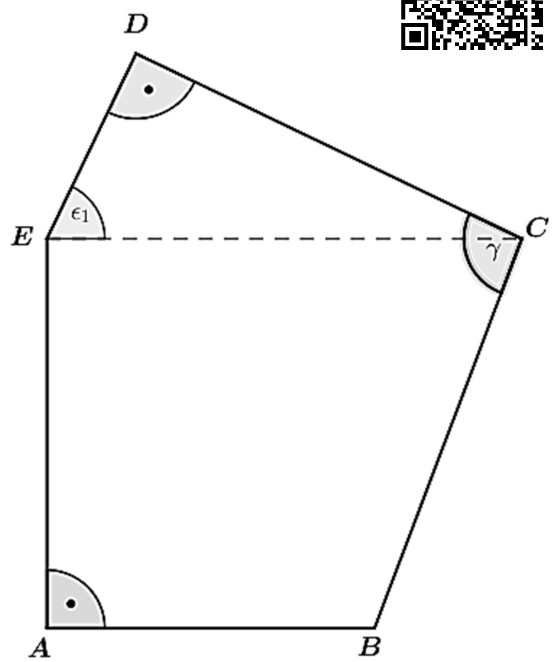
Aufgabe W1a/2020

Im Fünfeck $ABCDE$ gilt:

$\overline{CD} = 9{,}5\ cm$
$\epsilon_1 = 64{,}0°$
$\gamma = 95{,}0°$ und
$\overline{AB} \parallel \overline{CE}$

Der Abstand des Punktes D zu $\overline{AB}$ beträgt $12{,}96\ cm$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCE$.

Lösung: $A_{ABCE} = 77{,}74\ cm^2$



Powered by GEOGEBRA.org

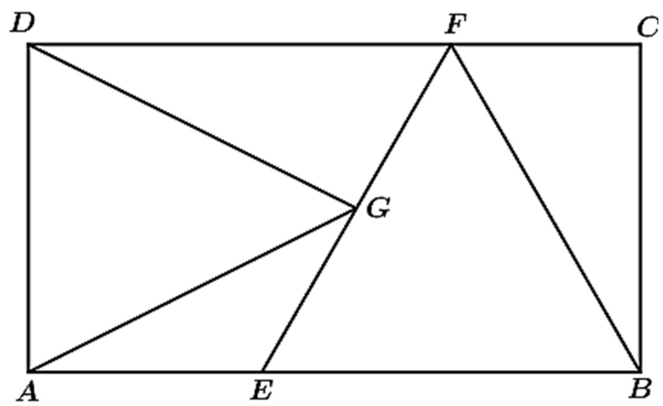
Aufgabe W1b/2020

Im Rechteck $ABCD$ liegen die gleichseitigen Dreiecke EBF und AGD.
Es gilt:

$\overline{BE} = 4e\sqrt{3}$

Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt:

$A = 36e^2\sqrt{3}$



Powered by GEOGEBRA.org

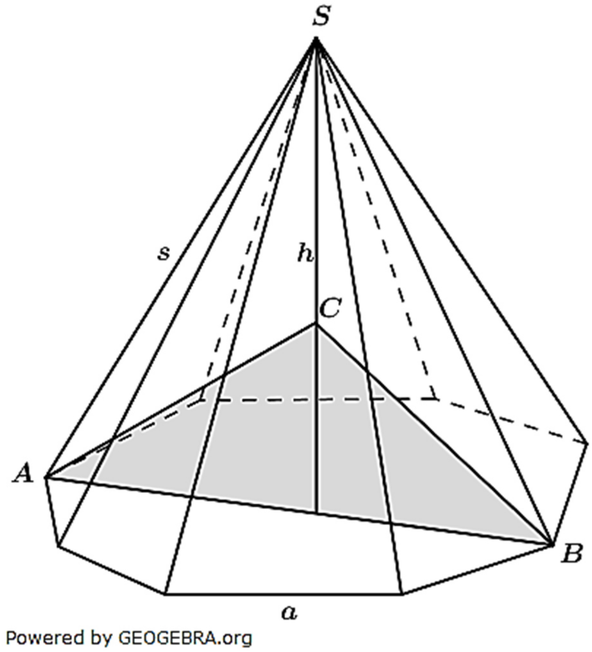
Aufgabe W2a/2020

In einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide sind bekannt:

$a = 6{,}2\ cm$
$s = 32\ cm$

Der Punkt C liegt auf der Höhe der Pyramide.

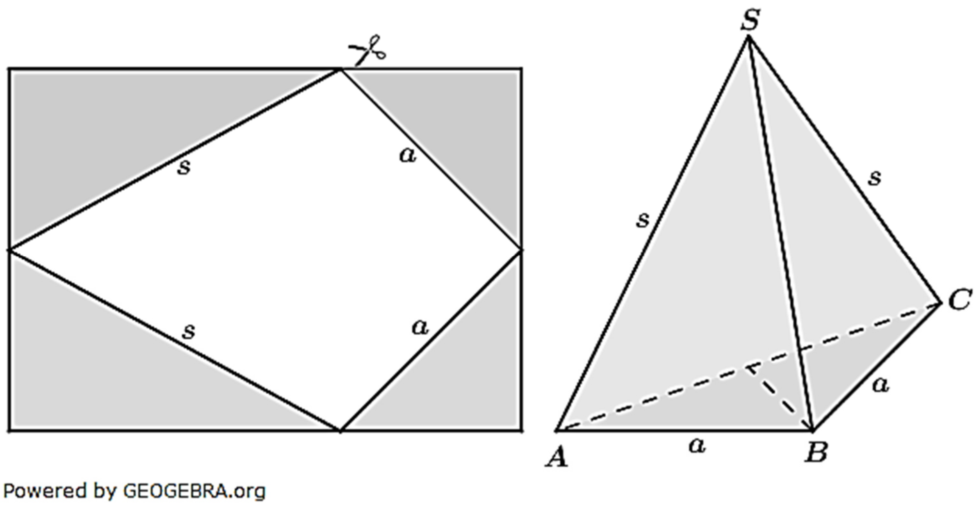
Das Dreieck ABC soll den gleichen Flächeninhalt haben wie eines der Manteldreiecke.
Berechnen Sie die Länge von $\overline{SC}$.



Lösung: $\overline{SC} = 18{,}77\ cm$

Aufgabe W2b/2020

Von einem DIN-A4-Blatt $(21{,}0\ cm\ x\ 29{,}7\ cm)$ werden die vier eingefärbten Dreiecke abgeschnitten.
Mit diesen vier Dreiecken werden die Diagonalschnittfläche und die Grundfläche einer halben massiven Pyramide vollständig beklebt.



Lena behauptet: „Die beiden Manteldreiecke ABS und BCS haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie die Restfläche des DIN-A4-Blatts."
Hat Lena recht? Begründen Sie durch Rechnung.

Lösung: Lena hat nicht recht.
$A_{ABS} = A_{BCS} = 152{,}88\ cm^2$
$A_{ABS} + A_{BCS} = 305{,}76\ cm^2$
$A_{Rest} = 311{,}85\ cm^2$

Aufgabe W3a/2020

Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat mit der x-Achse die Schnittpunkte $N_1(-5|0)$ und $N_2(-1|0)$. Sie schneidet die y-Achse im Punkt A.
Die Parabel p_2 hat die Funktionsgleichung $y = x^2 - 6x + 11$ und schneidet die y-Achse im Punkt B.

- Durch die Scheitelpunkte S_1 und S_2 der beiden Parabeln verläuft die Gerade g. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Die Gerade h mit der Steigung $m = -1$ geht durch C. Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden g und h?
  Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder Argumentation.

Lösungen: g: $y = x - 1$
Schnittwinkel zwischen g *und* h*:* $90\,°$

Aufgabe W3b/2019

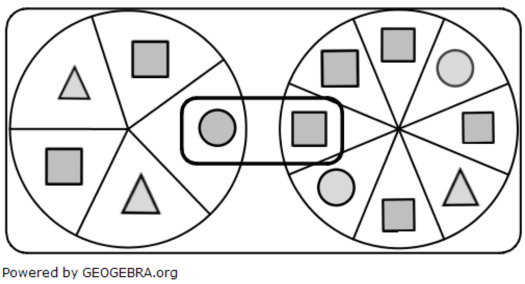
Eine Parabel p mit der Funktionsgleichung $y = x^2 + 6x$ schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 und N_2.
Die Gerade g mit der Funktionsgleichung $y = x$ schneidet die Parabel in den Punkten N_1 und C.

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2C.
- Die Gerade h mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x$ schneidet die Parabel in den Punkten N_1 und D.
  Peter behauptet: „Die Steigung der Geraden h ist nur halb so groß wie die der Geraden g. Daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2D auch nur halb so groß wie der des Dreiecks N_1N_2C."
  Hat Peter recht? Begründen Sie rechnerisch.

Lösungen: *Flächeninhalt* $A_{N_1N_2C} = 15\,FE$
mit $N_1(0|0)$, $N_2(-6|0)$ *und* $C(-5|-5)$
Peter hat nicht recht. $A_{N_1N_2D} = 8{,}25\,FE$
mit $D(-5{,}5|-2{,}75)$.

Aufgabe W4a/2020

Die beiden Glücksräder werden gedreht. Nachdem sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster eine Kombination zweier Symbole.



- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleiche Symbole im Sichtfenster zu sehen?

- Die Glücksräder werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird der ab gebildete Gewinnplan geprüft. Berechnen Sie den Erwartungswert.

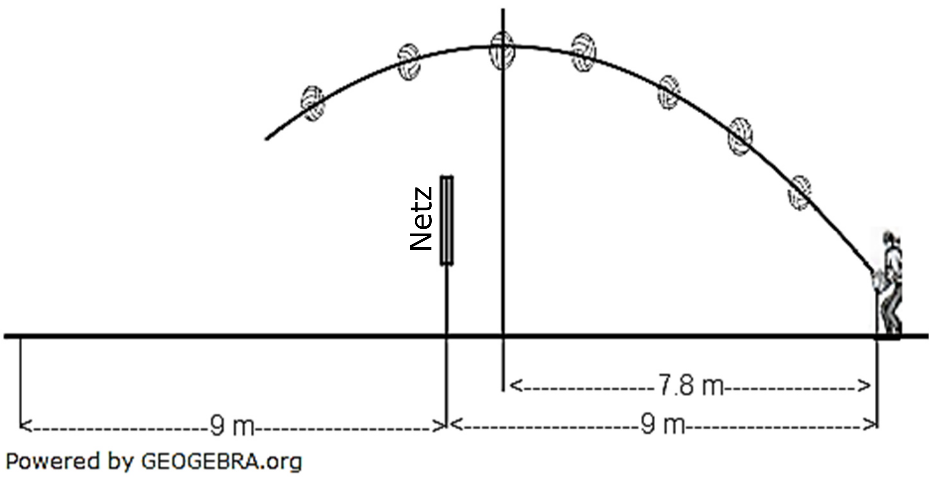
Gewinnplan	
Ereignis	Gewinn
Gleiche Symbole	2,00 €
Kreis und Dreieck	4,00 €
Restliche Möglichkeiten	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,50 €	

- Der Gewinnplan soll so verändert werden, dass das Spie fair wird. Wie hoch muss dann der Gewinn für das Ereignis „Kreis und Dreieck" sein, wenn alles andere unverändert bleibt?

Lösung: $P(zwei\ gleiche\ Symbole) = 35\ \%$
$E(X) = -0{,}30\ €$ *(aus der Sicht des Spielers)*
Neuer Gewinn für „Kreis und Dreieck": X=6,40 €.

Aufgabe W4b/2019

Thea trainiert Aufschläge beim Volleyball (siehe Skizze).



Die Flugkurve des Balles lässt sich mit einer Funktions-gleichung der Form $y = ax^2 + c$ annähernd beschreiben. Der Ball verlässt beim Anschlag von unten die Hand in einer Höhe von $90\ cm$ über der Grundlinie. Nach $7{,}8\ m$ (horizontal gemessen) erreicht die Flughöhe des Balles ihre maximale Höhe von $4{,}0\ m$.

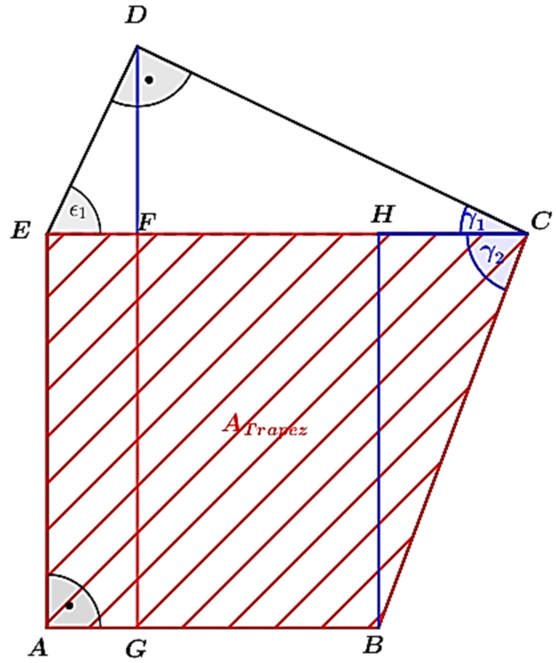
- Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung der zugehörigen Parabel an.
- In welchem Abstand überquert der Ball das $2{,}24\ m$ hohe Netz?
- Die Grundlinien des Volleyballspielfeldes sind jeweils $9{,}0\ m$ vom Netz entfernt (siehe Skizze).
  In welcher Entfernung zur Grundlinie trifft der Ball auf dem Boden auf?

Lösungen: $y = -0{,}051x^2 + 4$
Abstand des Balles vom Netz: $1{,}69\ m$
Abstand auftreffend zur Grundlinie: $1{,}34\ m$

Lösung W1a/2020

Lösungslogik

Das Viereck $ABCE$ ist ein Trapez. Die beiden parallelen Seiten sind $\overline{AB}$ und $\overline{EC}$, die Höhe ist $\overline{AE}$.
Berechnung von $\overline{EC}$ über den $sin\,(\epsilon_1)$.
Berechnung von γ_1 über die Winkelsumme im Dreieck CDE.
Berechnung von γ_2 über die Differenz von $\gamma - \gamma_1$.
Berechnung von $\overline{DF}$ über den $sin\,(\gamma_1)$.
Berechnung von $\overline{AE}$ über die Differenz $\overline{DG} - \overline{DF}$.
Berechnung von $\overline{HC}$ über den $tan\,(\gamma_2)$.
Berechnung von $\overline{AB}$ über die Differenz $\overline{EC} - \overline{HC}$.
Berechnung des Flächeninhalts über die Trapezformel.



Klausuraufschrieb

Das Viereck $ABCE$ ist ein Trapez.

$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\overline{AB}+\overline{EC}}{2} \cdot \overline{AE}$

$\overline{EC}$: $\quad sin\,(\epsilon_1) = \frac{\overline{CD}}{\overline{EC}} \qquad | \quad \cdot \overline{EC};\ :\ sin\,(\epsilon_1)$

$\overline{EC} = \frac{\overline{CD}}{\sin\,(\epsilon_1)} = \frac{9{,}5}{sin\,(64°)} = 10{,}5697$

γ_1: $\quad \gamma_1 + \epsilon_1 + 90° = 180°$

$\gamma_1 = 90° - 64° = 26\,°$

γ_2: $\quad \gamma_2 = \gamma - \gamma_1 = 95\,° - 26° = 69\,°$

$\overline{DF}$: $\quad \sin(\gamma_1) = \frac{\overline{DF}}{\overline{CD}} \qquad | \quad \cdot \overline{CD}$

$\overline{DF} = \overline{CD} \cdot \sin(\gamma_1) = 9{,}5 \cdot \sin(26°) = 4{,}1645$

$\overline{AE}$: $\quad \overline{AE} = \overline{DG} - \overline{DF} = 12{,}90 - 4{,}1645 = 8{,}7355$

$\overline{HC}$: $\quad \tan(\gamma_2) = \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{HC}} \qquad | \quad \cdot \overline{HC};\ :\tan\,(\gamma_2)$

$\overline{HC} = \frac{\overline{AE}}{\tan\,(\gamma_2)} = \frac{8{,}7355}{tan\,(69°)} = 3{,}3532$

$\overline{AB}$: $\quad \overline{AB} = \overline{EC} - \overline{HC} = 10{,}57 - 3{,}35 = 7{,}22$

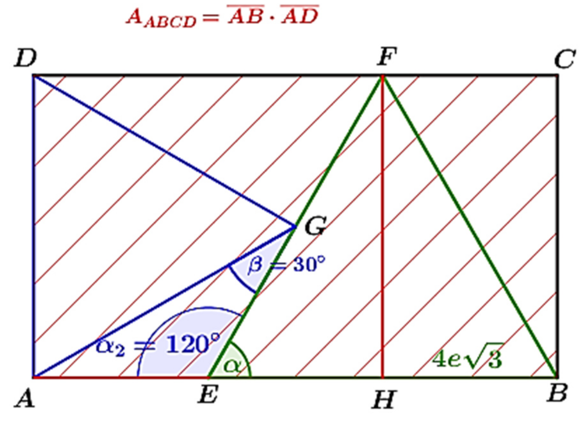
$A_{Trapez} = \frac{\overline{AB}+\overline{EC}}{2} \cdot \overline{AE} = \frac{7{,}22+10{,}57}{2} \cdot 8{,}74 = 77{,}74$

Der Flächeninhalt des Vierecks $ABCE$ beträgt $77{,}74\ cm^2$.

Lösung W1b/2020

Lösungslogik

Für die Fläche des Rechtecks $ABCD$ benötigen wir die Länge der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$.
Die Strecke $\overline{AD}$ entspricht der Höhe im gleichseitigen Dreieck EBF.
Berechnung von $\overline{AD}$ über die Höhenformel des gleichseitigen Dreiecks.
Die Strecke $\overline{EB}$ ist bekannt, somit fehlt nur noch die Strecke $\overline{AE}$. Wegen $\alpha = 60°$ ist $\alpha_2 = 120°$ und $\beta = 30°$. Damit ist der Winkel $EAG = 60\,°$
Berechnung von $\overline{AE}$ über den Sinussatz.
Berechnung von $\overline{AB}$ über die Summe aus $\overline{AE} + \overline{EB}$.
Berechnung von A_{ABCD} über $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.



Klausuraufschrieb

$A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$

$\overline{AD}$: $\quad \overline{AD} = \overline{HF}$

$\overline{HF}$ ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck EBF.

$\overline{HF} = \frac{\overline{EB}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{4e\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 6e = \overline{AD} = \overline{AG} = \overline{DG}$

$\overline{AE}$: $\quad \frac{\overline{AE}}{sin\,(30°)} = \frac{\overline{EG}}{sin\,(60°)} \qquad | \quad \cdot sin\,(30°)$

$\overline{AE} = \frac{\overline{EG} \cdot sin\,(30°)}{sin\,(30°)} = \overline{EG}\,\cdot$

$\overline{EG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EB}$

$\overline{AE} = \frac{\overline{EB}}{2} = 2e\sqrt{3}$

$\overline{AB}$: $\quad \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = 4e\sqrt{3} + 2e\sqrt{3} = 6e\sqrt{3}$

A_{ABCD}:

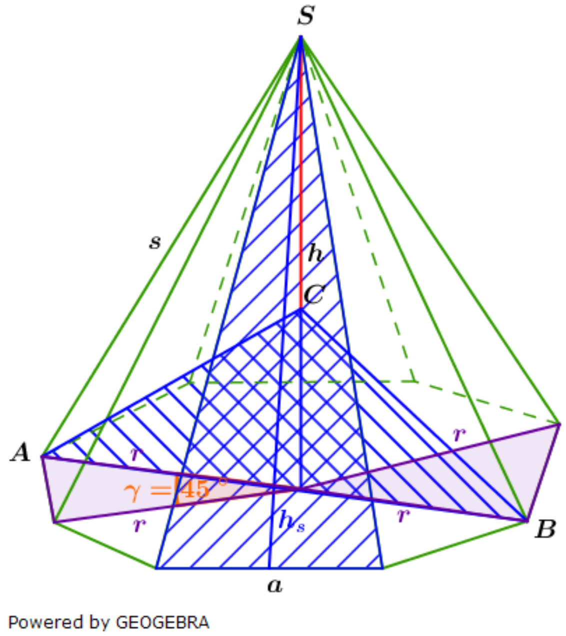
$A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 6e\sqrt{3} \cdot 6e = 36e^2\sqrt{3}$

q.e.d.

Lösung W2a/2020

Lösungslogik

Die Grafik verdeutlicht die Situation. Die Fläche des Dreiecks DES soll gleich der Fläche des Dreiecks ABC sein.
A_{DES} ist das Dreieck einer Seitenfläche. Sein Flächeninhalt erhalten wir über
$A_{DES} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$.
Hierzu benötigen wir zunächst h_s über den Satz des Pythagoras.
Die Fläche des Dreiecks ABC errechnet sich aus:
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{ABC}$
Hierzu benötigen wir zunächst die Länge von $\overline{AB}$ mit $\overline{AB} = 2r$.
Wir benötigen also , was die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der achteckigen Grundfläche ist. Wir berechnen r über den $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ mit $\gamma = 45\,°$.



Da ja $A_{DES} = A_{ABC}$ sein soll, können wir nun über die Gleichsetzung h_{ABC} ermitteln.
Verbleibt noch zum Schluss die Berechnung der Höhe der Pyramide, denn die gesuchte Strecke $\overline{SC}$ errechnet sich aus $h_{Pyr} - h_{ABC}$.
h_{Pyr} errechnen wir über den Satz des Pythagoras unter Verwendung von r und s.

Klausuraufschrieb

Flächeninhalt einer Seitenfläche:

A_{DES}: $A_{DES} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

h_s: $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_s = \sqrt{32^2 - 3{,}1^2} = 31{,}85$

$A_{DES} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}2 \cdot 31{,}85 = 98{,}735$

Flächeninhalt Dreieck ABC:

A_{ABC}: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{ABC}$

$\overline{AB} = 2r$

r: $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{r}$ | $\cdot r; : sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$r = \frac{\frac{a}{2}}{sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{3{,}1}{sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$

γ: $\gamma = \frac{360\,°}{8} = 45\,°$

$r = \frac{3{,}1}{sin(22{,}5\,°)} = 8{,}1$

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 16{,}2 \cdot h_{ABC}$

h_{ABC}: $A_{DES} = A_{ABC}$

$98{,}735 = \frac{1}{2} \cdot 16{,}2 \cdot h_{ABC}$

$98{,}735 = 8{,}1 \cdot h_{ABC}$ | $:8{,}1$

$h_{ABC} = 12{,}19$

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - r^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = \sqrt{32^2 - 8{,}1^2} = 30{,}96$

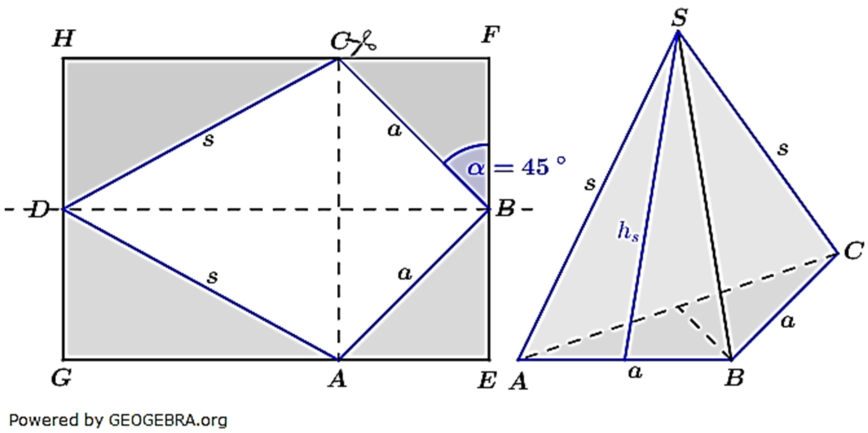
$\overline{SC}$: $\overline{SC} = h_{pyr} - h_{ABC} = 30{,}96 - 12{,}19 = 18{,}77$

Die Strecke $\overline{SC}$ ist $18{,}77\ cm$ lang.

Lösung W2b/2020

<u>Lösungslogik</u>

Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die Situation.



Um die Fläche der beiden Seitendreiecke ABS und BCS berechnen zu können, benötigen wir die Länge von Grundkante a sowie die Höhe der Seitenfläche h_s der quadratischen Pyramide.
Für h_s benötigen wir zusätzlich noch die Länge der Seitenkante s.
Sowohl a als auch s lassen sich aus dem Schnitt des DIN-A4-Blattes ermitteln. So bilden ja die beiden Dreiecke AEB und BFC die halbe Grundfläche der quadratischen Pyramide. Damit ist bei den Punkten B und D jeweils ein Winkel von $45\,°$. Die Strecke $\overline{BF}$ z. B. halbiert ja die Breite des DIIN-A4-Blatts, ist also $10{,}5\ cm$ lang. Damit ist auch die Strecke $\overline{CF}$ $10{,}5\ cm$ lang. a lässt sich somit über den Satz des Pythagoras berechnen.
Wegen der Höhe des DINA-A4-Blatts von $29{,}7\ cm$ ist die Strecke $\overline{HC}$ $19{,}2\ cm$ lang.
Die Strecke $\overline{DH}$ ist wiederum $10{,}5\ cm$ lang. Somit lässt sich s über den Satz des Pythagoras berechnen.
Nachdem s und bekannt sind, können wir die Restfläche des DIN-A4-Blatts berechnen, indem wir von der Gesamtfläche $29{,}7 \cdot 21$ die Flächen des Dreiecks AEB sowie DCH jeweils zwei Mal abziehen.
Verbleibt noch die Berechnung von h_s der Seitendreiecke der Pyramide. Über s und $\frac{a}{2}$ können wir diese mit dem Satz des Pythagoras berechnen und erhalten damit die Fläche der Seitendreiecke.

Klausuraufschrieb

$\overline{BF}$: $\overline{BF} = \frac{1}{2} \cdot 21 = 10{,}5$

$\overline{CF}$: $\overline{CF} = \overline{BF} = 10{,}5$

a: $a = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{CF}^2}$ | Satz des Pythagoras

$a = \sqrt{10{,}5^2 + 10{,}5^2} = 14{,}85$

$\overline{HC}$: $\overline{HC} = 29{,}7 - \overline{BF} = 29{,}7 - 10{,}5 = 19{,}2$

$\overline{DH}$: $\overline{DH} = \overline{BF} = 10{,}5$

s: $s = \sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{DH}^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{19{,}2^2 + 10{,}5^2} = 21{,}89$

Fläche Dreieck BFC:

$A_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot 10{,}5 \cdot 10{,}5 = 55{,}125$

Fläche Dreieck DHC:

$A_{DHC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HC} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{2} \cdot 19{,}2 \cdot 10{,}5 = 100{,}8$

Fläche DIN-A4-Blatt

$A_{A4} = 29{,}7 \cdot 21 = 623{,}7$

Restfläche:

$A_{Rest} = A_{A4} - 2 \cdot (A_{BFC} + A_{DHC}) = 623{,}7 - 2 \cdot (55{,}125 + 100{,}8) = 311{,}85$

Seitenflächen Pyramide:

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

h_s: $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_s = \sqrt{21{,}89^2 - 7{,}425^2} = 20{,}59$

$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 14{,}85 \cdot 20{,}59 = 152{,}88$

Summe A_{ABS} und A_{BCS}:

$A_{ABS} + A_{BCS} = 2 \cdot A_{ABS} = 2 \cdot 152{,}88 = 305{,}76$

Wegen $A_{Rest} \neq 2 \cdot A_{ABS}$ hat Lena nicht recht.

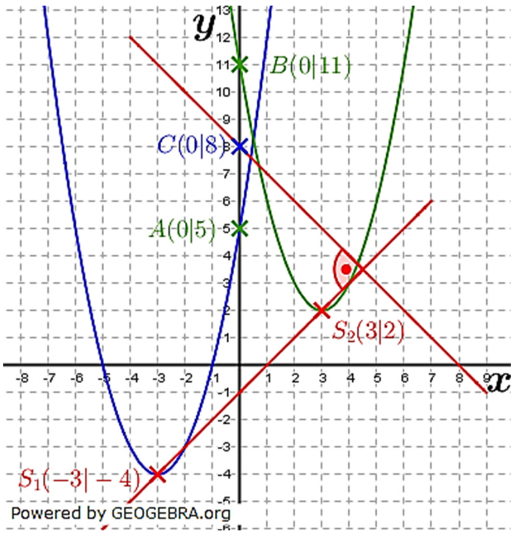
Lösung W3a/2020

Lösungslogik

Parabelgleichung p_1:
Mit den gegebenen Nullstellen können wir die Nullstellengleichung mit $y = (x - x_{N_1})(x - x_{N_2})$ aufstellen und daraus die Normalform $y = x^2 + px + q$ der Parabelgleichung bilden und erhalten über q die Koordinaten des Schnittpunktes A.

Parabel 2:
Über die gegebene Funktionsgleichung bestimmen wir die Koordinaten von B.

Gerade g:
Wir berechnen die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2. Die Funktionsgleichung der Geraden dann über diese beiden Punkte.



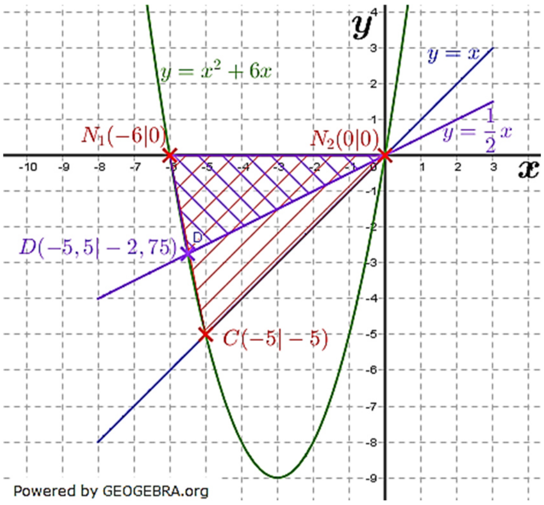
Schnittwinkel g und h:
Wir bestímmen den Mittelpunkt C der Strecke $\overline{AB}$. Gerade h hat die gegebene Steigung $m_h = -1$. Gerade g hat die Steigung $m_g = 1$. Die Orthogonalitätsbedingung $m_h \cdot m_g = -1$ ist damit erfüllt, die beiden Geraden schneiden sich unter einem Winkel von $90\,°$.

<u>Klausuraufschrieb</u>
Parabelgleichung p_1
p_1: $y = (x - x_{N_1})(x - x_{N_2})$
$y = (x+5)(x+1)$ | ausmultiplizieren
$y = x^2 + 6x + 5$
A: Wegen $q = 5$ in der Funktionsgleichung hat der Punkt die Koordinaten $A(0|5)$.
Parabelgleichung p_2
p_2: $y = x^2 - 6x + 11$
B: Wegen $q = 11$ in der Funktionsgleichung hat der Punkt die Koordinaten $B(0|11)$.
Scheitelpunkte p_1 und p_2:
S_1: $y = x^2 + 6x + 5$
$y = (x+3)^2 - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4$ | Quadratische Ergänzung
$S_1(-3|-4)$
S_2: $y = x^2 - 6x + 11$
$y = (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$ | Quadratische Ergänzung
$S_2(3|2)$
Gerade g:
g: $y = mx + b$
$m = \frac{y_{S_2} - y_{S_1}}{x_{S_2} - x_{S_1}} = \frac{2-(-4)}{3-(-3)} = \frac{6}{6} = 1$
$y = x + b$
$S_1 \to g$:
$-4 = -3 + b$
$b = -1$
$y = x - 1$
Schnittwinkel von g und h:
$m_g = 1; \quad m_h = -1$
$m_g \cdot m_h = 1 \cdot (-1) = -1$
Die Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt. g und h schneiden sich unter einem Winkel von $90\,°$.

Lösung W3b/2020

Lösungslogik

Parabel p Nullstellen N_1 und N_2:
Wir setzen die gegebene Funktionsgleichung auf 0 und lösen nach x auf.
Punkt C:
Wir schneiden $y = x$ mit p und bestimmen die Koordinaten von C.
Punkt D
Wir schneiden $y = \frac{1}{2}x$ mit p und bestimmen die Koordinaten von D.
Flächeninhalt Dreieck N_1N_2C:
über $A_{N_1N_2C} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot y_C$.
Flächeninhalt Dreieck N_1N_2D:
über $A_{N_1N_2D} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot y_D$.



Klausuraufschrieb

Parabel p Nullstellen N_1 und N_2:
$x^2 + 6x = 0$
$x(x + 6) = 0$ | x ausklammern
$x_1 = 0; \quad x_2 = -6$ | Satz vom Nullprodukt
$N_1(-6|0); \quad N_2(0|0)$

Punkt C:
$y = x \cap p$
$x^2 + 6x = x$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$x^2 + 5x = 0$
$x(x + 6) = 0$ | x ausklammern
$x_1 = 0; \quad x_2 = -5$ | Satz vom Nullprodukt
$x_2 \to y$
$y = (-5)^2 + 6 \cdot (-5) = -5$
$C(-5| - 5)$
Punkt D:
$y = \frac{1}{2}x \cap p$
$x^2 + 6x = \frac{1}{2}x$ | Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$x^2 + 5{,}5x = 0$
$x(x + 5{,}5) = 0$ | x ausklammern
$x_1 = 0; \quad x_2 = -5{,}5$ | Satz vom Nullprodukt
$x_2 \to y$
$y = (-5{,}5)^2 + 6 \cdot (-5{,}5) = -2{,}75$
$C(-5{,}5| - 2{,}75)$

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2C:

$A_{N_1N_2C} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot y_C$

$A_{N_1N_2C} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15\ FE$

Flächeninhalt Dreieck N_1N_2D:

$A_{N_1N_2D} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot y_D$

$A_{N_1N_2C} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}75 = 8{,}25\ FE$

Wegen $8{,}25 \neq 15$ hat Peter nicht recht.

Lösung W4a/2020

Lösungslogik

Gleiche Symbole:

An Hand der Abbildung legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Symbole pro Glücksrad fest, stellen den Ergebnisraum auf und berechnen die Wahrscheinlichkeit.

Erwartungswert:

Wir müssen zunächst noch die Wahrscheinlichkeit für die Symbolkombination „Kreis und Dreieck" bestimmen. Für den Gewinn „Zwei gleiche Symbole" haben wir die Wahrscheinlichkeit ja schon zuvor ermittelt. Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Veränderung Gewinn für Symbolkombination „Kreis und Dreieck" für faires Spiel:

Wir setzen den Auszahlungsbetrag für „Kreis und Dreieck" auf a sowie den Erwartungswert auf 0 und lösen die entstehende Gleichung nach a auf. Die sich ergebenden Auszahlung muss dann noch um $1{,}50\ €$ (Einsatz) erhöht werden.

Klausuraufschrieb

Gleiche Symbole:

Linkes Glücksrad: $P(Dreieck) = \frac{2}{5}$; $P(Quadrat) = \frac{2}{5}$; $P(Kreis) = \frac{1}{5}$

Rechtes Glücksrad: $P(Dreieck) = \frac{1}{8}$; $P(Quadrat) = \frac{5}{8}$; $P(Kreis) = \frac{2}{8}$

$$P(zwei\ gleiche\ Symbole) = P\{(Dreieck; Dreieck), (Quadrat; Quadrat), (Kreis; Kreis)\}$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2+10+2}{40} = \frac{14}{40} = 35\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster zwei gleiche Symbole zu sehen, beträgt $35\ \%$.

Erwartungswert:

$P(Kreis\ und\ Dreieck) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{40}$

	$P(zwei\ gleiche\ Symbole)$	$P(Kreis\ Dreieck)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$0{,}50\ €$	$2{,}50\ €$	$-1{,}50\ €$
$p(X_i)$	$\frac{14}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{21}{40}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}175\ €$	$0{,}3125\ €$	$-0{,}7875\ €$
$E(X)$	$0{,}175\ € + 0{,}3125\ € - 0{,}7875\ € = -0{,}30\ €$		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist $-0{,}30\ €$.

Veränderung Gewinn für Symbolkombination „Kreis und Dreieck" für faires Spiel:

	$P(zwei\ gleiche\ Ziffer)$	$P(Kreis\ Dreieck)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$0{,}50$ €	a €	$-1{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{14}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{21}{40}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}175$ €	$0{,}125a$ €	$-0{,}7875$ €
$E(X)$	$0{,}175\text{ €} + 0{,}125a\text{ €} - 0{,}7875\text{ €} = 0{,}125a\text{ €} - 0{,}6125$		

$0{,}125a\text{ €} - 0{,}6125\text{ €} = 0 \qquad | \qquad +0{,}6125\text{ €};\ :0{,}125$

$a = 4{,}90$

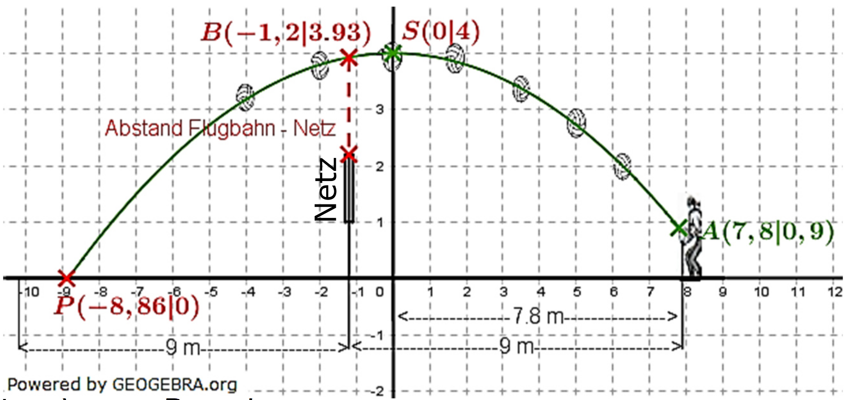
Die Auszahlung für „Kreis und Dreieck" muss $4{,}90$ € betragen, somit muss der Gewinn $4{,}90\text{ €} + 1{,}50\text{ €} = 6{,}40\text{ €}$ sein.

Die Gewinn für die Symbole „Kreis und Dreieck" muss $6{,}40$ € betragen, damit das Spiel fair ist.

Lösung W4b/2020

<u>Lösungslogik</u>

Die Grafik verdeutlicht die Lösungssituation.



Funktionsgleichung Parabel:
In y-Richtung verschobene nach unten geöffnete Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + c$.
Scheitelpunkt ist $S(0|4)$.
Der Abwurfpunkt ist Punkt der Parabel.
Wir machen eine Punktprobe zur Berechnung von a.

Abstand Überflug Netz:
Dies ist die Differenz aus der Höhe des Balls bei $x = -1{,}2$ und der Höhe des Netzes.

Entfernung zur Grundlinie bei Auftreffen des Balls:
Wir bestimmen die linke Nullstelle der Parabelgleichung.

<u>Klausuraufschrieb</u>

Funktionsgleichung Parabel:

$y = ax^2 + c$

Scheitelpunkt ist $S(0|4)$

$y = ax^2 + 4$

Abwurfpunkt ist $A(7{,}8|0{,}9)$.

$A \to p$

$0{,}9 = a \cdot 7{,}8^2 + 4 \qquad | \qquad -4;\ :7{,}8^2$

$a = -0{,}051$

$y = -0{,}051x^2 + 4$

Abstand Überflug Netz:
Höhe des Balls bei $x = -1{,}2$:
$y = -0{,}051 \cdot (-1{,}2)^2 + 4 = 3{,}93$
$d = 3{,}93 - 2{,}24 = 1{,}69$
Der Abstand des Balls beim Überflug des Netzes zum Netz beträgt $1{,}69\ m$.

Entfernung zur Grundlinie bei Auftreffen des Balls:
$-0{,}051x^2 + 4 = 0 \quad | \quad +0{,}051x^2;\ :0{,}051$
$x^2 = 78{,}4314 \quad | \quad \sqrt{}$
$x_{1,2} = \pm 8{,}86$
Es interessiert hier nur die linke Nullstelle, somit $P(-8{,}86|0)$.
$10{,}2 - 8{,}86 = 1{,}34$
Der Ball trifft in einer Entfernung von $1{,}34\ m$ zur Grundlinie auf dem Boden auf.