Themenerläuterung

Dieses Thema handelt von der Berechnung der relativen Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) des Auftretens bestimmter Ereignisse bei Zufallsexperimenten.
Unter einem Zufallsexperiment wird z.B. das Ziehen von Kugeln unterschiedlicher Farben aus einer Urne verstanden, oder das Werfen einer Münze, oder das Würfeln von zwei Würfeln, oder das Drehen eines Glücksrades usw.
Das Auftreten des Ergebnisses eines Zufallsexperiments wird als Ereignis bezeichnet. Die Summe aller möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiments bezeichnet man als Ergebnisraum des Experiments. So hat z.B. das Werfen einer Münze die Ereignisse „Wappen" und „Zahl". Der Ergebnisraum dieses Experiments hat damit die Anzahl 2, da ja nur die genannten beiden Ereignisse auftreten können.
Die grafische Veranschaulichung aller möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiments erfolgt häufig über sogenannte „Baumdiagramme".
Die einzelnen Ereignisse werden durch relative Häufigkeiten, der sogenannten „Wahrscheinlichkeit" beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit für „Wappen" beim Werfen einer Münze beträgt $0{,}5 = 50\%$, da ja nur zwei Ereignisse auftreten können. Beim Werfen eines Würfels hat das Auftreten einer 6 die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, da beim Würfel ja die Ereignisse 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 auftreten können.
Wir unterscheiden noch nach einstufigen, zweistufigen usw. bzw. mehrstufigen Zufallsexperimenten und zusätzlich noch zwischen Ziehen „mit Zurücklegen" und „ohne Zurücklegen".
Je nach Art des Zufallsexperiments gelten unterschiedlich Regeln für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.
Ereignisse werden mit großen Buchstaben beschrieben, z. B.

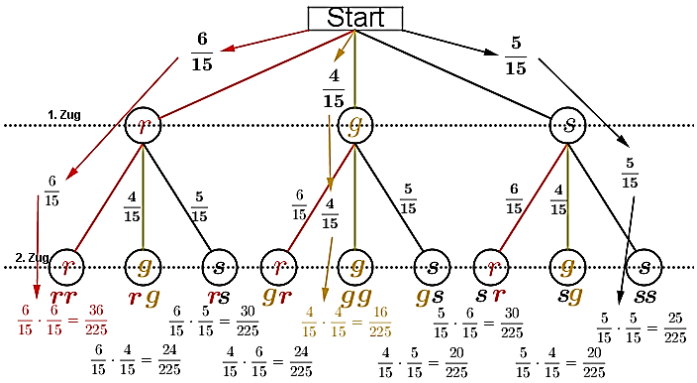
E: „Werfen einer 6 beim Würfeln mit einem Würfel"

Die zugehörige Wahrscheinlichkeit wird dann mit $P(E)$ bezeichnet.

Die wichtigsten benötigten Formeln

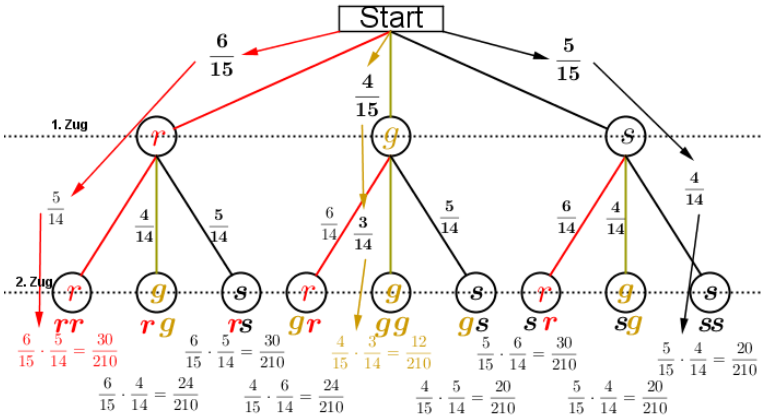
1. *Summe aller Wahrscheinlichkeiten*
   Die Summe aller möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiments ist stets **1** bzw. **100** %.

2. *Baumdiagramm und Pfadregeln*
   Ziehen mit Zurücklegen



Das vorstehende Baumdiagramm zeigt das zweimalige Ziehen von Kugeln aus einer Urne mit 6 roten, 4 gelben und 5 schwarzen Kugeln mit Zurücklegen. An den einzelnen Ästen steht jeweils die Wahrscheinlichkeit für den jeweiligen Zug. Das Ziehen einer roten Kugel hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{15}$, denn es gibt 6 rote von insgesamt 15 Kugeln. Für die gelbe Kugel ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{15}$, denn es gibt 4 gelbe von insgesamt 15 Kugeln. Für die schwarze Kugel ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{15}$, denn es gibt 5 schwarze von insgesamt 15 Kugeln.

Ziehen ohne Zurücklegen



Dieses Baumdiagramm entspricht dem Baumdiagramm aus *„Ziehen ohne Zurücklegen"* mit dem Unterschied, dass jetzt die erste gezogene Kugel nicht in die Urne zurückgelegt wird, wir sprechen von *„Ziehen ohne Zurücklegen"*. Im ersten Zug bleibt alles wie es war, jedoch verändern sich jetzt die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen des zweiten Zuges. Da die zuerst gezogene Kugel ja nicht zurückgelegt wird, befinden sich für den zweiten Zug ja nur noch 14 Kugeln in der Urne. Wurde zuerst eine rote Kugel gezogen, befinden sich nur noch 5 rote Kugeln in der Urne, jedoch weiterhin 4 gelbe und 5 schwarze. Analog gilt dies für das Ziehen einer gelben oder schwarzen Kugel im ersten Zug.
In einem Baumdiagramm gibt es zwei Regeln:

Erste Pfadregel:
Wandert man eine Pfad entlang vom Startpunkt bis zum Ausgang, so werden die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen **multipliziert**. Werden also zwei rote Kugeln gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit für zwei rote Kugeln $\frac{6}{15} \cdot \frac{6}{15} = \frac{36}{225}$, für zwei gelbe Kugeln $\frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} = \frac{16}{225}$ und für zwei schwarze Kugeln $\frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{25}{225}$. Analog gilt dies auch für alle anderen Farbkombinationen.

Zweite Pfadregel:
Liegen die Wahrscheinlichkeiten für ein Elementarereignis fest (jeder einzelne Ausgang des Baumdiagramms wird als Elementarereignis bezeichnet), werden die Einzelwahrscheinlichkeiten zur Gesamtwahrscheinlichkeit **addiert**.
Wird z.B. nach dem Ereignis „zwei rote Kugeln" gefragt, so gibt es nur einen einzigen Ausgang, nämlich den mit $\frac{6}{15} \cdot \frac{6}{15} = \frac{36}{225}$ bei „mit Zurücklegen" bzw. $\frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{30}{210}$ bei „ohne Zurücklegen".

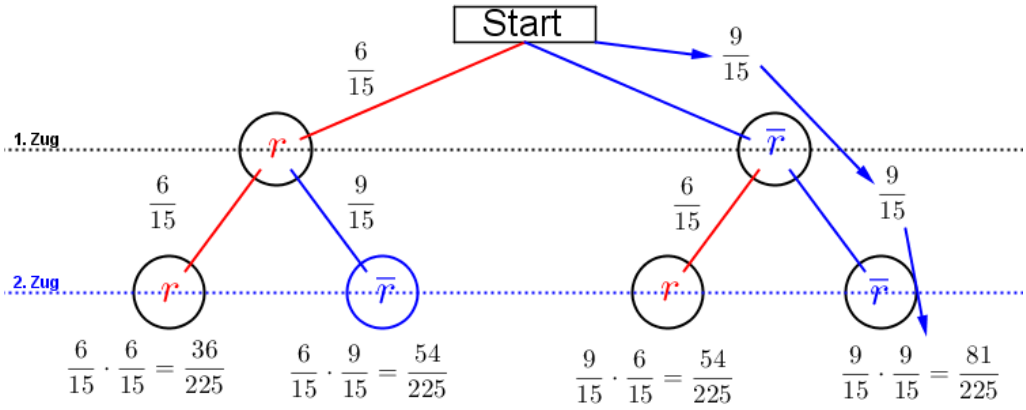
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Es könnte ja aber auch nach dem Ereignis „eine rote und eine gelbe Kugel" gefragt sein. Wenn du nun das Baumdiagramm *„Ziehen mit Zurücklegen"* betrachtest, so kommt das Ereignis „eine rote Kugel und eine gelbe Kugel" ja zweimal vor, nämlich der Ausgang „rg" und der Ausgang „gr". Und jetzt besagt die zweite Pfadregel, dass du die Einzelwahrscheinlichkeiten für „rg" und „gr" **addieren** musst, was zu $\frac{6}{15}\cdot\frac{4}{15}+\frac{4}{15}\cdot\frac{6}{15}=\frac{24}{225}+\frac{24}{225}=\frac{48}{225}$ bei „mit Zurücklegen" bzw. $\frac{6}{15}\cdot\frac{4}{14}+\frac{4}{15}\cdot\frac{6}{14}=\frac{24}{210}+\frac{24}{210}=\frac{48}{210}$ bei „ohne Zurücklegen" führt.
Oder du sollst die Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln ermitteln. Zwei gleichfarbige Kugeln können sein „rr", „gg", „ss". Somit musst du **addieren**, nämlich $\frac{36}{225}+\frac{16}{225}+\frac{25}{225}=\frac{77}{225}$ bei „mit Zurücklegen".

3. *Das Gegenereignis*
Zum „Gegenereignis" greifen wir immer dann, wenn in einer Aufgabenstellung die Begriffe *„mindestens"* oder *„höchstens"* vorkommen. Wir bleiben bei unserem Beispiel von oben mit den 6 roten, 4 gelben und 5 schwarzen Kugeln.
Das Ereignis lautet nun *„mindestens eine rote Kugel"*. *Mindestens* eine rote Kugel bedeutet aber *eine* oder gar *zwei* rote Kugeln. Jetzt können wir zwar an Hand des Baumdiagramms gemäß der zweiten Pfadregel die Wahrscheinlichkeiten aller der Elementarereignisse addieren, in denen eine oder zwei rote Kugeln auftreten. Das wären dann die Ereignisse „rr", „rg", „rs", „gr" und „sr", also (beim Ziehen mit Zurücklegen):
$\frac{36}{225}+\frac{24}{225}+\frac{30}{225}+\frac{24}{225}+\frac{30}{225}=\frac{144}{225}$, ein nicht unerheblicher Rechenaufwand also.
Wir können aber auch das Gegenereignis definieren. Das Gegenereignis von „mindestens eine rote Kugel" ist „keine rote Kugel". Da jedoch die Summe aller Elementarereignisse 1 ergeben muss, kann das Ereignis
$P(\text{mindestens eine rote Kugel})=1-P(\text{keine rote Kugel})$ beschrieben werden.
$P(\text{keine rote Kugel})$ kommt im Baumdiagramm jedoch nur als „gg", „gs", „sg" und „ss" vor. Somit ist:
$P(\text{mindestens eine rote Kugel})=1-\left(\frac{16}{225}+\frac{20}{225}+\frac{20}{225}+\frac{25}{225}\right)=1-\frac{81}{225}=\frac{144}{225}$.
Das Ereignis lautet nun *„höchstens eine rote Kugel"*. *Höchstens* eine rote Kugel bedeutet aber *eine* oder *keine* rote Kugel. Jetzt können wir zwar an Hand des Baumdiagramms gemäß der zweiten Pfadregel die Wahrscheinlichkeiten aller der Elementarereignisse addieren, in denen eine oder keine rote Kugel auftritt. Das wären dann die Ereignisse „rg", „rs", „gr", „gg", „gs", „sr", „sg" und „ss", also (beim Ziehen mit Zurücklegen):
$\frac{24}{225}+\frac{30}{225}+\frac{24}{225}+\frac{16}{225}+\frac{20}{225}+\frac{30}{225}+\frac{20}{225}+\frac{25}{225}=\frac{189}{225}$, ebenfalls ein nicht unerheblicher Rechenaufwand.
Wir können aber auch das Gegenereignis definieren. Das Gegenereignis von „höchstens eine rote Kugel" ist „zwei rote Kugeln". Da jedoch die Summe aller Elementarereignisse 1 ergeben muss, kann das Ereignis
$P(\text{höchstens eine rote Kugel})=1-P(\text{zwei rote Kugeln})$.
$P(\text{zwei rote Kugeln})$ kommt im Baumdiagramm jedoch nur als „rr" vor.
Somit ist:
$P(\text{höchstens eine rote Kugel})=1-\frac{36}{225}=\frac{189}{225}$ bei „ziehen mit Zurücklegen".

4. *Reduzierte Baumdiagramme*

Es genügt, ein reduziertes Baumdiagramm zu erstellen, wenn nicht alle Ereignisse eines Zufallsexperiments dargestellt werden müssen/sollen. Betrachten wir uns hierzu nochmal das o.a. Ereignis E: „mindestens eine rote Kugel". Selbst mit dem Gegenereignis F: „keine rote Kugel" mussten wir insgesamt vier Einzelereignisse ermitteln gegenüber fünf, wenn wir nicht über das Gegenereignis berechnet hätten. Der Rechenaufwand hat sich also nicht wesentlich vermindert. Wir erstellen für diesen Fall somit ein reduziertes Baumdiagramm, was folgendermaßen aussieht:



In diesem reduzierten Baumdiagramm haben wir einfach die gelben und schwarzen Kugeln zusammengezählt und gesagt, das sind die „***nicht roten***" Kugeln. Davon haben wir ja insgesamt neun Stück. Jetzt sind wir in der Lage, das Gegenereignis F: „keine rote Kugel" sehr schnell zu errechnen, aus dem Baumdiagramm lesen wir ab $P(\text{keine rote Kugel}) = \frac{81}{225}$ und damit ist das Ereignis $P(\text{mindestens eine rote Kugel}) = 1 - \frac{81}{225} = \frac{144}{225}$.

5. *Tabellarische Ermittlung der Wahrscheinlichkeit*

Baumdiagramme haben die Eigenschaft, dass sie sehr schnell unübersichtlich werden. Bis zu drei unterschiedlichen Ästen (rote, gelbe, schwarze Kugel) geht es ja noch. Werden es aber mehr Äste, wie z.B. beim Würfeln, haben wir im 1. Wurf bereits sechs Äste, die sich beim zweiten Wurf an jedem der Äste wiederum um sechs Äste verzweigen. Beim zweistufigen Zufallsexperiment bekommen wir also insgesamt 36 Ausgänge und müssten 36 Rechenoperationen durchführen, um die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses zu ermitteln.

In solchen Fällen ist es günstiger, sich einer Tabelle zu bedienen, wie die nachfolgende Grafik beweist. Wir führen ein Zufallsexperiment aus, in dem ein Würfel zweimal geworfen wird und wir möchten feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Augensumme kleiner ist als 5.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

2. Würfel/Wurf	1. Würfel					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Die senkrechte (grüne) und waagrechte (gelbe) Spalte stehen jeweils für eine Würfelzahl. Im $6X6$ -Gitter stehen dann die einzelnen Kombinationen, die durch zweimaliges Würfeln eines Würfels bzw. einmaliges Würfeln mit zwei Würfeln entstehen können. Nun ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine Augenzahl zu werfen ja für alle 6 Würfelseiten dieselbe, also $\frac{1}{6}$. Wird nun zweimal geworfen, so gilt nach der 1. Pfadregel für jede Kombination die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Somit hat jedes einzelne Ereignis aus obiger Tabelle die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Mit dieser grundsätzlichen Überlegung wenden wir uns nun der Lösung der Aufgabe zu:

Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis „Augensumme kleiner als 5"?

Wir zählen jetzt in der Tabelle alle Einzelereignisse, die die genannte Bedingung erfüllen. Wir sehen, dass dies nur für die Ereignisse 11, 12, 13, 21 und 22 der Fall ist, also insgesamt 5 mal und damit $P(Augensumme < 5) = 5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36} = 13{,}89\%$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, keinen Pasch zu werfen?

Hierzu berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen und zählen in der Tabelle insgesamt die 6 Ereignisse 11, 22, 33, 44, 55 und 66, also $P(Pasch) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6} = 16{,}67\%$. Dann ist das

Ereignis $P(\overline{Pasch})$ das Gegenereignis zu $P(Pasch)$ und somit $P(\overline{Pasch}) = 1 - P(Pasch) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 83{,}33\%$

6. *Der Erwartungswert*

Der Erwartungswert bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nichts anderes als das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Elementarereignisse multipliziert mit ihrer Wahrscheinlichkeit. Allerdings muss nun das Elementarereignis eine Zahl sein. Mit dem Elementarereignis „zwei rote Kugeln" lässt sich kein Erwartungswert berechnen.

Wir machen uns dies am Beispiel mit dem zweimaligen Werfen eines Würfels und der daraus entstehenden Augensumme klar. Die Augensumme als Elementarereignis ist ja eine Zahl.

Wenn du einen Erwartungswert ermitteln sollst, fertigst du bitte sofort eine Tabelle an. Die Anzahl der Zeilen ist dabei stets 4. Die Anzahl der Spalten richtet sich nach der Anzahl der Elementarereignisse plus 1. In unserem Beispiel mit den Würfel können ja die Augensummen von 2 bis 12 auftreten. Das sind also insgesamt 11 Elementarereignisse. Die Tabelle hat also 4 Zeilen und 12 Spalten.

Zunächst stellen wir einmal zusammen, wie häufig jedes Elementarereignis vorkommt und erhalten:

$2: (1;1)$ $3: (1;2), (2;1)$ $4: (1;3), (2;2), (3;1)$
$5: (1;4), (2;3), (3;2); (4;1)$ $6: (1;5), (2;4), (3;3); (4;2), (5;1)$
$7: (1;6), (2;5), (3;4); (4;3), (5;2), (6;1)$ $8: (2;6), (3;5), (4;4); (5;3), (6;2)$
$9: (3;6), (4;5), (5;4); (3;3)$ $10: (4;6), (5;5), (6;4)$
$11: (5;6), (6;5)$ $12: (6;6)$

Nun füllen wir die Tabelle aus wie folgt:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$x_i \cdot P(x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$
$\sum x_i \cdot P(x_i)$	$\frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{40}{36} + \frac{36}{36} + \frac{30}{36} + \frac{22}{36} + \frac{12}{36} = 7$										

Der Erwartungswert ist $E(X) = 7$.

In der Zeile x_i haben wir die Elementarereignisse eingetragen. In der Zeile $P(x_i)$ die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Elementarereignisse. In der Zeile $x_i \cdot P(x_i)$ wurde spaltengerecht das Elementarereignis x_i mit seiner Wahrscheinlichkeit $P(x_i)$ multipliziert. In der Zeile $\sum x_i \cdot P(x_i)$ wurden dann die Ergebnisse der Zeile $x_i \cdot P(x_i)$ addiert. Das Resultat dieser Addition ist dann der Erwartungswert $E(X)$.

Erwartungswertaufgaben kommen in der Regel bei „Spielaufgaben" vor. Man errechnet mit $E(X)$ den Verlust bzw. den Gewinn eines Spielers bzw. eines Spielebetreibers.

Ist der Erwartungswert bei einem Spiel *E(X)=0*, so wird das Spiel als "*fair*" bezeichnet.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Aus einem Zylinder mit acht Kugeln (drei rote, zwei weiße, zwei blaue, eine grüne) werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, keine rote Kugel zu ziehen?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden eine weiße und eine rote Kugel (Reihenfolge beliebig) gezogen?
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen?

Aufgabe A2

In einem Behälter befinden sich drei rote, drei weiße und zwei blaue Kugeln. Es werden Nacheinander zwei Kugeln **ohne** Zurücklegen gezogen.

a) Zeichne das Baumdiagramm.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist keine der Kugeln rot?
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der Kugeln weiß oder blau ist?
d) Zu welcher Ziehung passt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{28}$?

Lösungstipp: Überlege genau, was **ohne** Zurücklegen bedeutet.

Lösung: b) $P(\overline{rr}) = 35{,}7\,\%$
c) $P(mind.\,1\,Kugel\,weiß\,oder\,blau) = 89{,}3\,\%$
d) $P(bb) = \frac{1}{28}$

Aufgabe A3

In einem Gefäß befinden sich sieben Kugeln: drei rote, zwei weiße, eine blaue und eine grüne. Es werden zwei Kugeln nacheinander gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen?
Untersuche die Fragestellung rechnerisch für eine Ziehung **mit** zurücklegen und eine Ziehung **ohne** Zurücklegen.

Lösung: mit Zurücklegen $p = \frac{15}{49} \approx 30{,}6\,\%$
ohne Zurücklegen $p = \frac{8}{42} \approx 19{,}1\,\%$

Aufgabe A4

Zwei Würfel werden nacheinander geworfen. Der erste ist ein üblicher Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Auf dem zweiten Würfel gibt es nur die Augenzahlen 1, 2 und 3. Die Augenzahl 1 kommt einmal vor, die Augenzahl 2 zweimal und die Augenzahl 3 dreimal.

a) Zeichne das entsprechende Baumdiagramm mit den möglichen Ergebnissen.
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, 2 gleiche Zahlen zu würfeln?

Lösung: $p = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$

c) Michaela und Michael untersuchen die Wahrscheinlichkeiten rund um die Eins:
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Eins zu würfeln?

Lösung: $p = \frac{11}{36} \approx 30{,}6\,\%$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, genau einmal die Eins zu würfeln?

Lösung: $p = \frac{10}{36} \approx 27{,}8\,\%$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, keine Eins zu würfeln?

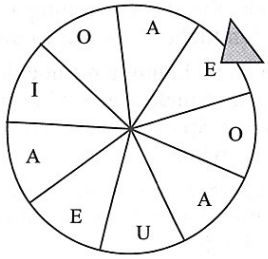
Lösung: $p = \frac{25}{36} \approx 69{,}4\,\%$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Eins zweimal?

Lösung: $p = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\,\%$

Aufgabe A5

Ein Glücksrad ist in neun gleich große Sektoren unterteilt. Die untenstehende Zeichnung zeigt die Verteilung der fünf Vokale A, E, I, O und U. Das Rad wird zweimal gedreht.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt das Rad zweimal hintereinander auf dem gleichen Vokal stehen?

Lösung: $p = \frac{19}{81} \approx 23{,}5\,\%$

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Rad einmal auf O und einmal auf U stehen bleibt.

Lösung: $p = \frac{4}{81} \approx 4{,}9\,\%$

c) Das Rad „schreibt" die Worte „AU" und „EI". Die Worte gelten nur als geschrieben, wenn die Buchstaben in der richtigen Reihenfolge erscheinen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort „AU" und „EI" geschrieben wird? Für welches Wort ist die Wahrscheinlichkeit höher? Um welchen Faktor?

Lösung: $p_{AU} = \frac{3}{81}$; $p_{EI} = \frac{2}{81}$

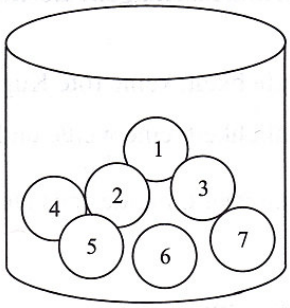
Faktor: „AU" ist 1,5–mal höher als „EI"

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt das Rad nicht auf dem Buchstaben A stehen?

Lösung: $p = \frac{36}{91} \approx 44{,}4\,\%$

Aufgabe A6

In einem Behälter befinden sich sieben nummerierte Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



a) Stellen Sie die Ergebnismenge in einer Tabelle dar.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 8 zu ziehen.

Lösung: $p = \frac{6}{42} \approx 14{,}3\,\%$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die gezogene Augensumme höchstens 4?

Lösung: $p = \frac{4}{42} \approx 9{,}5\,\%$

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine Kugel mit einer Zahl kleiner als 4 und anschließend einer Kugel mit einer Zahl größer als 4 zu ziehen.

Lösung: $p = \frac{9}{42} \approx 21{,}4\,\%$

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit einer Zahl kleiner als 4 und eine Kugel mit einer Zahl größer als 4 zu ziehen, wenn die Reihenfolge der Ziehung beliebig ist?

Lösung: $p = \frac{18}{42} \approx 42{,}9\,\%$

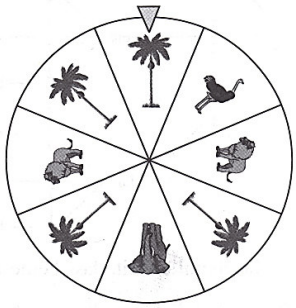
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A7

Die SMV einer Realschule unterstützt jedes Jahr ein soziales Kinder- oder Jugendprojekt. Das Geld wird auf dem Schulfest mit einem Informationsstand und einem Glücksrad erwirtschaftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Folgende Gewinne sind vorgesehen:

Das Rad bleibt zweimal auf Elefant stehen.	5,00 €
Das Rad bleibt zweimal auf Löwe stehen.	3,00 €
Das Rad bleibt zweimal auf Strauß stehen.	1,50 €
Die Einsätze hängen vom Alter der Kinder ab:	
Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche	0,50 €
Erwachsene	1,00 €



a) Ermittle die Erwartungswerte der SMV getrennt für Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche sowie für Erwachsene.

Lösung: $E(X)_{Jugend} = -0{,}20\,€$

b) Die Endabrechnung am Ende des Schulfestes weist folgende Daten auf:

Anzahl der Spiele von Schülerinnen/Schüler, Kindern und Jugendlichen:	372
Anzahl der Spiele Erwachsener:	214
Gesamtgewinn:	217,50 €

Ermittle die Abweichung zwischen dem mit den Erwartungswerten ermittelten Gewinn und dem tatsächlichen Gewinn. Nenne mögliche Gründe für die festgestellte Abweichung.

Lösung: Differenz $= 6{,}70\,€$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierter Lösungsweg:

1. Schritt: Wir ermitteln die Wahrscheinlichkeit der verschiedenfarbigen Kugeln. Insgesamt befinden sich Kugeln in dem Zylinder. Hieraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten zu

$P(rot) = \frac{3}{8}$ $\quad P(weiß) = \frac{2}{8}$ $\quad P(blau) = \frac{2}{8}$ $\quad P(grün) = \frac{1}{8}$

Es wird ***mit*** Zurücklegen gezogen, d.h., die Wahrscheinlichkeiten ändern sich im zweiten Zug ***nicht***.

zu a): keine rote Kugel ziehen

2. Schritt: Dies kann auf zwei Möglichkeiten berechnet werden:

1. Lösung:

Wir stellen alle Elementarereignisse auf, die keine rote Kugel haben, dies sind $A = \{wb; wg; bw; gw; bg; gb; ww; bb; gg\}$ und ermitteln zu jedem Elementarereignis dessen Wahrscheinlichkeit.

$P(wb) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$ $\quad P(wg) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{64}$ $\quad P(bw) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$

$P(gw) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{64}$ $\quad P(bg) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{64}$ $\quad P(gb) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{64}$

$P(ww) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$ $\quad P(bb) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{64}$ $\quad P(gg) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

Jetzt addieren wir alle Ergebnisse zusammen, das ergibt $\frac{25}{64} = 0{,}39 = 39\,\%$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $39\,\%$ wird keine rote Kugel gezogen.

2. Lösung:

Wir erklären die weißen, die blauen und die grüne Kugel zu „nicht roten Kugeln". Dann erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten

$P(rot) = \frac{3}{8}$ und $P(\overline{rot}) = \frac{5}{8}$. Daraus ergibt sich:

$P(\overline{rot}; \overline{rot}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} = 0{,}39 = 39\,\%$

Dies ist auf jeden Fall der schnellere Weg.

zu b): eine weiße und eine rote Kugel ziehen

3. Schritt: Da die Reihenfolge mit beliebig angegeben ist, gibt es zwei Elementarereignisse, nämlich $(rot, weiß)$ oder $(weiß, rot)$.

Die Wahrscheinlichkeit ist also:

$P(rw; wr) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8} = 2 \cdot \frac{6}{64} = \frac{12}{64} = 0{,}1875 = 18{,}75\,\%$

zu c): mindestens eine blaue Kugel ziehen

4. Schritt: Achte auf die Aufgabenstellung. Die Aussage „mindestens" bedeutet, dass sowohl eine als auch zwei Kugeln blau sein können. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses über das Gegenereignis. Das Gegenereignis von „mindestens eine Kugel ist blau" lautet „keine Kugel ist blau".

Wir erklären nun die roten, die weißen und die grüne Kugel zu „nicht blaue Kugeln" und stellen das Ereignis auf mit

$P(mindestens\ 1\ blaue\ Kugel) = 1 - P(keine\ blaue\ Kugeln)$

Wegen $P(\overline{blau}) = \frac{6}{8}$ gilt somit:

$P(mindestens\ 1\ blaue\ Kugel) = 1 - P(\overline{bb}) = 1 - \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8}$

$P(mindestens\ 1\ blaue\ Kugel) = \frac{28}{64} = 0{,}4375 = 43{,}75\,\%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A2

Wir ermitteln zuerst die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse und zeichnen danach das Baumdiagramm.
Es befinden sich 8 Kugeln in der Urne, sodass für den ersten Zug gilt:

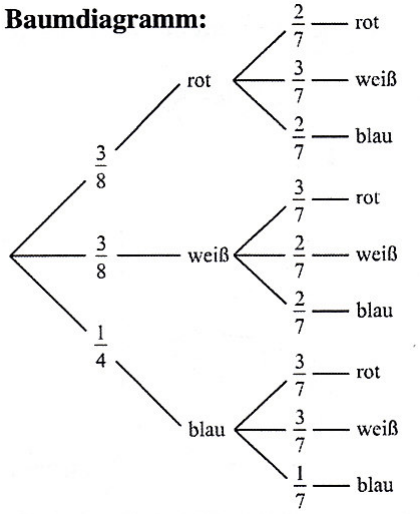
$P(r) = \frac{3}{8}$ $\quad P(w) = \frac{3}{8}$ $\quad P(b) = \frac{1}{4}$

Jetzt berechnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine der Kugeln rot ist. Hierzu erklären wir die weißen und blauen Kugeln zu „nicht rot", sodass die Wahrscheinlichkeiten wie folgt aussehen:

$P(r) = \frac{3}{8}$ $\quad P(\overline{r}) = \frac{5}{8}$

Die Wahrscheinlichkeit für zweimal "nicht rot" ist dann

$P(\overline{r};\overline{r}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} \approx 35{,}7\ \%$



Das Ereignis „mindestens eine der Kugeln ist weiß oder blau" bedeutet, dass entweder eine oder beide Kugeln weiß oder blau sind. Dies ist dann der Fall, wenn nicht beide Kugeln rot sind. „Beide Kugeln rot" ist somit das Gegenereignis zu „mindestens eine der Kugeln ist weiß oder blau".

$P(mindestens\ 1\ Kugel\ weiß\ oder\ blau) = 1 - P(r;r) = 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = 1 - \frac{6}{56}$

$P(mindestens\ 1\ Kugel\ weiß\ oder\ blau) = \frac{50}{56} \approx 89{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{28}$ ist dann gegeben, wenn nach der 1. Pfadregel die Multiplikation zweier nachfolgender Einzelereignisse den Wert $\frac{1}{28}$ ergibt.

$P(b;b) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

Die Ziehung „2 blaue Kugeln" passt zur Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{28}$.

Lösung A3

Wir bestimmen zunächst die Elementarereignisse für „zwei gleichfarbige Kugeln" und berechnen daraus die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.

Mit Zurücklegen:

$P(2\ gleichfarbige\ Kugeln) = P\{(r;r),(w;w),\{g;g\},\{b;b\}\}$

$P(r;r) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$ $\quad P(w;w) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

$P(g;g) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$ $\quad P(b;b) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$

$P\{(r;r),(w;w),(g;g),(b;b)\} = P(r;r) + P(w;w) + P(g;g) + P(b;b)$

$= \frac{9}{49} + \frac{4}{49} + \frac{1}{49} + \frac{1}{49} = \frac{15}{49} \approx 30{,}6\ \%$

Ohne Zurücklegen:

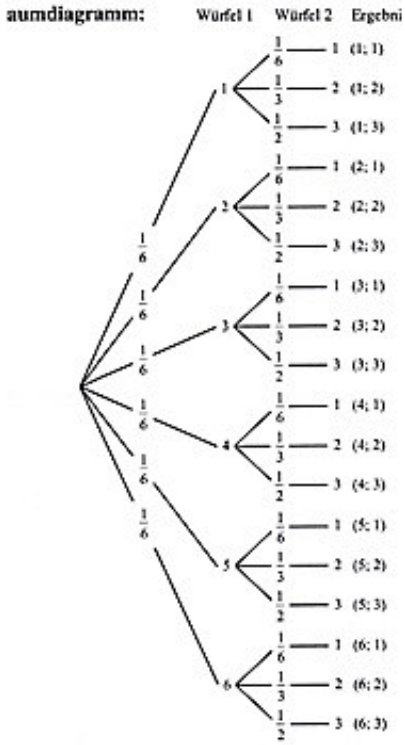
$P(2\ gleichfarbige\ Kugeln) = P\{(r;r),(w;w)\}$

$P(r;r) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$ $\quad P(w;w) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42}$

$P\{(r;r),(w;w)\} = P(r;r) + P(w;w) = \frac{6}{42} + \frac{2}{42} = \frac{8}{42} \approx 19{,}1\ \%$

Lösung A4

Wir zeichnen zunächst das Baumdiagramm mit Angabe der Einzelwahrscheinlichkeiten.
Wir berechnen dann die Wahrscheinlichkeit für „zwei gleiche Zahlen würfeln" und untersuchen danach die Wahrscheinlichkeiten „rund um die Eins".



a) $P(2\ gleiche\ Zahlen) = P\{(1;1),(2;2),(3;3)\}$

$P(1;1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\qquad P(2;2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{36}$

$P(3;3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{36}$

$P(2\ gleiche\ Zahlen) = P(1;1) + P(2;2) + P(3;3)$

$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$

$P(2\ gleiche\ Zahlen) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$

b) $P(mind.\ eine\ 1) = 1 - P(\overline{1};\overline{1})$

$P(\overline{1};\overline{1}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$P(mind.\ eine\ 1) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 30{,}6\ \%$

$P(genau\ \ eine\ 1) = P\{(1;\overline{1}),(\overline{1};1)\}$

$P(1;\overline{1}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ $\qquad P(\overline{1};1) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$P(genau\ \ eine\ 1) = P(1;\overline{1}) + (\overline{1};1) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36}$

$P(genau\ \ eine\ 1) = \frac{10}{36} \approx 27{,}8\ \%$

$P(keine\ 1) = P(\overline{1};\overline{1}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36} \approx 69{,}4\ \%$

$P(zweimal\ \ eine\ 1) = P(1;1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\ \%$

Lösung A5

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse A, E, I und U und leiten daraus ab.

$P(A) = \frac{3}{9}$ $\qquad P(E) = \frac{2}{9}$ $\qquad P(I) = \frac{1}{9}$ $\qquad P(O) = \frac{2}{9}$ $\quad P(U) = \frac{1}{9}$

a) Berechnung von „zweimal hintereinander der gleiche Vokal".

$P(zweimal\ Vokal) = P\{(A;A),(E;E),(I;I),(O;O),(U;U)\}$

$P(zweimal\ Vokal) = P(A;A) + P(E;E) + P(I;I) + P(O;O) + P(U;U)$

$P(A;A) = \frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9} = \frac{9}{81}$ $\qquad P(E;E) = \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{4}{81}$

$P(I;I) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{81}$ $\qquad P(O;O) = \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{4}{81}$

$P(U;U) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{81}$

$P(zweimal\ Vokal) = \frac{9}{81} + \frac{4}{81} + \frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{1}{81} = \frac{19}{81} \approx 23{,}5\ \%$

b) Berechnung der Wahrscheinlichkeit „einmal U und einmal O".

$P(einmal\ O\ und\ einmal\ U) = P\{(O;U),(U;O)\}$

$P(einmal\ O\ und\ einmal\ U) = P(O;U) + P(U;O)$

$P(O;U) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{81}$ $\qquad P(U;O) = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{81}$

$P(einmal\ O\ und\ einmal\ U) = \frac{2}{81} + \frac{2}{81} = \frac{4}{81} \approx 4{,}9\ \%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für AU und EI unter Berücksichtigung der Reihenfolge mit Vergleich der Wahrscheinlichkeiten.

$P(A;U) = \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{81}$ $\qquad$ $P(E;I) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{81}$

$P(A;U) > P(E;I)$ um den Faktor $\frac{3}{81} : \frac{2}{81} = 1{,}5$

Die Wahrscheinlichkeit, das Wort „$A;U$" zu drehen, ist 1,5–mal höher als die Wahrscheinlichkeit, das Wort „$E;I$" zu drehen.

d) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zweimal nicht A.

Wir erklären die Buchstaben E, I und U zu nicht A. Dann gilt:

$P(\overline{A}) = \frac{6}{9}$ und damit $P(\overline{A};\overline{A}) = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{36}{91} \approx 44{,}4\,\%$

Lösung A6

Wir stellen zunächst die Ergebnismenge in einer Tabelle dar. Spaltenmäßig (von oben nach unten) tragen wir den ersten Zug und zeilenmäßig (von rechts nach links) den zweiten Zug in die Tabellenelemente ein. Unter die Elementarereignisse in den Tabellenelementen tragen wir noch die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses ein.

a)

	1	2	3	4	5	6	7
1	– –	$(1;2)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(1;3)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(1;4)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(1;5)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(1;6)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(1;7)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$
2	$(2;1)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	– –	$(2;3)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(2;4)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(2;5)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(2;6)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(2;7)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$
3	$(3;1)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(3;2)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	– –	$(3;4)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(3;5)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(3;6)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(3;7)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$
4	$(4;1)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(4;2)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(4;3)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	– –	$(4;5)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(4;6)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(4;7)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$
5	$(5;1)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(5;2)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(5;3)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(5;4)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	– –	$(5;6)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(5;7)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$
6	$(6;1)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(6;2)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(6;3)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(6;4)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(6;5)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	– –	$(6;7)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$
7	$(7;1)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(7;2)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(7;3)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(7;4)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(7;5)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	$(7;6)$ $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$	– –

b) $P(Augensumme\ 8) = P\{(1;7),(2;6),(3;5),(5;3),(2;6),(7;1)\}$

Jedes der Elementarereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{42}$. Somit:

$P(Augensumme\ 8) = 6 \cdot \frac{1}{42} = \frac{6}{42} \approx 14{,}3\,\%$

c) $P(Augensumme\ höchstens\ 4) = P\{(1;2),(1;3),(2;1),(3;1)\}$

Jedes der Elementarereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{42}$. Somit:

$P(Augensumme\ höchstens\ 4) = 4 \cdot \frac{1}{42} = \frac{4}{42} \approx 9{,}5\,\%$

d) $P(erst < 4, dann > 4) = P\{(1;5),(1;6),(1;7),(2;5),(2;6),(2;7),(3;5),(3;6),(3;7)\}$

Jedes der Elementarereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{42}$. Somit:

$P(erst < 4, dann > 4) = 9 \cdot \frac{1}{42} = \frac{9}{42} \approx 21{,}4\,\%$

e) Zu den unter d) aufgeführten Elementarereignissen kommen noch die umgekehrten Reihenfolgen hinzu, sodass sich die Wahrscheinlichkeit gegenüber d) verdoppelt.

$P(erst < 4, dann > 4\ oder\ erst > 4, dann < 4) = 2 \cdot P(erst < 4, dann > 4)$

$P(erst < 4, dann > 4\ oder\ erst > 4, dann < 4) = 2 \cdot \frac{9}{42} = \frac{18}{42} \approx 42{,}9\ \%$

Lösung A7

Dies ist eine „Erwartungswert"-Aufgabe. Zur Ermittlung eines Erwartungswertes erstellen wir sofort eine 3-zeilige Tabelle. Die Tabelle hat so viele Spalten, wie es Gewinne gibt. Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne ungleich $100\ \%$, muss eine weitere Spalte für den Einsatz angehängt werden.
In die erste Zeile schreiben wir die einzelnen Gewinnbeträge. Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne ungleich $100\ \%$, muss der Einsatz vom Gewinnbetrag abgezogen werden und der Einsatz wird mit einem Minuszeichen in die Tabelle eingetragen.
In die zweite Zeile schreiben wir unter jeden Gewinn-, Einsatzbetrag dessen Einzelwahrscheinlichkeit.
In der dritten Zeile multiplizieren wir spaltengerecht den Gewinn-, Einsatzbetrag mit seiner Wahrscheinlichkeit.
Am Ende addieren wir alle Werte der dritten Zeile vorzeichengerecht. Das daraus sich ergebende Ergebnis ist der gesuchte Erwartungswert.
Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten zu den Gewinnen:

$P(zweimal\ Elefant) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

$P(zweimal\ Löwe) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$

$P(zweimal\ Strauß) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

$P(kein\ Gewinn) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{4}{64} - \frac{1}{64} = \frac{58}{64}$

a) Berechnung der Erwartungswerte
Tabelle für Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche:

Gewinn/Einsatz (X_i)	4,50 €	2,50 €	1,00 €	−0,50 €
$p(X_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{58}{64}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,07 €	0,16 €	0,02 €	−0,45 €
EX	0,07 € + 0,16 + 0,02 − 0,45 € = −0,20 €			

$EX_{Jugend} = -0{,}20\ €$

Tabelle für Erwachsene:

Gewinn/Einsatz (X_i)	4,00 €	2,00 €	0,50 €	−1,00 €
$p(X_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{58}{64}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,06 €	0,13 €	0,01 €	−0,90 €
EX	0,06 € + 0,13 + 0,01 − 0,90 € = −0,70 €			

$EX_{Erwachsene} - 0{,}70\ €$

Die SMV kann mit einem Gewinn von $0{,}20\ €$ pro Spiel bei den Jugendlichen und von $0{,}70\ €$ pro Spiel bei den Erwachsenen rechnen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Abweichung zwischen Erwartungswert und Gesamtgewinn:
$372 \cdot 0{,}20\,€ + 214 \cdot 0{,}70\,€ = 224{,}20\,€$ Gewinn nach Erwartungswert
$G_{E(X)} - G_{gesamt} = 224{,}20 - 217{,}50 = 6{,}70\,€$
Die Abweichung des tatsächlichen Gewinns zum Erwartungswert beträgt $6{,}70\,€$.
Der mit den Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelte Gesamtgewinn $224{,}20\,€$ ist ein theoretischer Wert. Im konkreten Fall kann er nicht erreicht werden, da der Gesamtgewinn aufgrund der Einsätze und Preise ein Vielfaches von $0{,}50\,€$ sein muss.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Pflichtteil) 2008-2016

9 Aufgaben im Dokument

Aufgabe P8/2008

In einem Behälter liegen fünf blaue, drei weiße und zwei rote Kugeln. Mona zieht eine Kugel, notiert die Farbe und legt die Kugel wieder zurück. Danach zieht sie eine zweite Kugel.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden?

Lösung: $p = \frac{38}{100} = 38\,\%$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den beiden gezogenen Kugeln eine rot und eine weiß ist?

Lösung: $p = \frac{12}{100} = 12\,\%$

Aufgabe P8/2009

In einem Gefäß befinden sich eine weiße, vier rote und fünf blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen?

Lösung: $p = \frac{58}{90} \approx 64{,}4\,\%$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine der gezogenen Kugeln rot ist?

Lösung: $p = \frac{78}{90} \approx 86{,}7\,\%$

Aufgabe P6/2010

In einem Behälter befinden sich drei blaue und drei rote Kugeln. Viola führt zwei Zufallsexperimente durch:

Experiment 1: Sie zieht zwei Kugeln mit Zurücklegen. Lösung: $p = \frac{1}{2} = 50\,\%$

Experiment 2: Sie zieht zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Lösung: $p = \frac{18}{30} = 60\,\%$

Sie vermutet: "In beiden Experimenten ist die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, fünfzig Prozent."
Überprüfen Sie diese Vermutung.

Aufgabe P8/2011

Für eine Geburtstagsparty werden 20 Glückskekse gebacken, unterschiedlich gefüllt und in einen Korb gelegt:
12 Kekse enthalten jeweils ein Sprichwort.
6 Kekse enthalten jeweils einen Witz, die restlichen werden mit jeweils einem Kinogutschein gefüllt.
Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis "mit einem Zug ein Sprichwort ziehen"?

Lösung: $p = \frac{3}{5} = 60\,\%$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Glückskeksen unterschiedliche Füllungen erhalten"?

Lösung: $p = \frac{54}{95} \approx 56{,}8\,\%$

Aufgabe P4/2012

Seit dem Jahr 2007 können Städte und Kommunen Umweltzonen zur Reduzierung des Schadstoffausstoßes durch Fahrzeuge einrichten.
Zur Kennzeichnung werden grüne, gelbe und rote Plaketten verwendet.
In einem Parkhaus stehen 51 Autos mit einer grünen, 23 Autos mit einer gelben und 11 Autos mit einer roten Umweltplakette.
An der Ausfahrt fahren zwei Autos nacheinander aus.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden ausfahrenden Autos Plaketten mit gleicher Farbe? Lösung: $p = \frac{3166}{7140} \approx 44{,}3\ \%$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden ausfahrenden Autos eine grüne Plakette hat? Lösung: $p = \frac{59}{70} \approx 84{,}3\ \%$

Aufgabe P7/2013

In einer Schale liegen gleich aussehende Schokowürfel.
Sechs Schokowürfel sind mit Marzipan, vier mit Nougat und zwei mit Karamell gefüllt. Anastasia zieht gleichzeitig zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen?

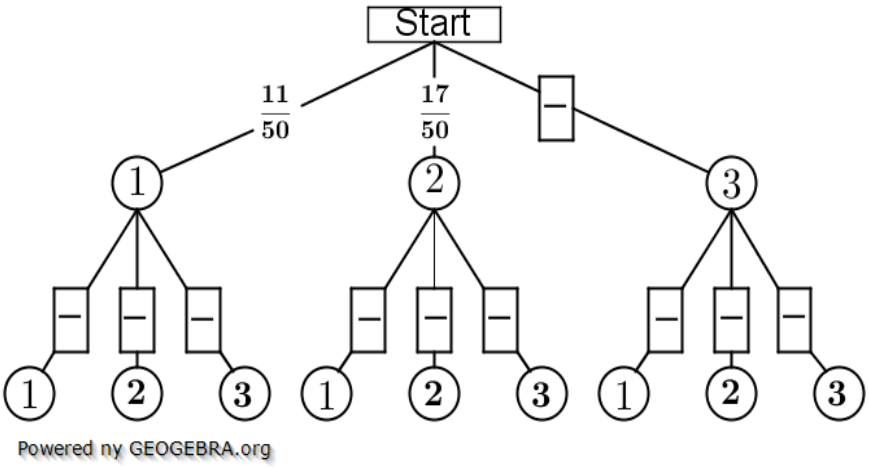
In einer anderen Schale liegen von jeder Sorte halb so viele Schokowürfel (dreimal Marzipan, zweimal Nougat, einmal Karamell). Leon zieht ebenfalls zwei Schokowürfel mit einem Griff.

Er behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen zu ziehen bleibt gleich."
Hat Leon recht? Begründen Sie durch Rechnung.

Lösung:
$P_1(unterschiedlich) = 66{,}7\ \%$
Leon hat nicht recht.
$P_2(unterschiedlich) = 73{,}3\ \%$

Aufgabe P8/2014

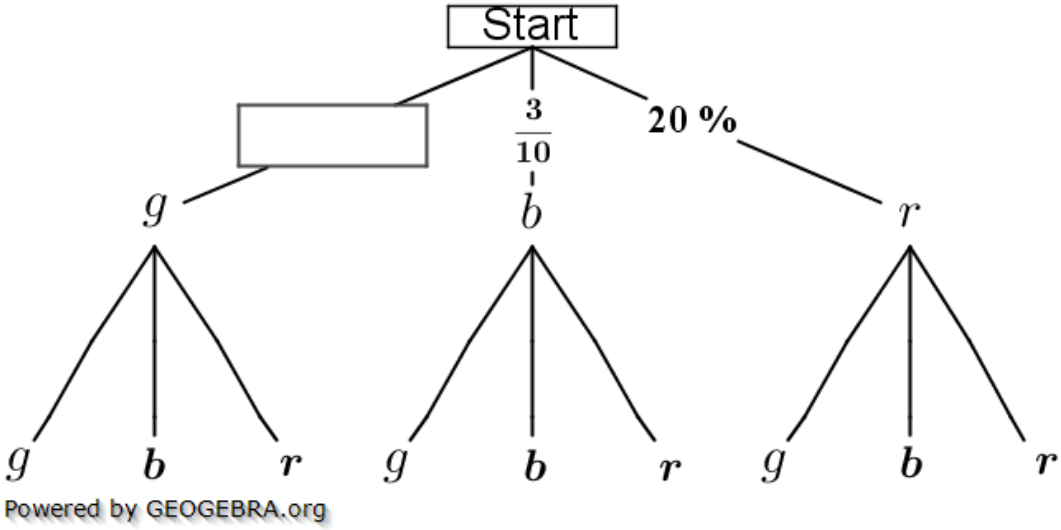
In einem Behälter liegen 50 gleich große Kugeln. Sie sind mit den Zahlen 1, 2 und 3 beschriftet. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Die Grafik zeigt ein unvollständiges Baumdiagramm.



- Vervollständigen Sie dieses Baumdiagramm.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwei Kugeln, die mit der gleichen Zahl beschriftet sind?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Zahl größer als die zweite ist?

Aufgabe P4/2015

In einem Behälter liegen 20 Kugeln. Sie sind rot, blau und grün gefärbt. Es werden zwei Kugeln gleichzeitig gezogen.



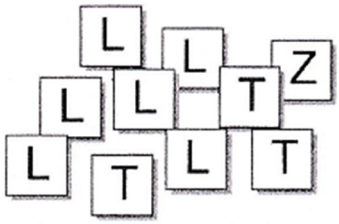
- Im Baumdiagramm fehlt eine Wahrscheinlichkeitsangabe. Ergänzen Sie diese.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen?

- In einem anderen Behälter liegen von jeder Farbe doppelt so viele Kugeln, also insgesamt 40 Kugeln. Es werden ebenfalls zwei Kugeln gleichzeitig gezogen. Uli sagt „Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine grüne Kugel zu ziehen, ist gleich." Hat Uli Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

Aufgabe P7/2016

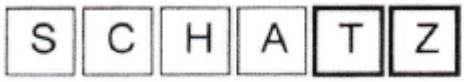
Hannah legt Buchstabenkärtchen.
Auf dem Tisch liegen schon folgende vier Buchstaben:

In einem Beutel befinden sich die rechts abgebildeten Buchstabenkärtchen.



Daraus zieht Hannah zwei Buchstabenkärtchen gleichzeitig.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit den beiden gezogenen Buchstaben

- Das Wort

legen zu können.
- Das Wort 

Legen zu können.

Lösung: $P(SCHALL) = \frac{40}{90} = 33{,}3\ \%$

$$P(SCHATZ) = \frac{6}{90} = 6{,}7\ \%$$

Lösung P8/2008

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine Kugel rot und eine Kugel weiß.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{5}{10}$ $\quad P(weiß) = \frac{3}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{2}{10}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P\{(b;b),(w;w),(r,r)\}$

$P(b;b) = \frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{25}{100}$ $\quad P(w;w) = \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ $\quad P(r;r) = \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{4}{100}$

$$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P(b;b) + P(w;w) + P(r;r)$$
$$= \frac{25}{100} + \frac{9}{100} + \frac{4}{100} = \frac{38}{100} = 38\ \%$$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P\{(w;r),(r;w)\}$

$P(w;r) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{6}{100}$ $\quad P(r;w) = \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{6}{100}$

$$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P(w;r) + P(r;w) = \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{12}{100} = 12\ \%$$

Lösung P8/2009

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln. Zwei verschiedenfarbige Kugeln ist das Gegenereignis zu zwei gleichfarbige Kugeln. Da nur eine einzige Kugel weiß ist, ist das Gegenereignis mit $P(r;r)$ und $P(w;w)$ sehr schnell ermittelt.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für höchstens eine Kugel rot. Höchstens eine Kugel rot bedeutet eine oder keine rote Kugel. Das Gegenereignis hierzu sind zwei rote Kugeln.

Klausuraufschrieb

$P(weiß) = \frac{1}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{4}{10}$ $\quad P(blau) = \frac{5}{10}$

Zwei verschiedenfarbige Kugeln:

$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - P\{(r;r),(b;b)\}$

$P(r;r) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{12}{90}$ $\quad P(b;b) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{20}{90}$

$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - \big(P(r;r) + P(b;b)\big)$$
$$= 1 - \frac{12}{90} - \frac{20}{90} = \frac{58}{90}$$

$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) \approx 64{,}4\ \%$

Höchstens eine Kugel ist rot:

Das Gegenereignis ist „beide Kugeln sind rot", somit gilt:

$P(höchstens\ eine\ rote\ Kugel) = 1 - P(r;r) = 1 - \frac{12}{90} = \frac{78}{90} \approx 86{,}7\ \%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung P6/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln getrennt nach mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.
Vergleich der beiden sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $P(rot) = \frac{3}{6}$

Mit Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{9}{36}\quad P(r;b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = 50\ \%$$

Ohne Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{30}\quad P(r;b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{30}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{30} + \frac{9}{30} = \frac{18}{30} = 60\ \%$$

Violas Vermutung ist falsch.

Lösung P8/2011

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Keksfüllungen für den ersten Zug.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mit einem Zug ein Sprichwort" ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „unterschiedliche Füllung beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Keksen".

Hinweis: Gleichzeitiges Ziehen von zwei Keksen muss als Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen betrachtet werden.

Klausuraufschrieb

$P(Witz) = \frac{6}{20}$ $\qquad$ $P(Sprichwort) = \frac{12}{20}$ $\qquad$ $P(Gutschein) = \frac{2}{20}$

A: *„Mit einem Zug ein Sprichwort"*

$$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\ \%$$

B: *„Unterschiedliche Füllungen beim gleichzeitigen Ziehen zweier Kekse"*

$$P(B) = \{(W;S),(S;W),(W;G),(G;W),(S;G),(G;S)\}$$
$$P(W;S) = \frac{6}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{72}{380} \qquad P(S;W) = \frac{12}{20}\cdot\frac{6}{19} = \frac{72}{380}$$
$$P(W;G) = \frac{6}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{12}{380} \qquad P(G;W) = \frac{2}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{72}{380}$$
$$P(S;G) = \frac{12}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{24}{380} \qquad P(G;S) = \frac{2}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{24}{380}$$
$$P(B) = 2\cdot\left(\frac{72+12+24}{380}\right) = \frac{108}{190} = \frac{54}{95} \approx 56{,}8\ \%$$

Lösung P4/2012

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die erste Ausfahrt eines Autos pro Plakette.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „beide Autos haben Plaketten mit gleicher Farbe".
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mindestens eines der beiden Autos hat eine grüne Plakette". Hierzu erklären wir die gelben und roten Plaketten zu „nicht grün" und berechnen die Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis.

Klausuraufschrieb

$P(grün) = \frac{51}{85}$ $\quad P(gelb) = \frac{23}{85}$ $\quad P(rot) = \frac{11}{85}$

A: *„beide ausfahrenden Autos haben gleichfarbige Plaketten"*

$P(A) = P\{(gr;gr);(ge;ge);(ro;ro)\}$

$P(gr;gr) = \frac{51}{85} \cdot \frac{50}{84} = \frac{2550}{7140}$ $\quad P(ge;ge) = \frac{23}{85} \cdot \frac{22}{84} = \frac{506}{7140}$ $\quad P(ro;ro) = \frac{11}{85} \cdot \frac{10}{84} = \frac{110}{7140}$

$P(A) = \frac{2550+506+110}{7140} = \frac{3166}{7140} \approx 44{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Autos gleichfarbige Plaketten haben, beträgt $44{,}3\ \%$.

B: „mindestens eines der ausfahrenden Autos hat eine grüne Plakette"

$P(B) = 1 - P(\overline{gr};\overline{gr})$

$P(\overline{gr};\overline{gr}) = \frac{34}{85} \cdot \frac{33}{84} = \frac{1122}{7140}$

$P(B) = 1 - \frac{1122}{7140} = \frac{6018}{7140} = \frac{59}{70} \approx 84{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Autos eine grüne Plakette hat, beträgt $84{,}3\ \%$.

Lösung P7/2013

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Schokowürfeln ist zu behandeln wir Ziehen nacheinander von zwei Schokowürfeln ohne Zurücklegen.
Die möglichen Ereignisse „Zwei unterschiedliche Füllungen" sind:
„Marzipan; Nougat", „Marzipan; Karamell", „Nougat; Marzipan",
„Karamell; Marzipan", Nougat; Karamell" und „Karamell; Nougat".
Wir müssen also sechs Einzelwahrscheinlichkeiten ermitteln und diese dann aufsummieren.
Wesentlich weniger Rechenaufwand entsteht, wenn wir über das Gegenereignis gehen. Das Gegenereignis von „Zwei unterschiedliche Füllungen" ist „Zwei gleiche Füllungen". Diese Einzelwahrscheinlichkeiten sind dann:
„Marzipan; Marzipan", „Nougat; Nougat" und „Karamell; Karamell"
Aus $1 -$ „Zwei gleiche Füllungen" erhalten wir dann das Endergebnis.
Leon hat nicht Recht, Nachweis siehe Klausuraufschrieb.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$P(unterschiedliche) = 1 - P(gleiche)$

$P(gleiche) = P(M;M) + P(N;N) + P(K;K)$

$P(M;M) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132}$ $\quad P(N;N) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132}$ $\quad P(K;K) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{30}{132} + \frac{12}{132} + \frac{2}{132}\right) = 1 - \frac{44}{132} = \frac{88}{132} = \frac{2}{6} = 66{,}7\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen zu ziehen beträgt $66{,}7\ \%$.

Leon hat nicht recht, denn:

$P(M;M) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$ $\quad P(N;N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{30}$

$P(K;K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = 0$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{6}{30} + \frac{2}{30} + 0\right) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} = 73{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen aus der zweiten Schale zu ziehen beträgt $73{,}3\ \%$.

Lösung P8/2014

Lösungslogik

Die Quersumme der Bruchzahlen im ersten Zug muss 1 ergeben, somit für eine 3 im ersten Zug $\frac{22}{50}$. Da ohne Zurücklegen gezogen wird, befinden sich nur noch 49 Kugeln in der Urne, sodass wir es im zweiten Zug mit $\frac{21}{49}$ zu tun haben.

Wurde im ersten Zug eine 1 gezogen, befinden sich noch 10 Kugeln mit einer 1, aber weiterhin 17 Kugeln mit einer 2 und 22 Kugeln mit einer 3 in der Urne.

Wurde im ersten Zug eine 2 gezogen, befinden sich noch 16 Kugeln mit einer 2, aber weiterhin 11 Kugeln mit einer 1 und 22 Kugeln mit einer 3 in der Urne.

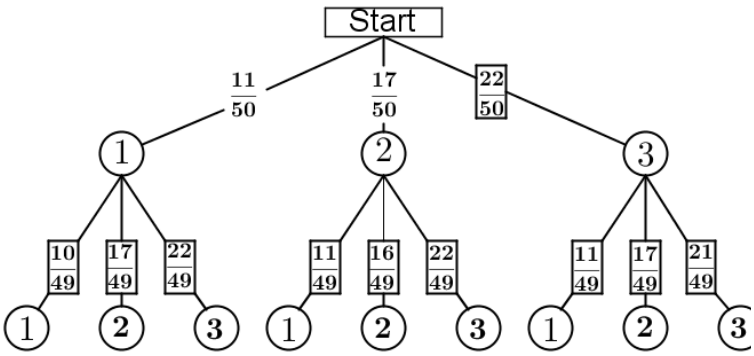
Wurde im ersten Zug eine 3 gezogen, befinden sich noch 21 Kugeln mit einer 3, aber weiterhin 11 Kugeln mit einer 1 und 17 Kugeln mit einer 2 in der Urne.

Hieraus ergeben sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für den zweiten Zug gemäß Grafik.

Die Wahrscheinlichkeit für zwei Kugeln, die mit der gleichen Zahl beschriftet sind, ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(1;1)$, $P(2;2)$ und $P(3;3)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Zahl größer ist als die Zweite, ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(2;1)$, $P(3;1)$ und $P(3;2)$.

Klausuraufschrieb



$P(1;1) = \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} = \frac{110}{2450}$

$P(2;2) = \frac{17}{50} \cdot \frac{16}{49} = \frac{272}{2450}$

$P(3;3) = \frac{22}{50} \cdot \frac{21}{49} = \frac{462}{2450}$

$P\{(1;1),(2;2),(3;3)\} = \frac{110+272+462}{2450} = \frac{844}{2450} \approx 34{,}4\ \%$

$P(2;1) = \frac{17}{50} \cdot \frac{11}{49} = \frac{187}{2450}$

$P(3;1) = \frac{22}{50} \cdot \frac{11}{49} = \frac{242}{2450}$

$P(3;2) = \frac{22}{50} \cdot \frac{17}{49} = \frac{374}{2450}$

$P\{(2;1),(3;1),(3;2)\} = \frac{187+242+374}{2450} = \frac{803}{2450} \approx 32{,}8\ \%$

Lösung P4/2015

Lösungslogik

Ergänzung Baumdiagramm:

Die Summe aller möglichen Wahrscheinlichkeiten ist stets $100\,\%$. Wegen $\frac{3}{10} = 30\,\%$ ist somit die Wahrscheinlichkeit für die grünen Kugeln gleich $50\,\%$, alternativ $\frac{5}{10}$.

Wahrscheinlichkeit für höchstens eine grüne Kugel:

Gleichzeitige Ziehen von 2 Kugeln entspricht Ziehen von 2 Kugeln hintereinander ohne Zurücklegen. Höchstens eine grüne Kugel ist entweder keine grüne Kugel oder eine Grüne Kugel. Das Gegenereignis ist somit 2 grüne Kugeln.

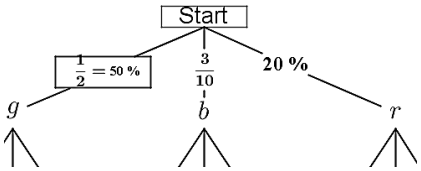
Doppelt so viele Kugeln in einem zweien Behälter:

Uli hat nicht Recht. Die Einzelwahrscheinlichkeiten im ersten Zug bleiben zwar bei $50\,\%$ für grün, $30\,\%$ für blau und $20\,\%$ für rot, jedoch ändert sich die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Zug.

Klausuraufschrieb

$\frac{3}{10} = 30\,\%$

$P(grün) = 100\% - P(blau) - P(grün) = 100\% - 30\% - 20\% = 50\%$



Höchstens eine grüne Kugel:

$$P(höchstens\ 1\ grüne\ Kugel) = 1 - P(zwei\ grüne\ Kugeln) = 1 - \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{29}{38} \approx 76{,}3\,\%$$

Doppelt so viele Kugeln:

Uli hat nicht Recht, denn

$$P(höchstens\ 1\ grüne\ Kugel) = 1 - P(zwei\ grüne\ Kugeln) = 1 - \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} = \frac{59}{78} \approx 75{,}6\,\%$$

Lösung P7/2016

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen ist Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen.
Im Beutel befinden sich insgesamt 10 Kärtchen, 6 mit dem Buchstaben „L", 3 mit dem Buchstaben „T" und eines mit dem Buchstaben „Z".
Wir bestimmen die Einzelereignisse und berechnen deren Wahrscheinlichkeit.

Klausuraufschrieb

$$P(SCHALL) = P(L;L) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} \approx 33{,}3\,\%$$

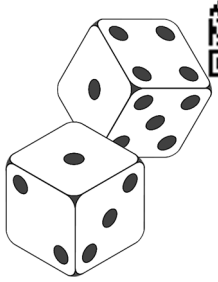
$$P(SCHATZ) = P\{(T;Z),(Z;T)\} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{90} \approx 6{,}7\,\%$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Pflichtteil) 2017-heute
3 Aufgaben im Dokument

Aufgabe P4/2017

Max und Nele spielen ein Würfelspiel.
Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen.
Die beiden Augenzahlen werden addiert (Augensumme).
Gewonnen hat der Spieler mit der größeren Augensumme.



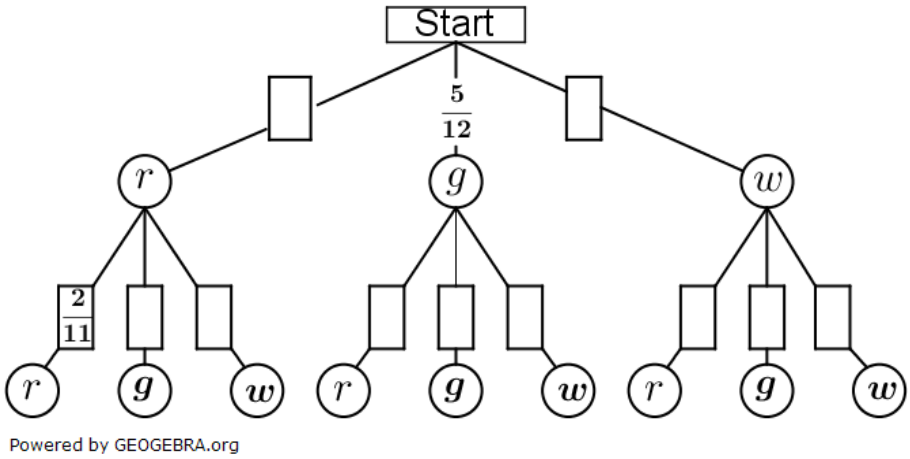
Überprüfen Sie die Aussage:
"Die Wahrscheinlichkeit für Augensumme 6 ist größer als die Wahrscheinlichkeit für Augensumme 9." Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder eine Argumentation.
Max hat eine 5 und eine 3 geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Nele mit dem nächsten Wurf das Spiel gewinnt?

Lösung*: Die Aussage „Wahrscheinlichkeit für Augensumme 6 ist größer als für Augensumme 9" ist wahr.*

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nele mit dem nächsten Wurf gewinnt, beträgt 27,8 % *%.*

Aufgabe P7/2018

In einer Schale liegen rote, grüne und weiße Gummibärchen. Insgesamt sind es 12 Stück. Julietta nimmt ohne hinzusehen gleichzeitig zwei Gummibärchen aus der Schale.
Die Grafik zeigt ein unvollständiges Baumdiagramm dieses Zufallsversuchs.



Vervollständigen Sie dieses Baumdiagramm.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Julietta bei diesem Zufallsversuch

- genau ein rotes Gummibärchen,
- höchstens ein weißes Gummibärchen?

Lösung: $P(ein\ rotes) = \frac{9}{22} = 40{,}9\ \%$

$P(höchstens\ einmal\ weiß) = \frac{10}{11} = 90{,}9\ \%$

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Pflichtteil) 2017-heute

Aufgabe P7/2019

In einem Kaugummiautomat befinden sich 10 rote, 9 weiße und 6 grüne Kaugummis. Betätigt man den Drehgriff, erhält man einen Kaugummi. Luisa dreht zweimal.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie;
  - zuerst einen roten und dann einen weißen Kaugummi?
  - keinen grünen Kaugummi?
- Von den 25 Kaugummis sind die Hälfte der roten und die Hälfte der grünen mit Brause gefüllt.

  Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Luisa zwei mit Brause gefüllte Kaugummis?

Lösung: $P(erst\ rot\ und\ dann\ weiß) = \frac{3}{20} = 15\ \%$

$$P(keinen\ grünen) = \frac{57}{100} = 57\ \%$$

$$P(zwei\ mit\ Brause) = \frac{7}{25} = 28\ \%$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung P4/2017

Lösungslogik

Wir stellen den Ergebnisraum für die Augensumme „6" und Augensumme „9" auf. Wenn Nele mit dem nächsten Wurf gewinnen will, muss sie die Augensumme größer als „8" würfeln.

Klausuraufschrieb

Augensumme „6" wahrscheinlicher als Augensumme „9":

$S(Augensumme\ 6) = \{(1;5),(5;1).(2;4),(4;2),(3;3)\}$

$S(Augensumme\ 9) = \{(3;6),(6;3).(4;5),(5;4)\}$

Argumentation:

Der Ergebnisraum für die Augensumme „6" ist größer als der der Augensumme „9", die Aussage ist richtig.

Rechnung:

$$P(Augensumme\ 6) = 5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \approx 13{,}9\ \%$$

$$P(Augensumme\ 9) = 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{4}{36} \approx 11{,}1\ \%$$

Nele gewinnt mit nächsten Wurf:

$S(Augensumme > 8) = \{(3;6),(4;5).(4;6),(5;4),(5;5),(5;6),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\}$

$$P(Augensumme > 8) = 10 \cdot \frac{1}{36} = \frac{10}{36} \approx 27{,}8\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nele mit dem nächsten Wurf gewinnt, beträgt $27{,}8\ \%$.

Lösung P7/2018

Lösungslogik

Für Grün im ersten Zug gilt $\frac{5}{12}$. Dies bedeutet, dass sich insgesamt 12 Gummibärchen in der Urne befinden.

Für Rot im zweiten Zug gilt $\frac{2}{11}$. Wegen der „11" im Nenner handelt es sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Da sich (wegen der „2" im Zähler) nach Ziehen von Rot im ersten Zug noch zwei rote Gummibärchen in der Urne befinden müssen, also waren es anfänglich drei rote Gummibärchen.

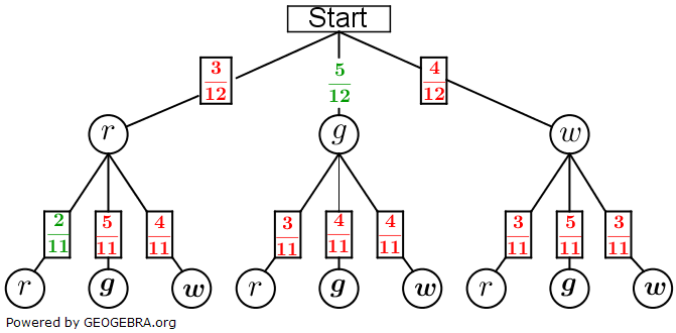
Damit verbleiben für Weiß vier weiße Gummibärchen, was ja insgesamt wieder 12 Gummibärchen macht.
Über diese Logik / Feststellung kann der Rest es Baumdiagramms ausgefüllt werden.

Genau ein rotes Gummibärchen:

Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{rg; rw; gr; wr\}$. Ermittlung der Wahrscheinlichkeit über die zweite Pfadregel.

Höchstens ein weißes Gummibärchen:
Höchstens bedeutet ein oder kein weißes Gummibärchen. Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{rr; rg; rw; gr; gg; gw; wr; wg\}$. Dies sind zu viele Berechnungen. Einfacher ist hier das Gegenereignis mit P(höchstens 1 weißes Bärchen)$= 1 - P(ww)$.

<u>Klausuraufschrieb</u>
Genau ein rotes Gummibärchen:
$P(genau\ 1\ mal\ rot) =$
$P(rg; rw; gr; wr) =$
$\frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} =$
$\frac{15+12+15+12}{132} = \frac{54}{132} = \frac{9}{22}$



Die Wahrscheinlichkeit, genau ein rotes Gummibärchen zu ziehen beträgt $\frac{9}{22}$.

Höchstens ein weißes Gummibärchen:
Das Gegenereignis ist zwei weiße Gummibärchen. Somit gilt:
$P(höchstens\ einmal\ weiß) = 1 - P(zweimal\ weiß)$
$P(zweimal\ weiß) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132} = \frac{1}{11}$
$1 - P(zweimal\ weiß) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$
Die Wahrscheinlichkeit höchstens ein weißes Gummibärchen zu ziehen beträgt $\frac{10}{11}$.

Lösung P7/2019

<u>Lösungslogik</u>
Bei allen Ereignissen handelt es sich um Ziehen **OHNE** Zurücklegen.

Zuerst einen roten, dann einen weißen Kaugummi:
Für Rot im ersten Zug gilt $\frac{10}{25}$. Für Weiß im zweiten Zug gilt $\frac{9}{24}$ (Ziehen ohne Zurücklegen, es sind zwar weiterhin 9 weiße Kaugummi im Automaten, aber insgesamt nur noch 24 Kaugummi.

Keinen grünen Kaugummi:
Wir bezeichnen die roten und weißen Kaugummi als „NICHT grün", sodass für den ersten Zug „nicht grün" gilt $\frac{19}{25}$ und für den zweiten Zug „nicht grün" gilt $\frac{18}{24}$.

Zwei mit Brause gefüllte Kaugummis:
Wir teilen die roten und grünen Kugeln je zur Hälfte auf in 5 rote mit Kaugummi und 5 rote mit Brause, sowie 3 grüne mit Kaugummi und 3 grüne mit Brause. Der Ergebnisraum des Zufall-Versuches ist dann:
$\Omega = \{r_{Brause} r_{Brause}; g_{Brause} g_{Brause}; r_{Brause} g_{Brause}; g_{Brause} r_{Brause}\}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

Zuerst einen roten, dann einen weißen Kaugummi:

$P(rot) = \frac{10}{25}$ im ersten Zug, $P(weiß) = \frac{9}{24}$ im zweiten Zug.

$P(erst\ rot, dann\ weiß) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20} = 15\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zuerst einen roten und dann einen weißen Kaugummi zu ziehen beträgt $15\ \%$.

Keinen grünen Kaugummi:

Rote und weiße Kaugummi bilden zusammen die „Nicht grünen" Kaugummis.

$P(keinen\ grünen) = P(\overline{grün}; \overline{grün}) = \frac{19}{25} \cdot \frac{18}{24} = \frac{57}{100} = 57\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, keinen grünen Kaugummi zu ziehen beträgt $57\ \%$.

Zwei mit Brause gefüllte Kaugummis:

Rote Brause (rb) = 5 Kugeln, grüne Brause (gb) = 3 Kugeln.

Die möglichen Ereignisse sind:

Zwei rb oder zwei gb oder einmal rb dann gb bzw. umgekehrt erst gb dann rb.

$P(zweima\ Brause) = P(rbrb; gbgb; rbgb; gbrb) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} + \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} + 2 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{3}{24} = \frac{20+6+30}{600}$

$P(zweima\ Brause) = \frac{7}{25} = 28\ \%$

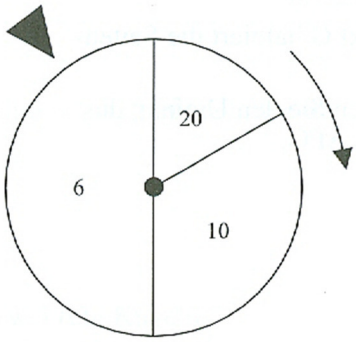
Die Wahrscheinlichkeit, zwei Brausekugeln zu ziehen beträgt $28\ \%$.

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) 2008-2014
7 Aufgaben im Dokument

Aufgabe W4a/2008

Ein Glücksrad mit den Mittelpunktswinkeln 60°, 120° und 180° ist mit den Zahlen 20, 10 und 6 beschriftet.
Es wird zweimal gedreht.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Zahlen genau 30 ergibt?

Lösung: $p = \frac{2}{18} \approx 11{,}1\,\%$



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe größer als 12 ist?

Lösung: $p = \frac{3}{4} = 75\,\%$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe kleiner als 30?

Lösung: $p = \frac{31}{36} \approx 86{,}1\,\%$

Aufgabe W4a/2009

Zwei Spielwürfel werden geworfen.
Die beiden gewürfelten Augenzahlen werden addiert (Augensumme).
Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis "Augensumme kleiner als 5"? Lösung: $p = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$

Bei einem Pasch sind die Augenzahlen gleich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, keinen Pasch zu werfen?

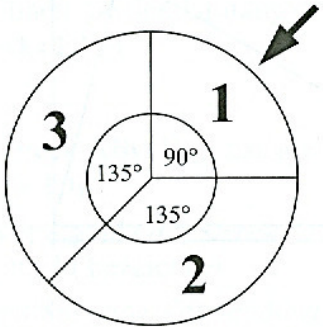
Lösung: $p = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\,\%$

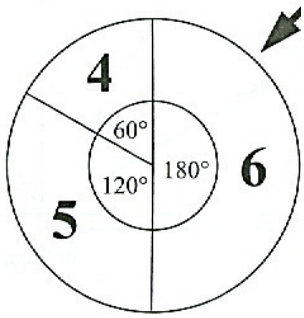
Nennen Sie zwei Ereignisse, für die sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12}$ ergibt.

Lösung (z.B.): $P(Augensumme < 4) = \frac{1}{12}$; $P(Augensumme > 10) = \frac{1}{12}$

Aufgabe W4a/2010

Die beiden Glücksräder werden gedreht. Die Ergebnisse beider Glücksräder werden addiert. Es werden zwei Gewinnsituationen angeboten:





Gewinnsituation A:	„Summe **8** oder **9**„
Gewinnsituation B:	„alle anderen Summen „

Für welche würden Sie sich entscheiden? Lösung: $p_A = 50\,\%$; $p_B = 50\,\%$

Anschließend wird das rechte Glücksrad so verändert, dass die Sektoren der Zahlen 4 und 5 jeweils den Mittelpunktswinkel 90 ° erhalten.
Für welche Gewinnsituation würden Sie sich jetzt entscheiden?

Lösung: $p_A = \frac{15}{32} \approx 46{,}9\,\%$; $p_B = \frac{17}{32} \approx 53{,}1\,\%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W4a/2011

Die Abschlussklassen der Linden-Realschule organisieren zugunsten eines sozialen Projekts eine Tombola. Die Tabelle zeigt die Losverteilung und die damit jeweils verbundenen Gewinne.

Anzahl der Lose	Wert des Gewinns
150 Nieten	Kein Gewinn
40 Kleingewinne	Je 4,00 €
10 Hauptgewinne	Je 20,00 €

Ein Los kostet 2,00 €.
Berechnen Sie den Erwartungswert. Lösung: $E(X) = -0{,}20\,€$
Um den Gewinn für das soziale Projekt zu erhöhen, geben die Klassen 50 weitere Nieten in die Lostrommel.
Welchen Betrag können die Abschlussklassen spenden, wenn alle Lose verkauft werden?

Lösung: $E(X) = -0{,}56\,€$; $G = 140\,€$

Aufgabe W4a/2012

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung führt die Klasse $10a$ der Neckar-Realschule ein Glücksspiel durch.
Die Sektoren des dafür verwendeten Glücksrades sind rot, gelb und blau gefärbt.
Die Wahrscheinlichkeit für Rot beträgt 25 %, für Gelb $\frac{1}{3}$.
Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Folgender Gewinnplan ist vorgesehen:

Farbe	Gewinn
Rot	4,00 €
Gelb	1,50 €
Blau	0,60 €

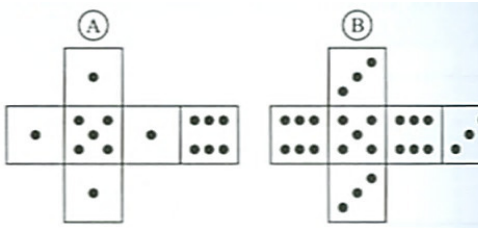
Pro Spiel werden 2,00 € Einsatz verlangt.
Berechnen Sie den Erwartungswert. Lösung: $E(X) = 0{,}25\,€$
Die Klasse möchte ihren zu erwartenden Gewinn pro Spiel verdoppeln. Dabei sollen das Glücksrad und der Einsatz pro Spiel nicht verändert werden. Stellen Sie einen möglichen Gewinnplan auf.

Lösung: *Der Gewinnplan für Rot muss von 4 € auf 3 € geändert werden.*

Aufgabe W4a/2013

Die beiden Netze zeigen die Augenzahlen zweier besonderer Spielwürfel.
Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine „Sechs" zu werfen?

Lösung: $p = 44{,}44\,\%$



Die beiden Würfel werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.
Berechnen Sie den Erwartungswert.

Lösung: $EX = -0{,}25$

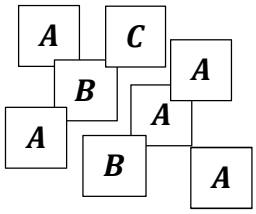
Wurfergebnisse	Gewinn
Gleiche Augenzahl (Pasch)	9,00 €
Verschiedene Augenzahlen	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 1,00 €	

Der Veranstalter möchte beim Würfelnetz (A) die „Fünf" durch eine „Sechs" ersetzen.
Der Gewinnplan soll gleichbleiben. Wäre dies für ihn vorteilhaft?
Begründen Sie.

Lösung: *nicht vorteilhaft, da sich $EX = 0$ ergibt.*

Aufgabe W4a/2014

Acht gleich große Karten sind mit den Buchstaben A, B und C beschriftet. Die Karten liegen so auf dem Tisch, dass die Buchstaben nicht sichtbar sind. Es werden zwei Karten gleichzeitig gezogen.



- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten mit verschiedenen Buchstaben zu ziehen?
- Die Karten sollen für ein Glücksspiel verwendet werden. Untenstehende Gewinnpläne werden geprüft. Für welchen Gewinnplan soll sich der Betreiber entscheiden? Begründen Sie Ihre Aussage.

Ergebnis der Ziehung	***Gewinnplan 1***	***Gewinnplan 2***
Zwei gleiche Buchstaben	3,00 €	5,00 €
Der Buchstabe C ist gezogen	5,00 €	3,00 €
Restliche Möglichkeiten	kein Gewinn	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 2,50 €		

Lösung: $P(zwei\ unterschiedliche\ Buchstaben) = \frac{34}{56} \approx 60{,}7\%$

Der Spielebetreiber sollte sich für Gewinnplan 1 entscheiden.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2008

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe genau 30.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe größer als 12.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe kleiner als 30.

Klausuraufschrieb

$P(6) = \frac{1}{2}$ $\quad P(10) = \frac{1}{3}$ $\quad P(20) = \frac{1}{6}$

$P(Summe = 30) = P\{(10;20),(20;10)\}$

$P(10;20) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ $\quad P(20;10) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P(Summe = 30) = P(10;20) + P(20;10) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} \approx 11{,}1\ \%$

Die Summe größer als 12 hat das Gegenereignis Summe gleich 12.

$P(Summe > 12) = 1 - P(Summe = 12)$

$P(6;6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(Summe > 12) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \approx 75\ \%$

Die Summe kleiner als 30 hat das Gegenereignis Summe größer gleich 30.

$P(Summe < 30) = 1 - \big(P(Summe = 30) + P(Summe = 40)\big)$

$P(Summe < 30) = 1 - \frac{2}{18} - \frac{1}{36} = \frac{31}{36} \approx 86{,}1\ \%$

Lösung W4a/2009

Lösungslogik

Aufstellung einer 6-Zeilen-6-Spaltentabelle mit Eintragung der Elementarereignisse in die einzelnen Tabellenelemente.
Ermittlung der gefragten Wahrscheinlichkeiten aus der Anzahl möglicher Elementarereignisse in der Tabelle.

Klausuraufschrieb

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

$P(Augensumme < 5) = P\{(1;1),(1:2),(2;1),(2,2);(1,3),(3,1)\}$

Die Wahrscheinlichkeit jedes Einzelelements der Tabelle beträgt $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, somit ist

$$P(Augensumme < 5) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$$

$$P(kein\ Pasch) = 1 - P(Pasch) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\ \%$$

$$p = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

$$P(Augensumme < 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(Augensumme > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen über die angegebenen Mittelpunkts-Winkel.
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ und Vergleich.
Neuberechnung der Wahrscheinlichkeit für die Zahlen 4 und 5 über die neuen Mittelpunktswinkel.
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ und Vergleich.

Klausuraufschrieb

$P(1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(2) = \frac{135}{360} = \frac{3}{8}$ $\quad P(3) = \frac{3}{8}$
$P(4) = \frac{1}{6}$ $\quad P(5) = \frac{1}{3}$ $\quad P(6) = \frac{1}{2}$
$P(A) = \{(3;5),(2;6),(3;6)\}$
$P(B) = 1 - P(A)$
$P(3;5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}$ $\quad P(2;6) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad P(3;6) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$
$P(A) = P(3;5) + P(2;6) + P(3;6) = \frac{3}{24} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2} = 50\ \%$
$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$
Es ist gleichgültig, für welche Gewinnsituation man sich entscheidet.
Geänderter Mittelpunkts-Winkel für die 4 und die 5.
$P(4) = \frac{1}{4}$ $\quad P(5) = \frac{1}{4}$
$P(3;5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$
$P(A) = P(3;5) + P(2;6) + P(3;6) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{15}{32} \approx 46{,}9\ \%$
$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32} \approx 53{,}1\ \%$
Man wird sich jetzt für Gewinnsituation B entscheiden.

Lösung W4a/2011

Lösungslogik

Aufgabe zum Erwartungswert.
Aufstellen einer Tabelle aus drei Zeilen mit drei Spalten, die ersten zwei Spalten für die Gewinnsituationen, die dritte Spalte für die Niete.
Eintragung der jeweiligen Gewinne **abzüglich** Lospreis in die ersten beiden Spalten der ersten Zeile. Eintragung des Lospreises mit negativem Vorzeichen in die dritte Spalte der ersten Zeile.
Eintragung der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne in die ersten beiden Spalten der zweiten Zeile, Wahrscheinlichkeit für die Nieten in der dritten Spalte der zweiten Zeile.
Spalten der Zeile eins und zwei vorzeichengerecht multiplizieren und in die Spalten der dritten Zeile eintragen.
Vorzeichengerechte Addition der Spalteninhalte der dritten Zeile ergibt den Erwartungswert.
Neuberechnung des Erwartungswertes mit erhöhter Losanzahl.
Berechnung des Betrages, der gespendet werden kann über die Multiplikation von Anzahl der Lose mit dem Betrag des Erwartungswertes.

Klausuraufschrieb

$P(20\,€) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ $\quad P(4\,€) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$ $\quad P(-2\,€) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$

Berechnung der Erwartungswerte:

$18\,€$	$2\,€$	$-2{,}00\,€$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
$0{,}90\,€$	$0{,}40\,€$	$-1{,}50\,€$

$EX = 0{,}9 + 0{,}40 - 1{,}50 = -0{,}20\,€$

Neuberechnung nach Erhöhung der Losanzahl:

$P(20\,€) = \frac{10}{250} = \frac{1}{25}$ $\quad P(4\,€) = \frac{40}{250} = \frac{4}{25}$ $\quad P(-2\,€) = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}$

Berechnung der Erwartungswerte

$18\,€$	$2\,€$	$-2{,}00\,€$
$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}$
$0{,}72\,€$	$0{,}32\,€$	$-1{,}60\,€$

$EX = 0{,}72 + 0{,}32 - 1{,}60 = -0{,}56\,€$

Verkauf aller Lose:

$G = n \cdot |EX| = 250 \cdot 0{,}56 = 140\,€$

Die Schüler der Abschlussklasse können $140\,€$ *spenden, wenn alle Lose verkauft werden.*

Lösung W4a/2012

Lösungslogik

Aufgabe zum Erwartungswert.

Aufstellen einer Tabelle aus drei Zeilen mit drei Spalten, ähnlich Aufgabe W4a/2011. Da jedoch alle Farben gewinnen, wird keine Spalte für den Spieleinsatz eingetragen.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Farbe Blau über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit „Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementereignisse eines Zufallsexperiments ist stets 1„.

Spalten der Zeile eins und zwei multiplizieren und in die Spalten der dritten Zeile eintragen. Vorzeichengerechte Addition der Spalteninhalte der dritten Zeile ergibt den Erwartungswert.

Berechnung der Veränderung des Gewinnplans, damit der Gewinn pro Spiel verdoppelt wird.

Klausuraufschrieb

$P(rot) = \frac{1}{4}$ $\quad P(gelb) = \frac{1}{3}$ $\quad P(blau) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Berechnung der Erwartungswerte

$4\,€$	$1{,}50\,€$	$0{,}60\,€$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
$1{,}00\,€$	$0{,}50\,€$	$0{,}25\,€$

$EX = 1{,}00 + 0{,}50 + 0{,}25 = 1{,}75\,€$

Gewinn pro Spiel:

$Gewinn = Einsatz - EX = 2{,}00 - 1{,}75 = 0{,}25\,€$

Verdoppelung des Gewinns:
$2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50 = 2{,}00 - EX \Longrightarrow \; EX = 1{,}50$
Mit einer Veränderung des Gewinns von 4 € auf 3 € ergibt sich:
$EX = 3 \cdot \frac{1}{4} + 1{,}50 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}60 \cdot \frac{5}{12} = 0{,}75 + 0{,}50 + 0{,}25 = 1{,}50$ €
Der Gewinnplan muss von 4 € auf 3 € verändert werden, damit die Klasse den doppelten Gewinn macht.

Lösung W4a/2013

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit „mindestens eine Sechs":
Wir stellen die Wahrscheinlichkeit einer Sechs für Würfel A und Würfel B auf. Würfel A hat nur eine Sechs, also $P(6_A) = \frac{1}{6}$. Würfel B hat zwei Sechsen, also $P(6_B) = \frac{2}{6}$.
Mindestens eine Sechs bedeutet eine Sechs oder zwei Sechsen. Am Wort „mindestens" erkennen wir, dass der schnellste Lösungsweg über das Gegenereignis führt, denn „mindestens eine Sechs" ist dasselbe wir $1 -$ „keine Sechs". Keine Sechs bei Würfel A ist $P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$, bei Würfel B jedoch $P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$.
Erwartungswert:
Zunächst müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „Pasch" bestimmen. Aufgrund des Aufbaus der beiden Würfel sind nur die Ereignisse $\{5;5\}$ und $\{6;6\}$ möglich. $P(6_A)$ und $P(6_B)$ sind bereits bekannt, $P(5_A) = P(5_B) = \frac{1}{6}$.
Wir bestimmen nun den Erwartungswert über eine Tabelle.
Ersatz der „Fünf" bei Würfel A durch eine „Sechs":
Durch den Ersatz ist nunmehr ein 5–er Pasch ausgeschlossen, es ist nur noch ein 6–er Pasch möglich, wobei jetzt $P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6}$ ist. Wir berechnen den Erwartungswert neu und vergleichen diesen mit dem Vorwert.

Klausuraufschrieb

$P(6_A) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$
$P(6_B) = \frac{2}{6}$ $\qquad$ $P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$

$$P(mindestens\ 1\ Sechs) = 1 - P(keine\ Sechs)$$
$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt $44{,}4$ %.

Erwartungswert:

$P(Pasch) = P\{(5;5),(6;6)\} = P(5;5) + P(6;6)$

$P(5;5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\quad P(6;6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$

$P(Pasch) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(Gewinn)$

$P(\overline{Gewinn}) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Gewinn/Einsatz (X_i)	$8{,}00$ €	$-1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{8}{12}$ €	$-\frac{11}{12}$ €
EX	$\frac{8}{12}$ € $-\frac{11}{12}$ € $= -\frac{3}{12}$ € $= -0{,}25$ €	

Der Erwartungswert ist $EX = -0{,}25$.

Ersatz der „Fünf" bei Würfel A

Es ist nur noch das Ereignis $\{6;6\}$ möglich.

$P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(Gewinn) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$P(\overline{Gewinn}) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Gewinn/Einsatz (X_i)	$8{,}00$ €	$-1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{8}{9}$ €	$-\frac{8}{9}$ €
EX	$\frac{8}{9}$ € $-\frac{8}{9}$ € $= 0$ €	

Der Erwartungswert nach Ersatz der „Fünf" bei Würfel A ist 0, d.h., das Spiel ist fair, das Ersetzen wäre für den Veranstalter nicht vorteilhaft.

Lösung W4a/2014

<u>Lösungslogik</u>

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Karten mit unterschiedlichen Buchstaben ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(A;B)$, $P(B;A)$, $P(B;C)$, $P(C;B)$, $P(A;C)$ und $P(C;A)$. Einfacher ist hier der Weg über das Gegenereignis, nämlich $1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$.

Für die Prüfung der Gewinnpläne erstellen wir eine Tabelle zur Errechnung der Erwartungswerte.

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) 2008-2014

Klausuraufschrieb

$P(A;A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$; $P(B;B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$; $P(C;C) = 0$

$P(zwei\ unterschiedliche\ Buchstaben) = 1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$

$= 1 - \frac{22}{56} = \frac{34}{56} \approx 60{,}7\%$

Erwartungswerte:

$P(zwei\ gleichen\ Buchstaben) = \frac{22}{56}$

$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = P(A;C) + P(C;A) + P(B;C) + P(C;B)$

$P(A;C) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{56}$, $P(C;A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{56}$, $P(B;C) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$, $P(C;B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{56}$

$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = \frac{14}{56}$

Gewinnplan 1

	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-0{,}50$ €	$-2{,}50$ €	$2{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{20}{56}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}20$ €	$-0{,}62$ €	$0{,}89$ €
EX	$-0{,}20\ € - 0{,}62\ € + 0{,}89\ € = 0{,}07\ €$		

Gewinnplan 2

	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-2{,}50$ €	$-0{,}50$ €	$2{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{20}{56}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}98$ €	$-0{,}12$ €	$0{,}89$ €
EX	$-0{,}98\ € - 0{,}12\ € + 0{,}89\ € = -0{,}21\ €$		

Der Spielebetreiber sollte sich für Gewinnplan 1 entscheiden, da er hier auf lange Sicht gesehen einen Gewinn pro Spiel erzielt.

Aufgabe W4a/2015

In einem Kartenstapel liegen zwölf Karten. Die Verteilung ist in der Tabelle dargestellt. Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Zwei Karten werden gleichzeitig gezogen.

Kartenfarbe			
schwarz		rot	
♣	♠	♥	♦
Kreuz	Pik	Herz	Karo
Anzahl			
6	1	3	2

- Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten?

Lösung: $P(rot\ und\ schwarz) = 53{,}03\%$

Die zwölf Karten werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Es sollen ebenfalls zwei Karten gleichzeitig gezogen werden. Dazu wird der nebenstehende Gewinnplan geprüft.

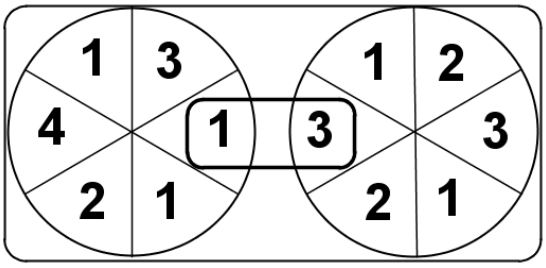
Ergebnisse	Gewinn
Zweimal Karo	10,00 €
Zweimal Herz	5,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

- Berechnen Sie den Erwartungswert.
- Sophie macht den Vorschlag, den Gewinn für „zweimal Karo" auf 20,00 € hochzusetzen und alles andere zu belassen. Der Betreiber des Glücksspiels protestiert und behauptet, er würde dann Verlust machen. Hat der Betreiber Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

  Lösung: $E(X)_1 = 0{,}62$ €; $E(X)_2 = 0{,}47$ €; der Spielebetreiber hat nicht Recht.

Aufgabe W4a/2016

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung werden zwei Glücksräder eingesetzt. Beide Glücksräder werden gedreht. Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster eine zweistellige Zahl. Die Abbildung zeigt die Zahl 13. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen?



Die Glücksräder werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft. Berechnen Sie den Erwartungswert.

Gewinnplan	
Ergebnisse	Gewinn
Zwei gleiche Ziffern	3,00 €
Zahl größer als 40	5,00 €
Restliche Möglichkeiten	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 2,00 €	

Bei der Wohltätigkeitsveranstaltung soll ein höherer Erlös erzielt werden. Dazu soll beim rechten Glücksrad einer der beiden Dreien durch eine fünf ersetzt werden. Der Gewinnplan bleibt gleich.
Wäre dies vorteilhaft? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder durch eine Argumentation.

Lösung: $P(zwei\ gleiche\ Ziffern) = \frac{5}{18}$

$E(X) = -0{,}33$ € *(aus der Sicht des Spielers)*

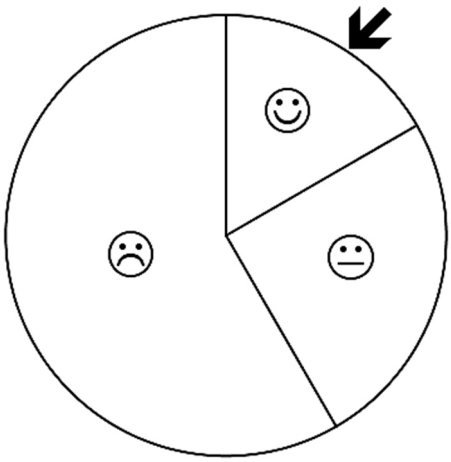
Die Veränderung ist vorteilhaft.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe W4a/2017

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung wird ein Glücksrad eingesetzt.
Die Mittelpunkts-Winkel betragen $60\,°$, $90\,°$ und $210\,°$.
Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man höchstens einmal das Symbol ☺?



Das Glücksrad wird für ein Glücksspiel verwendet. Berechnen Sie den Erwartungswert unter Berücksichtigung des nebenstehenden Gewinnplans.

Gewinnplan	
Ereignisse	Gewinn
zweimal ☺	$4{,}00\,€$
zweimal 😐	$2{,}00\,€$
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel $0{,}50\,€$	

Der Gewinnplan soll so verändert werden, dass das Spiel fair wird.

Wie hoch muss der Gewinn für das Ereignis "zweimal ☺" sein, wenn alles andere unverändert bleibt?

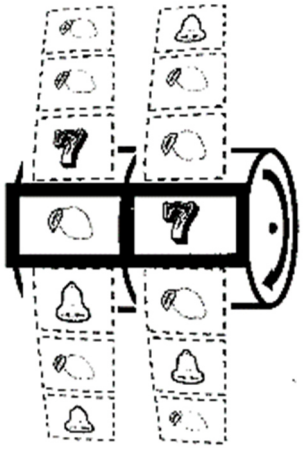
Lösung: $P(höchstens\ einmal\ ☺) = \frac{35}{36} \approx 97{,}2\,\%$

$E(X) = -0{,}26\,€$ *(aus der Sicht des Spielers)*

Gewinn für zweimal ☺, damit das Spiel fair ist: $13{,}50\,€$

Aufgabe W4a/2018

Im Technikunterricht wurde für ein Schulfest ein Zufallsgerät gebaut, bei dem sich zwei Walzen unabhängig voneinander drehen.
Die Walzen sind mit Symbolen beklebt. Auf jeder Walze sind vier Zitronen, zwei Glocken und eine Sieben abgebildet.
Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster zwei Symbole nebeneinander.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "zweimal Glocke"?

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Das Zufallsgerät wird für ein Glücksspiel eingesetzt.
Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.
Berechnen Sie den Erwartungswert.
Was bedeutet dies für den Spieler?

Ereignis	Gewinn
Zweimal Glocke	4,00 €
Zweimal Sieben	10,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel : 1,00 €	

Der Einsatz soll auf 1,20 € erhöht werden.
Der Gewinn für "zweimal Glocke" sowie der Erwartungswert bleiben gleich.

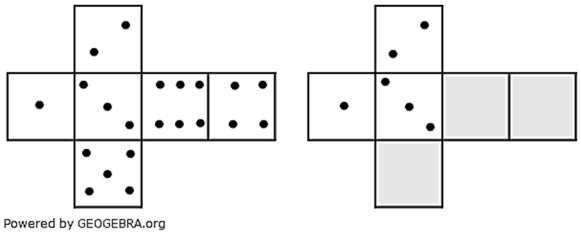
Merle behauptet: "Der Gewinn für "zweimal Sieben" beträgt dann etwa 20 €."
Hat Merle Recht? Begründen Sie rechnerisch.

Aufgabe W4a/2019

Beim Würfelspiel „Augensumme 4 gewinnt" wird gleichzeitig mit zwei Spielwürfeln geworfen. Die Augenzahlen werden addiert (Augensumme). Dieses Spiel soll als Glückspiel eingesetzt werden.
Berechnen Sie den Erwartungswert.

Ereignisse	Gewinn
„Augensumme gleich 4"	4,00 €
„Augensumme kleiner 4"	2,00 €
„Augensumme größer 4"	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

Der Betreiber bekommt die Vorgabe, das Glücksspiel zu verändern. Er soll auf einem der beiden Spielwürfel die Vier, die Fünf und die Sechs entweder durch drei Einsen oder durch drei Dreien ersetzen.



Wofür soll sich der Betreiber entscheiden?
Begründen Sie Ihre Entscheidung durch Rechnung oder Argumentation.

Lösungen: $E(X) = -0{,}50\,€$
$E(X_{3\ Einsen}) = 0{,}17\,€$
$E(X_{3\ Dreien}) = -0{,}17\,€$

Der Betreiber sollte sich dafür entscheiden, die Vier, Fünf und Sechs durch Dreien zu ersetzen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung W4a/2015

Lösungslogik

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für die schwarzen und die roten Karten.
Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen.
Eine rote und eine schwarze Karte hat die Ergebnisse „schwarz, rot" oder „rot, schwarz".
Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.
Berechnung des Erwartungswertes für geänderten Gewinnplan über eine Tabelle.

Klausuraufschrieb

$P(schwarz) = \frac{7}{12}; \quad P(rot) = \frac{5}{12}$

$P(eine\ rote\ und\ eine\ schwarze\ Karte) = P\{(r;s),(s,r)\} = P(r,s) + P(s,r)$

$P(r,s) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132} \qquad P(r,s) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$

$P(eine\ rote\ und\ eine\ schwarze\ Karte) = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} \approx 53{,}03\ \%$

Erwartungswerte:

$P(zweimal\ Herz) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{132}$

$P(zweimal\ Karo) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

Gewinnplan 1

	$P(zweimal\ Karo)$	$P(zweimal\ Herz)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-9{,}00$ €	$-4{,}00$ €	$1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{2}{132}$	$\frac{6}{132}$	$\frac{124}{132}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}14$ €	$-0{,}18$ €	$0{,}94$ €
EX	$-0{,}14\ € - 0{,}18\ € + 0{,}94\ € = 0{,}62\ €$		

Der Spielebetreiber kann auf lange Sicht gesehen mit einer Einnahme von $0{,}62$ € *pro Spiel rechnen.*

Gewinnplan 2

	$P(zweimal\ Karo)$	$P(zweimal\ Herz)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-19{,}00$ €	$-4{,}00$ €	$1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{2}{132}$	$\frac{6}{132}$	$\frac{124}{132}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}29$ €	$-0{,}18$ €	$0{,}94$ €
EX	$-0{,}29\ € - 0{,}18\ € + 0{,}94\ € = 0{,}47\ €$		

Der Spielebetreiber kann nach wie vor mit einer Einnahme pro Spiel rechnen, der Spielebetreiber hat nicht Recht.

Lösung W4a/2016

Lösungslogik

Zahl mit zwei gleichen Ziffern:

An Hand der Abbildung legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Zahlen 1 bis 4 pro Glücksrad fest, stellen den Ergebnisraum auf und berechnen die Wahrscheinlichkeit.

Erwartungswert:

Wir müssen zunächst noch die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 40 bestimmen. Für den Gewinn „Zwei gleiche Ziffern" haben wir die Wahrscheinlichkeit ja schon zuvor ermittelt.

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Veränderung Glücksrad 2:

Durch eine Argumentation:

Siehe Klausuraufschrieb

Durch Rechnung:

Wir bestimmen die neuen Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn von $3{,}00$ € und von $5{,}00$ € und stellen eine neue Tabelle auf.

Klausuraufschrieb

Zahl mit zwei gleichen Ziffern:

Linkes Glücksrad: $P(1)=\frac{3}{6}$; $P(2)=\frac{1}{6}$; $P(3)=\frac{1}{6}$; $P(4)=\frac{1}{6}$

Rechtes Glücksrad: $P(1)=\frac{2}{6}$; $P(2)=\frac{2}{6}$; $P(3)=\frac{2}{6}$

$$P(zwei\ gleiche\ Ziffern)=P\{(1;1),(2;2),(3;3)\}=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6+2+2}{36}=\frac{10}{36}$$

Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen, beträgt $\frac{5}{18}$.

Erwartungswert:

$$P(Zahl\ größer\ 40)=P\{(4;1),(4;2),(4;3)\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{36}$$

	$P(zwei\ gleiche\ Ziffer)$	$P(Zahl\ größer\ 40)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$1{,}00$ €	$3{,}00$ €	$-2{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{20}{36}$
$X_i\cdot p(X_i)$	$0{,}28$ €	$0{,}50$ €	$-1{,}11$ €
$E(X)$	$0{,}28\text{ €}+0{,}50\text{ €}-1{,}11\text{ €}=-0{,}33\text{ €}$		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist $-0{,}33$ €.

Veränderung Glücksrad 2:

Argumentation:

Wird beim Glücksrad *2* eine *3* durch eine *5* ersetzt, verringert sich die Wahrscheinlichkeit für die Anzeige von *(3;3) von* $\frac{2}{36}$ *auf* $\frac{1}{36}$, damit sinkt der Auszahlungsbetrag für den Gewinn *3,00 €*. Auf der anderen Seite verändert sich die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als *40* nicht, da die Verringerung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl *43* durch die Erhöhung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl 45 voll ausgeglichen wird. Es sinkt also lediglich die Auszahlung für den Gewinn von *3,00 €.* Dies wäre im Sinne eines höheren Erlöses vorteilhaft.

Rechnung:

$P(zwei\ gleiche\ Ziffern) = P\{(1;1),(2;2),(3;3)\} = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{36}$

$P(Zahl\ größer\ 40) = P\{(4;1),(4;2),(4;3),(4;5)\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

	$P(zwei\ gleiche\ Ziffer)$	$P(Zahl\ größer\ 40)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$1{,}00$ €	$3{,}00$ €	$-2{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{21}{36}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}25$ €	$0{,}50$ €	$-1{,}17$ €
$E(X)$	$0{,}25\ € + 0{,}50\ € - 1{,}17\ € = -0{,}42\ €$		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist jetzt $-0{,}42$ €.

Die Veränderung von Glücksrad 2 wäre vorteilhaft.

Lösung W4a/2017

Lösungslogik

Höchstens einmal ☺:

An Hand der gegebenen Mittelpunkt-Winkel legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Symbole ☺, 😐, sowie ☹ fest. Berechnung der Wahrscheinlichkeit für „höchstens einmal ☺„ über das Gegenereignis „zweimal ☺„.

Erwartungswert

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Faires Spiel:

Der Erwartungswert $E(X)$ muss Null sein.

Für den zu ändernden Gewinn für „zweimal ☺„ schreiben wir die Variable a.

Klausuraufschrieb

Höchstens einmal ☺:

$P(☺) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$; $P(😐) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $P(☹) = \frac{210}{360} = \frac{7}{12}$

Das Gegenereignis von „höchstens einmal ☺„ lautet „zweimal ☺„.

$P(höchstens\ einmal\ ☺) = 1 - P(zweimal\ ☺) = 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{35}{36} \approx 97{,}2\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit für „höchstens einmal ☺„ beträgt etwa $97{,}2\ \%$.

Erwartungswert:

	$P(zweimal\ ☺)$	$P(zweimal\ 😐)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$3{,}50$ €	$1{,}50$ €	$-0{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{4}{144}$	$\frac{9}{144}$	$\frac{131}{144}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}0972$€	$0{,}09375$ €	$-0{,}4549$ €
$E(X)$	$0{,}0972\ € + 0{,}09375\ € - 0{,}4549\ € = -0{,}26335\ €$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}26$ € *(aus der Sicht des Spielers).*

Faires Spiel:

	$P(zweimal\ ☺)$	$P(zweimal\ 😐)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$a - 0{,}50\ €$	$1{,}50\ €$	$-0{,}50\ €$
$p(X_i)$	$\frac{4}{144}$	$\frac{9}{144}$	$\frac{131}{144}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{4}{144}a - 0{,}0139€$	$0{,}09375\ €$	$-0{,}4549\ €$
$E(X)$	$0{,}0278a - 0{,}0139\ € + 0{,}09375\ € - 0{,}4549\ €$ $= 0{,}0278a - 0{,}37505\ €$		

Ein Spiel ist fair, wenn $E(X) = 0$ ist, also:

$0{,}0278a - 0{,}37505\ € = 0 \quad | \quad +0{,}37505\ €$

$0{,}0278a = 0{,}37505\ € \quad | \quad :0{,}0278$

$a = 13{,}491007\ €$

Der Gewinn für „zweimal ☺„ muss $13{,}50\ €$ betragen, damit das Spiel fair ist.

Lösung W4a/2018

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit für zweimal Glocke:

An Hand der gegebenen Anzahl Symbole auf den Rädern bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit für das Symbol Glocke und berechnen diese über die erste Pfadregel.

Erwartungswert:

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Merles Behauptung:

Mit einem unveränderten Erwartungswert $E(X)$ und dem neuen Einsatz berechnen wir die Auszahlung für zweimal 7 neu.

Klausuraufschrieb

Einzelwahrscheinlichkeiten:

$P(Zitrone) = \frac{4}{7}; \quad P(Glocke) = \frac{2}{7}; \quad P(Sieben) = \frac{1}{7}$

Wahrscheinlichkeit für zweimal Glocken:

$P(Glocke; Glocke) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 8{,}16\ \%$

Erwartungswert:

	$P(zweimal\ Glocke)$	$P(zweimal\ 7)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$3{,}00\ €$	$9{,}00\ €$	$-1{,}00\ €$
$p(X_i)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{44}{49}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}2449€$	$0{,}1837\ €$	$-0{,}8980\ €$
$E(X)$	$0{,}2449\ € + 0{,}1837\ € - 0{,}8980\ € = -0{,}4694\ €$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}47\ €$ (aus der Sicht des Spielers).

Der Spieler verliert auf lange Sicht 0,47 € / Spiel

Merles Behauptung:
Neuer Einsatz ist $1{,}20\,€$; $E(X) = -0{,}47\,€$; Gewinn zweimal Glocke ist $4{,}00\,€$;
Gewinn zweimal 7 ist $a + 1{,}20\,€$.

	$P(zweimal\ Glocke)$	$P(zweimal\ 7)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$2{,}80\,€$	$a - 1{,}20€$	$-1{,}20\,€$
$p(X_i)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{44}{49}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}2286€$	$0{,}0204(a - 1{,}20)\,€$	$-1{,}0776\,€$
$E(X)$	$0{,}2286\,€ + 0{,}0204 \cdot a\,€ - 0{,}0245\,€ - 1{,}0776\,€ = -0{,}47\,€$		

$0{,}2286\,€ + 0{,}0204 \cdot a\,€ - 0{,}0245\,€ - 1{,}0776\,€ = -0{,}47\,€$
$-0{,}8735\,€ + 0{,}0204 \cdot a\,€ = -0{,}47\,€ \quad | \quad +0{,}8735\,€$
$0{,}0204 \cdot a\,€ = 0{,}4035\,€ \quad | \quad :0{,}0204$
$a \approx 19{,}80\,€$
Merle hat Recht, der Gewinn für zweimal 7 ist etwa 20 € (19,80 €).

Lösung W4a/2019

Lösungslogik

Die nachfolgende Tabelle verdeutlicht die Situation: In den *6x6*-Quadraten steht die jeweilige Augensumme.

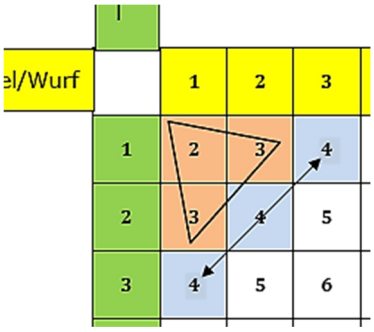
2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Ereignis „Augensumme = 4":

Wie wir sehen, steht die 4 in drei der 36 $6x6$-Quadrate (blau hinterlegt). Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. *Somit ist:*

$P(Augensumme = "4") = \frac{3}{36}$.



Ereignis „Augensumme kleiner 4":

Wie wir sehen, steht eine Zahl kleiner 4 in drei der 36 $6x6$-Quadrate (Orange hinterlegt). Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Somit ist:

$P(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{3}{36}$.

Ereignis „Augensumme größer 4":

Dies sind alle anderen Ereignisse der 36 $6x6$-Quadrate (weiß hinterlegt), also insgesamt 30 Quadrate. Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Somit ist:

$P(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{30}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeiten sind ermittelt, der Erwartungswert kann berechnet werden.

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Einsen.

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	1	1	1
1	2	3	4	2	2	2
2	3	4	5	3	3	3
3	4	5	6	4	4	4
4	5	6	7	5	5	5
5	6	7	8	6	6	6
6	7	8	9	7	7	7

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aus der zuvor stehenden Grafik erkennen wir, dass die Wahrscheinlichkeit für „Auensumme kleiner 4" nun 9 der 36 Quadrate belegt. Die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme gleich 4" belegt 6 der 36 Quadrate, damit belegt die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme größer 4" 21 der 36 Quadrate.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{9}{36}$

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{21}{36}$

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Dreien.

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	3	3	3
1	2	3	4	4	4	4
2	3	4	5	5	5	5
3	4	5	6	6	6	6
4	5	6	7	7	7	7
5	6	7	8	8	8	8
6	7	8	9	9	9	9

$P_{3\ Dreien}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$.

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{3}{36}$

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{27}{36}$

Entscheidung des Spielebetreibers über eine Argumentation bzw. Rechnung siehe Klausuraufschrieb.

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Klausuraufschrieb

$P\left(Augensumme = "4"\right) = \frac{3}{36}$; $\mathrm{P}\left(\text{Augensumme kleiner "4"}\right) = \frac{3}{36}$;

$P(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{30}{36}$.

Erwartungswert:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	3,00 €	1,00 €	−1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,25€	0,08 €	−0,83 €
$E(X)$	0,25 € + 0,08 € − 0,83 € = −0,50 €		

Der Erwartungswert beträgt −0,50 € *(aus der Sicht des Spielers).*

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Einsen.

$P_{3\ Einsen}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$; $P_{3\ Einsen}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{9}{36}$

$P_{3\ Einsen}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{21}{36}$

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Dreien.

$P_{3\ Dreien}(Augensumme = "4") = \frac{6}{36}$; $P_{3\ Dreien}(Augensumme\ kleiner\ "4") = \frac{3}{36}$

$P_{3\ Dreien}(Augensumme\ größer\ "4") = \frac{27}{36}$

Entscheidung des Spielebetreibers durch eine Argumentation:

Bei Änderung des Würfels auf drei Einsen bzw. drei Dreien bleibt die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme gleich 4" dieselbe, lediglich die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme kleiner 4" ist bei drei Einsen wesentlich höher als bei drei Dreien. Das bedeutet, dass der Betreiber bei Änderung durch drei Einsen mehr Gewinne auszahlen muss als bei Änderung durch drei Dreien. Er sollte sich somit für eine Änderung auf drei Dreien entscheiden.

Entscheidung des Spielebetreibers durch Rechnung:

Erwartungswert für drei Einsen:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	3,00 €	1,00 €	−1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{21}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,50€	0,25 €	−0,58 €
$E(X)$	0,50 € + 0,25 € − 0,58 € = 0,17 €		

Der Erwartungswert beträgt +0,17 € *(aus der Sicht des Spielers).*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Erwartungswert für drei Dreien:

	$P(gleich\ 4)$	$P(kleiner\ 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$3{,}00\ €$	$1{,}00\ €$	$-1{,}00\ €$
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{27}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}50€$	$0{,}08\ €$	$-0{,}75\ €$
$E(X)$	$0{,}50\ € + 0{,}08\ € - 0{,}75\ € = -0{,}17\ €$		

Der Erwartungswert beträgt $-0{,}17\ €$ *(aus der Sicht des Spielers).*

Da der Spielebetreiber bei Änderung auf drei Einsen einen Verlust von $0{,}17\ €$ */ Spiel erleidet, sollte er sich für eine Änderung auf drei Dreien entscheiden.*