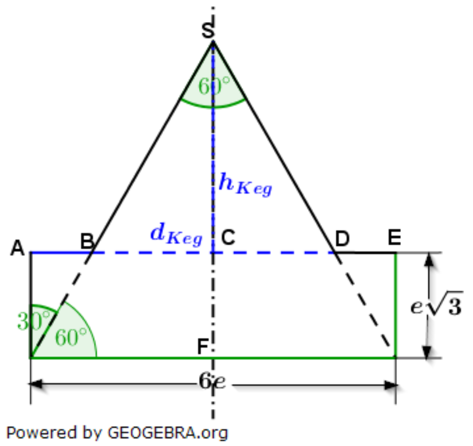
$A_{BCM'_{max}}$ $A_{BCM'_{max}} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}51 \cdot 12{,}387 = 40{,}32$

Die minimale Fläche eines Dreiecks BCM' beträgt $14{,}6\ cm^2$, die maximale Fläche beträgt $40{,}3\ cm^2$.

Lösung W2b/2019

Lösungslogik

Das Volumen des zusammengesetzten Körpers besteht aus dem Volumen eines Zylinders mit Durchmesser $6e$ und der Höhe $e\sqrt{3}$ zuzüglich dem Volumen eines Kegels mit Durchmesser d_{Keg} und Höhe h_{Keg}.



$V_{Zyl} = \frac{\pi d_{Zyl}^2}{4} \cdot h_{Zyl}$; $V_{Keg} = \frac{1}{3}\frac{\pi d_{Keg}^2}{4} \cdot h_{Keg}$

Berechnung von d_{Keg}:

Wir berechnen die Strecke $\overline{AB}$ aus $tan(30\ °) = \frac{\overline{AB}}{e\sqrt{3}}$

$d_{Keg} = 6e - 2 \cdot \overline{AB}$

Berechnung von h_{Keg}:

Zunächst ermitteln wir die Gesamthöhe $\overline{SF}$ des Körpers über $tan(30\ °) = \frac{3e}{\overline{SF}}$.

$h_{Keg} = \overline{SF} - e\sqrt{3}$, alle erforderlichen Werte sind nun bekannt.

Klausuraufschrieb

$V_{ges} = V_{Zyl} + V_{Keg}$

$V_{Zyl} = \pi r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl} = \pi \cdot (3e)^2 \cdot e\sqrt{3} = 9\pi e^3\sqrt{3}$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

$\overline{AB}$: $tan(30\ °) = \frac{\overline{AB}}{e\sqrt{3}}$ | $\cdot\, e\sqrt{3}$

$\overline{AB} = e\sqrt{3} \cdot \tan(30°) = e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = e$

r_{Keg}: $r_{Keg} = \frac{6e - 2\cdot\overline{AB}}{2} = 2e$

h_{Keg}: $h_{Keg} = \overline{FS} - e\sqrt{3}$

$\overline{FS}$: $tan(30\ °) = \frac{3e}{\overline{SF}}$ | $\cdot\, \overline{SF};\ :\tan(30°)$

$\overline{FS} = \frac{3e}{\tan(30\ °)} = \frac{3e}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9e}{\sqrt{3}} = 3e\sqrt{3}$

$h_{Keg} = 3e\sqrt{3} - e\sqrt{3} = 2e\sqrt{3}$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg} = \frac{1}{3}\pi(2e)^2 \cdot 2e\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi e^3\sqrt{3}$

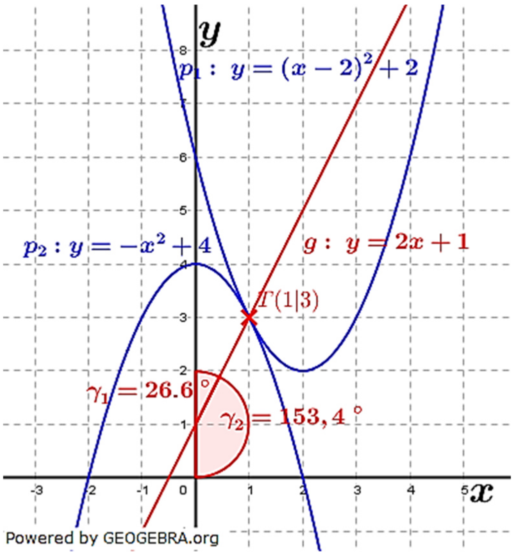
$V_{ges} = 9\pi e^3\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi e^3\sqrt{3} = \pi e^3\sqrt{3} \cdot \left(9 + \frac{8}{3}\right) = \frac{35}{3}\pi e^3\sqrt{3}$

q.e.d.

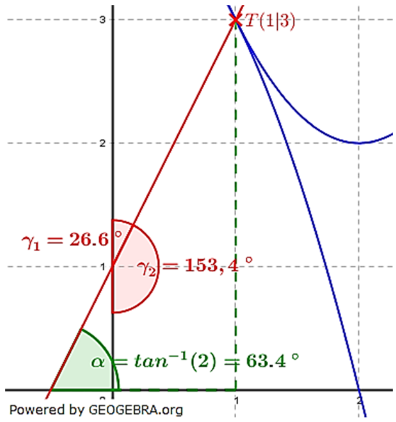
Lösung W3a/2019

Lösungslogik

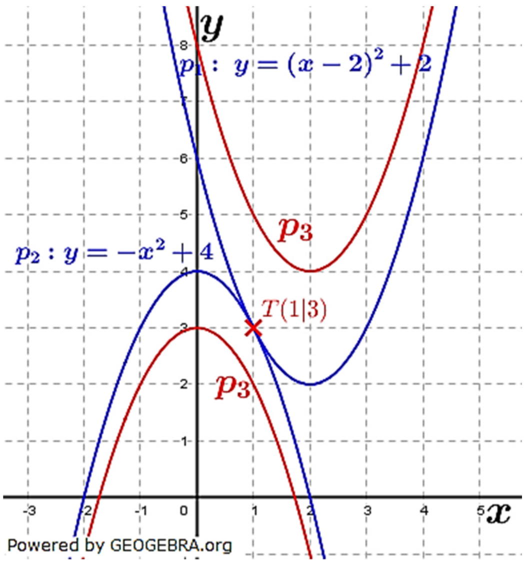
Parabelgleichung p_1:
Mit dem gegebenen Scheitelpunkt $S(2|2)$ die Scheitelpunktgleichung aufstellen.
Parabelgleichung p_1:
Mit den gegebenen Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ und der Parabelgleichung $y = -x^2 + c$ die Parabelgleichung aufstellen.
Schnittpunkt T:
Wir schneiden p_1 mit p_2 und erhalten den Schnittpunkt T.
Gerade g:
Mit der gegebenen Steigung $m = 2$ und der Geradengleichung $y = mx + b$ sowie einer Punktprobe mit T erhalten wir die Gleichung von g.



Schnittwinkel von g mit der y-Achse:
Der Winkel, den einer Gerade g mit der x-Achse einschließt errechnet sich aus dem tan der Steigung m (Siehe Formel-sammlung $m = tan\,(\alpha)$.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.
Der Winkel γ_1 ist Ergänzungs-Winkel zu $90°$ von α, der Winkel γ_2 ist Ergänzungs-Winkel zu $180°$ von γ_1.



Parabelgleichung p_3:
Parabeln, die weder p_1 noch p_2 schneiden, müssen im inneren der gegebenen Parabeln verlaufen, siehe nachfolgende Grafik. Somit ist p_3 entweder eine in y-Richtung nach oben verschobene Parabel p_1 oder aber eine weiter nach unten verschobene Parabel p_2.



Klausuraufschrieb

Parabelgleichung p_1:

p_1: $y = (x - x_S)^2 + y_S$ | Scheitelpunktform der Parabel

$y = (x-2)^2 + 2$ | Scheitelpunkt $S(2|2)$ einsetzen.

Parabelgleichung p_2:

p_2: $y = -x^2 + c$ | Normalform einer nach unten Geöffneten Parabel mit Scheitel $(0|c)$

$0 = -2^2 + c$ | Punktprobe mit $N_1(2|0)$

$c = 4$

$y = -x^2 + 4$

Schnittpunkt T von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:

$(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4$

$x^2 - 4x + 4 + 2 = -x^2 + 4$ | $+x^2$

$2x^2 - 4x + 6 = 4$ | -4

$2x^2 - 4x + 2 = 0$ | $:2$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$ | p/q-Formel

$x_1 \rightarrow p_2$:

$y = -1^2 + 4 = 3$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $T(1|3)$.

Gerade g:

$y = mx + b$ | allgemeine Geradengleichung

$y = 2x + b$ | Steigung $m = 2$ ist gegeben

$3 = 2 \cdot 1 + b$ | Punktprobe mit $T(1|3)$

$b = 1$

Die Gleichung der Geraden g lautet $y = 2x + 1$.

Schnittwinkel von g mit der y-Achse:

Schnittwinkel mit der x-Achse:

$tan(\alpha) = m$

$\alpha = tan^{-1}(m) = tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

Schnittwinkel 1 (γ_1) von g mit der y-Achse ist Ergänzungswinkel von α zu $90\,°$:

$\gamma_1 = 90\,° - 63{,}4° = 26{,}6°$

Schnittwinkel 2 (γ_2) von g mit der y-Achse ist Ergänzungswinkel von γ_1 zu $180\,°$:

$\gamma_2 = 180\,° - 26{,}6° = 153{,}4°$

Die beiden Schnittwinkel von g mit der y-Achse sind $\gamma_1 = 26{,}6°$ und $\gamma_2 = 153{,}4°$ groß.

Parabelgleichung p_3:

Die Parabel muss innerhalb von p_1 oder aber innerhalb von p_2 verlaufen. Damit entweder Verschiebung von p_1 in y-Richtung nach oben, alternativ Verschiebung von p_2 in y-Richtung nach unten.

$p_3 = p_1 + 2 = (x-2)^2 + 4$ | alternativ

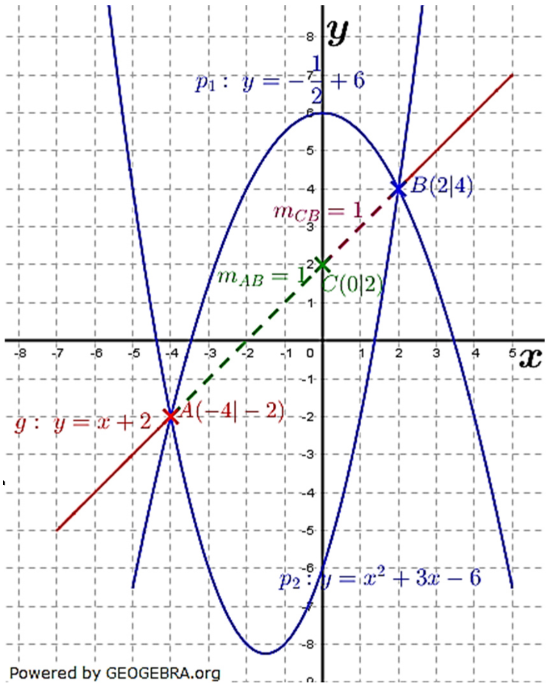
$p_3 = p_2 - 1 = -x^2 + 3$

Andere Verschiebungen denkbar.

Lösung W3b/2019

Lösungslogik

Parabel p_1: $y = ax^2 + c$:
Sowohl der Punkt $S(0|6)$ als auch der Punkt $B(2|4)$ sind Parabelpunkte. Durch Punktproben ermitteln wir die Parameter a und c.
Parabel p_2: $y = x^2 + 3x + q$:
Der Punkt $B(2|4)$ ist Parabelpunkt. Durch eine Punktprobe ermitteln wir den Parameter q.
Zweiter Schnittpunkt A:
Schnittpunktermittlung durch Gleichsetzung.
Nachweis, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen:
Drei Punkte A, B und C liege dann auf einer Geraden g wenn die Steigung der Strecke $\overline{AB}$ mit der Steigung der Strecke $\overline{BC}$ übereinstimmt.
Alternativ:
Aufstellung einer Geradengleichung durch die Punkte A und B mit anschließender Punktprobe mit C.



Klausuraufschrieb

Parabel p_1: $y = ax^2 + c$:

p_1: $6 = a \cdot 0 + c$ | Punktprobe mit $S(0|6)$
$c = 6$
$4 = a \cdot 2^2 + 6$ | Punktprobe mit $B(2|4)$
$4a = -2$
$a = -\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$

Parabel p_2: $y = x^2 + 3x + q$:

p_2: $4 = 2^2 + 3 \cdot 2 + q$ | Punktprobe mit $B(2|4)$
$4 = 10 + q$
$4 = -6$
$y = x^2 + 3x - 6$

Zweiter Schnittpunkt A:

$p_1 \cap p_1$:
$-\frac{1}{2}x^2 + 6 = x^2 + 3x - 6$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$\frac{3}{2}x^2 + 3x - 12 = 0$ | $\frac{1}{2}x^2$; -6; $\cdot \frac{2}{3}$
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$ | p/q-Formel
$x_1 = 2;\ \ x_2 = -4$
$x_1; x_2 \longrightarrow p_1$
$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 6 = 4$ ==> Punkt $B(2|4)$
$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 6 = -2$ ==> Punkt $A(-2|-4)$
$A(-2|-4)$

Der zweite Schnittpunkt hat die Koordinaten $A(-2|-4)$.

Nachweis, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen:

m_{AB}: *Steigung Strecke* $\overline{AB}$:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-2)}{2-(-4)} = \frac{6}{6} = 1$$

m_{BC}: *Steigung Strecke* $\overline{BC}$:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-4}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Wegen $m_{AB} = m_{BC}$ *liegen die drei Punkte* A, B *und* C *auf einer Geraden.*

Alternativ: Gerade durch A und B:

g: $y = mx + b$

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-2)}{2-(-4)} = \frac{6}{6} = 1$

$y = x + b$

$4 = 2 + b$ | Punktprobe mit B

$b = 2$

$2 = 0 + 2$ | Punktprobe mit C

$2 = 2$ | wahre Aussage

Die Punkte A, B *und* C *liegen auf einer Geraden.*

Lösung W4a/2019

<u>Lösungslogik</u>

Die nachfolgende Tabelle verdeutlicht die Situation: In den 6x6-Quadraten steht die jeweilige Augensumme.

1. Würfel

2. Würfel/Wurf

	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Ereignis „Augensumme = 4“:

Wie wir sehen, steht die 4 in drei der 36 $6x6$-Quadrate (blau hinterlegt). Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. *Somit ist:*

$P(Augensumme = "4") = \frac{3}{36}$.

el/Wurf	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

Ereignis „Augensumme kleiner 4“:

Wie wir sehen, steht eine Zahl kleiner 4 in drei der 36 $6x6$-Quadrate (Orange hinterlegt). Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Somit ist:

$P(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{3}{36}$.

Ereignis „Augensumme größer 4“:

Dies sind alle anderen Ereignisse der 36 $6x6$-Quadrate (weiß hinterlegt), also insgesamt 30 Quadrate. Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Somit ist:

$P(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{30}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeiten sind ermittelt, der Erwartungswert kann berechnet werden.

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Einsen.

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	1	1	1
1	2	3	4	2	2	2
2	3	4	5	3	3	3
3	4	5	6	4	4	4
4	5	6	7	5	5	5
5	6	7	8	6	6	6
6	7	8	9	7	7	7

Aus der zuvor stehenden Grafik erkennen wir, dass die Wahrscheinlichkeit für „Auensumme kleiner 4" nun 9 der 36 Quadrate belegt. Die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme gleich 4" belegt 6 der 36 Quadrate, damit belegt die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme größer 4" 21 der 36 Quadrate.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{9}{36}$

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{21}{36}$

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Dreien.

1. Würfel / 2. Würfel/Wurf	1	2	3	3	3	3
1	**2**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**
2	**3**	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**
3	**4**	**5**	**6**	**6**	**6**	**6**
4	**5**	**6**	**7**	**7**	**7**	**7**
5	**6**	**7**	**8**	**8**	**8**	**8**
6	**7**	**8**	**9**	**9**	**9**	**9**

$P_{3\ Dreien}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$.

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{3}{36}$

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{27}{36}$

Entscheidung des Spielebetreibers über eine Argumentation bzw. Rechnung siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

$P\left(Augensumme = "4"\right) = \frac{3}{36}$; $\left.\mathrm{P(Augensumme\ kleiner\ "4"}\right) = \frac{3}{36}$;

$P(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{30}{36}$.

Erwartungswert:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$3{,}00$ €	$1{,}00$ €	$-1{,}00$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}25$€	$0{,}08$ €	$-0{,}83$ €
$E(X)$	$0{,}25$ € $+ 0{,}08$ € $- 0{,}83$ € $= -0{,}50$ €		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}50$ € (aus der Sicht des Spielers).

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Einsen.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$; $P_{3\ Einsen}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{9}{36}$

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{21}{36}$

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Dreien.

$P_{3\ Dreien}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$; $P_{3\ Dreien}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{3}{36}$

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{27}{36}$

Entscheidung des Spielebetreibers durch eine Argumentation:

Bei Änderung des Würfels auf drei Einsen bzw. drei Dreien bleibt die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme gleich 4“ dieselbe, lediglich die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme kleiner 4“ ist bei drei Einsen wesentlich höher als bei drei Dreien. Das bedeutet, dass der Betreiber bei Änderung durch drei Einsen mehr Gewinne auszahlen muss als bei Änderung durch drei Dreien. Er sollte sich somit für eine Änderung auf drei Dreien entscheiden.

Entscheidung des Spielebetreibers durch Rechnung:

Erwartungswert für drei Einsen:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$3{,}00$ €	$1{,}00$ €	$-1{,}00$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{21}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}50$€	$0{,}25$ €	$-0{,}58$ €
$E(X)$	$0{,}50$ € $+ 0{,}25$ € $- 0{,}58$ € $= 0{,}17$ €		

Der Erwartungswert beträgt $+0{,}17$ € (aus der Sicht des Spielers).

Erwartungswert für drei Dreien:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$3{,}00\ €$	$1{,}00\ €$	$-1{,}00\ €$
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{27}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}50€$	$0{,}08\ €$	$-0{,}75\ €$
$E(X)$	$0{,}50\ € + 0{,}08\ € - 0{,}75\ € = -0{,}17\ €$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}17\ €$ (aus der Sicht des Spielers).

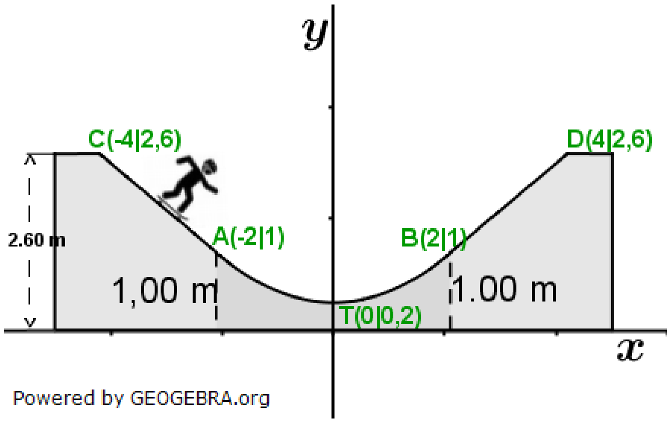
Da der Spielebetreiber bei Änderung auf drei Einsen einen Verlust von $0{,}17\ €$ / Spiel erleidet, sollte er sich für eine Änderung auf drei Dreien entscheiden.

Lösung W4b/2019

<u>Lösungslogik</u>

Allgemeine Festlegung:

Wir legen das Koordinatensystem so, dass die x-Achse auf dem Boden und die y-Achse durch den Punkt T verläuft.
Wir versehen die einzelnen Punkte mit ihren Koordinaten (siehe Grafik rechts).
Für den Parabelbogen AB gilt:
Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Punkt T. Die Parabel ist in x-Richtung unverschoben und in y-Richtung um $0{,}2\ m$ nach oben verschoben.



Die Punkte A und B erfüllen die Funktionsgleichung der Parabel.

Parabelgleichung p:

Die Parabel hat die Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$. Wegen $T(0|0{,}2)$ ist $c = 0{,}2$.
Über eine Punktprobe mit $B(2|1)$ errechnen wir a.

Geradengleichung für Strecke $\overline{BD}$:

Wir bestimmen die Gleichung einer Geraden durch die zwei Punkte $A(2|1)$ und $D(4|2{,}6)$.

Klausuraufschrieb

Allgemeine Festlegung:

$y = ax^2 + c$ ist eine in x-Richtung unverschobene Parabel. Der Scheitel liegt in $T(0|0{,}2)$, die y-Achse ist Symmetrieachse.

Parabelgleichung p:

$S(0\vert 0{,}2)$	|	Scheitelpunkt der Parabel
$y = ax^2 + 0{,}2$		
$B(2\vert 1)$	|	Punkt der Parabel
$1 = 2^2 \cdot a + 0{,}2$	|	Punktprobe mit B
$0{,}8 = 4a$		
$a = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$		

Die Parabelgleichung lautet: $y = 0{,}2x^2 + 0{,}2$

Geradengleichung für Strecke $\overline{BD}$:

Die Gerade verläuft durch die Punkte $B(2|1)$ und $D(4|2{,}6)$.

$y = mx + c$		
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2{,}6-1}{4-2} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$		
$y = 0{,}8x + c$		
$1 = 0{,}8 \cdot 2 + c$	|	Punktprobe mit B:
$c = -0{,}6$		

Die Geradengleichung lautet $y = 0{,}8x - 0{,}6$.