Lösung P8/2008

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine Kugel rot und eine Kugel weiß.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{5}{10}$ $\quad P(weiß) = \frac{3}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{2}{10}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P\{(b;b),(w;w),(r,r)\}$

$P(b;b) = \frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{25}{100}$ $\quad P(w;w) = \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ $\quad P(r;r) = \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{4}{100}$

$$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P(b;b) + P(w;w) + P(r;r)$$
$$= \frac{25}{100} + \frac{9}{100} + \frac{4}{100} = \frac{38}{100} = 38\ \%$$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P\{(w;r),(r;w)\}$

$P(w;r) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{6}{100}$ $\quad P(r;w) = \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{6}{100}$

$$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P(w;r) + P(r;w) = \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{12}{100} = 12\ \%$$

Lösung P8/2009

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln. Zwei verschiedenfarbige Kugeln ist das Gegenereignis zu zwei gleichfarbige Kugeln. Da nur eine einzige Kugel weiß ist, ist das Gegenereignis mit $P(r;r)$ und $P(w;w)$ sehr schnell ermittelt.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für höchstens eine Kugel rot. Höchstens eine Kugel rot bedeutet eine oder keine rote Kugel. Das Gegenereignis hierzu sind zwei rote Kugeln.

Klausuraufschrieb

$P(weiß) = \frac{1}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{4}{10}$ $\quad P(blau) = \frac{5}{10}$

Zwei verschiedenfarbige Kugeln:

$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - P\{(r;r),(b;b)\}$

$P(r;r) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{12}{90}$ $\quad P(b;b) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{20}{90}$

$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - \big(P(r;r) + P(b;b)\big)$$
$$= 1 - \frac{12}{90} - \frac{20}{90} = \frac{58}{90}$$

$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) \approx 64{,}4\ \%$

Höchstens eine Kugel ist rot:

Das Gegenereignis ist „beide Kugeln sind rot", somit gilt:

$P(höchstens\ eine\ rote\ Kugel) = 1 - P(r;r) = 1 - \frac{12}{90} = \frac{78}{90} \approx 86{,}7\ \%$

Lösung P6/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln getrennt nach mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.
Vergleich der beiden sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $P(rot) = \frac{3}{6}$

Mit Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{9}{36}\quad P(r;b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = 50\ \%$$

Ohne Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{30}\quad P(r;b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{30}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{30} + \frac{9}{30} = \frac{18}{30} = 60\ \%$$

Violas Vermutung ist falsch.

Lösung P8/2011

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Keksfüllungen für den ersten Zug.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mit einem Zug ein Sprichwort" ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „unterschiedliche Füllung beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Keksen".

Hinweis: Gleichzeitiges Ziehen von zwei Keksen muss als Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen betrachtet werden.

Klausuraufschrieb

$P(Witz) = \frac{6}{20}$ $\qquad$ $P(Sprichwort) = \frac{12}{20}$ $\qquad$ $P(Gutschein) = \frac{2}{20}$

A: *„Mit einem Zug ein Sprichwort"*

$$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\ \%$$

B: *„Unterschiedliche Füllungen beim gleichzeitigen Ziehen zweier Kekse"*

$$P(B) = \{(W;S),(S;W),(W;G),(G;W),(S;G),(G;S)\}$$
$$P(W;S) = \frac{6}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{72}{380} \qquad P(S;W) = \frac{12}{20}\cdot\frac{6}{19} = \frac{72}{380}$$
$$P(W;G) = \frac{6}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{12}{380} \qquad P(G;W) = \frac{2}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{72}{380}$$
$$P(S;G) = \frac{12}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{24}{380} \qquad P(G;S) = \frac{2}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{24}{380}$$
$$P(B) = 2\cdot\left(\frac{72+12+24}{380}\right) = \frac{108}{190} = \frac{54}{95} \approx 56{,}8\ \%$$

Lösung P4/2012

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die erste Ausfahrt eines Autos pro Plakette.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „beide Autos haben Plaketten mit gleicher Farbe".
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mindestens eines der beiden Autos hat eine grüne Plakette". Hierzu erklären wir die gelben und roten Plaketten zu „nicht grün" und berechnen die Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis.

Klausuraufschrieb

$P(grün) = \frac{51}{85}$ $\quad P(gelb) = \frac{23}{85}$ $\quad P(rot) = \frac{11}{85}$

A: *„beide ausfahrenden Autos haben gleichfarbige Plaketten"*

$P(A) = P\{(gr;gr);(ge;ge);(ro;ro)\}$

$P(gr;gr) = \frac{51}{85} \cdot \frac{50}{84} = \frac{2550}{7140}$ $\quad P(ge;ge) = \frac{23}{85} \cdot \frac{22}{84} = \frac{506}{7140}$ $\quad P(ro;ro) = \frac{11}{85} \cdot \frac{10}{84} = \frac{110}{7140}$

$P(A) = \frac{2550+506+110}{7140} = \frac{3166}{7140} \approx 44{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Autos gleichfarbige Plaketten haben, beträgt $44{,}3\ \%$.

B: „mindestens eines der ausfahrenden Autos hat eine grüne Plakette"

$P(B) = 1 - P(\overline{gr};\overline{gr})$

$P(\overline{gr};\overline{gr}) = \frac{34}{85} \cdot \frac{33}{84} = \frac{1122}{7140}$

$P(B) = 1 - \frac{1122}{7140} = \frac{6018}{7140} = \frac{59}{70} \approx 84{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Autos eine grüne Plakette hat, beträgt $84{,}3\ \%$.

Lösung P7/2013

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Schokowürfeln ist zu behandeln wir Ziehen nacheinander von zwei Schokowürfeln ohne Zurücklegen.
Die möglichen Ereignisse „Zwei unterschiedliche Füllungen" sind:
„Marzipan; Nougat", „Marzipan; Karamell", „Nougat; Marzipan",
„Karamell; Marzipan", Nougat; Karamell" und „Karamell; Nougat".
Wir müssen also sechs Einzelwahrscheinlichkeiten ermitteln und diese dann aufsummieren.
Wesentlich weniger Rechenaufwand entsteht, wenn wir über das Gegenereignis gehen. Das Gegenereignis von „Zwei unterschiedliche Füllungen" ist „Zwei gleiche Füllungen". Diese Einzelwahrscheinlichkeiten sind dann:
„Marzipan; Marzipan", „Nougat; Nougat" und „Karamell; Karamell"
Aus $1 -$ „Zwei gleiche Füllungen" erhalten wir dann das Endergebnis.
Leon hat nicht Recht, Nachweis siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

$P(unterschiedliche) = 1 - P(gleiche)$

$P(gleiche) = P(M;M) + P(N;N) + P(K;K)$

$P(M;M) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132}$ $\quad P(N;N) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132}$ $\quad P(K;K) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{30}{132} + \frac{12}{132} + \frac{2}{132}\right) = 1 - \frac{44}{132} = \frac{88}{132} = \frac{2}{6} = 66{,}7\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen zu ziehen beträgt $66{,}7\ \%$.

Leon hat nicht recht, denn:

$P(M;M) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$ $\quad P(N;N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{30}$

$P(K;K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = 0$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{6}{30} + \frac{2}{30} + 0\right) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} = 73{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen aus der zweiten Schale zu ziehen beträgt $73{,}3\ \%$.

Lösung P8/2014

Lösungslogik

Die Quersumme der Bruchzahlen im ersten Zug muss 1 ergeben, somit für eine 3 im ersten Zug $\frac{22}{50}$. Da ohne Zurücklegen gezogen wird, befinden sich nur noch 49 Kugeln in der Urne, sodass wir es im zweiten Zug mit $\frac{21}{49}$ zu tun haben.

Wurde im ersten Zug eine 1 gezogen, befinden sich noch 10 Kugeln mit einer 1, aber weiterhin 17 Kugeln mit einer 2 und 22 Kugeln mit einer 3 in der Urne.

Wurde im ersten Zug eine 2 gezogen, befinden sich noch 16 Kugeln mit einer 2, aber weiterhin 11 Kugeln mit einer 1 und 22 Kugeln mit einer 3 in der Urne.

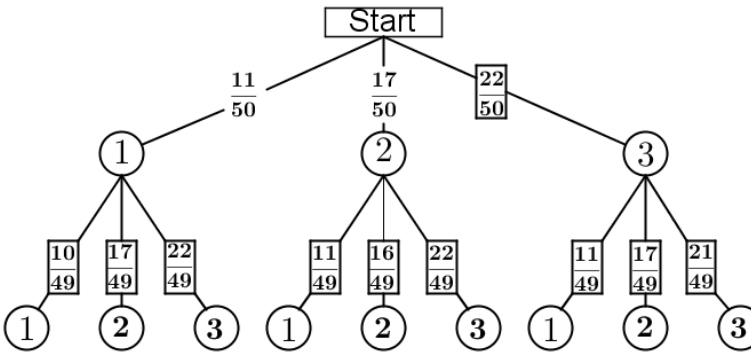
Wurde im ersten Zug eine 3 gezogen, befinden sich noch 21 Kugeln mit einer 3, aber weiterhin 11 Kugeln mit einer 1 und 17 Kugeln mit einer 2 in der Urne.

Hieraus ergeben sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für den zweiten Zug gemäß Grafik.

Die Wahrscheinlichkeit für zwei Kugeln, die mit der gleichen Zahl beschriftet sind, ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(1;1)$, $P(2;2)$ und $P(3;3)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Zahl größer ist als die Zweite, ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(2;1)$, $P(3;1)$ und $P(3;2)$.

Klausuraufschrieb



$P(1;1) = \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} = \frac{110}{2450}$

$P(2;2) = \frac{17}{50} \cdot \frac{16}{49} = \frac{272}{2450}$

$P(3;3) = \frac{22}{50} \cdot \frac{21}{49} = \frac{462}{2450}$

$P\{(1;1),(2;2),(3;3)\} = \frac{110+272+462}{2450} = \frac{844}{2450} \approx 34{,}4\ \%$

$P(2;1) = \frac{17}{50} \cdot \frac{11}{49} = \frac{187}{2450}$

$P(3;1) = \frac{22}{50} \cdot \frac{11}{49} = \frac{242}{2450}$

$P(3;2) = \frac{22}{50} \cdot \frac{17}{49} = \frac{374}{2450}$

$P\{(2;1),(3;1),(3;2)\} = \frac{187+242+374}{2450} = \frac{803}{2450} \approx 32{,}8\ \%$

Lösung P4/2015

Lösungslogik

Ergänzung Baumdiagramm:

Die Summe aller möglichen Wahrscheinlichkeiten ist stets $100\,\%$. Wegen $\frac{3}{10} = 30\,\%$ ist somit die Wahrscheinlichkeit für die grünen Kugeln gleich $50\,\%$, alternativ $\frac{5}{10}$.

Wahrscheinlichkeit für höchstens eine grüne Kugel:

Gleichzeitige Ziehen von 2 Kugeln entspricht Ziehen von 2 Kugeln hintereinander ohne Zurücklegen. Höchstens eine grüne Kugel ist entweder keine grüne Kugel oder eine Grüne Kugel. Das Gegenereignis ist somit 2 grüne Kugeln.

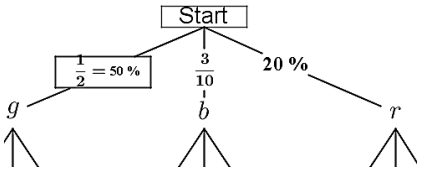
Doppelt so viele Kugeln in einem zweien Behälter:

Uli hat nicht Recht. Die Einzelwahrscheinlichkeiten im ersten Zug bleiben zwar bei $50\,\%$ für grün, $30\,\%$ für blau und $20\,\%$ für rot, jedoch ändert sich die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Zug.

Klausuraufschrieb

$\frac{3}{10} = 30\,\%$

$P(grün) = 100\% - P(blau) - P(grün) = 100\% - 30\% - 20\% = 50\%$



Höchstens eine grüne Kugel:

$$P(höchstens\ 1\ grüne\ Kugel) = 1 - P(zwei\ grüne\ Kugeln) = 1 - \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{29}{38} \approx 76{,}3\,\%$$

Doppelt so viele Kugeln:

Uli hat nicht Recht, denn

$$P(höchstens\ 1\ grüne\ Kugel) = 1 - P(zwei\ grüne\ Kugeln) = 1 - \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} = \frac{59}{78} \approx 75{,}6\,\%$$

Lösung P7/2016

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen ist Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen.
Im Beutel befinden sich insgesamt 10 Kärtchen, 6 mit dem Buchstaben „L", 3 mit dem Buchstaben „T" und eines mit dem Buchstaben „Z".
Wir bestimmen die Einzelereignisse und berechnen deren Wahrscheinlichkeit.

Klausuraufschrieb

$$P(SCHALL) = P(L;L) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} \approx 33{,}3\,\%$$

$$P(SCHATZ) = P\{(T;Z),(Z;T)\} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{90} \approx 6{,}7\,\%$$