Lösung A1

Detaillierter Lösungsweg:

1. Schritt: Wir ermitteln die Wahrscheinlichkeit der verschiedenfarbigen Kugeln. Insgesamt befinden sich Kugeln in dem Zylinder. Hieraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten zu

$P(rot) = \frac{3}{8}$ $\quad P(weiß) = \frac{2}{8}$ $\quad P(blau) = \frac{2}{8}$ $\quad P(grün) = \frac{1}{8}$

Es wird ***mit*** Zurücklegen gezogen, d.h., die Wahrscheinlichkeiten ändern sich im zweiten Zug ***nicht***.

zu a): keine rote Kugel ziehen

2. Schritt: Dies kann auf zwei Möglichkeiten berechnet werden:

1. Lösung:

Wir stellen alle Elementarereignisse auf, die keine rote Kugel haben, dies sind $A = \{wb; wg; bw; gw; bg; gb; ww; bb; gg\}$ und ermitteln zu jedem Elementarereignis dessen Wahrscheinlichkeit.

$P(wb) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$ $\quad P(wg) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{64}$ $\quad P(bw) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$

$P(gw) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{64}$ $\quad P(bg) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{64}$ $\quad P(gb) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{64}$

$P(ww) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$ $\quad P(bb) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{64}$ $\quad P(gg) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

Jetzt addieren wir alle Ergebnisse zusammen, das ergibt $\frac{25}{64} = 0{,}39 = 39\,\%$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $39\,\%$ wird keine rote Kugel gezogen.

2. Lösung:

Wir erklären die weißen, die blauen und die grüne Kugel zu „nicht roten Kugeln". Dann erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten

$P(rot) = \frac{3}{8}$ und $P(\overline{rot}) = \frac{5}{8}$. Daraus ergibt sich:

$P(\overline{rot}; \overline{rot}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} = 0{,}39 = 39\,\%$

Dies ist auf jeden Fall der schnellere Weg.

zu b): eine weiße und eine rote Kugel ziehen

3. Schritt: Da die Reihenfolge mit beliebig angegeben ist, gibt es zwei Elementarereignisse, nämlich $(rot, weiß)$ oder $(weiß, rot)$.

Die Wahrscheinlichkeit ist also:

$P(rw; wr) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8} = 2 \cdot \frac{6}{64} = \frac{12}{64} = 0{,}1875 = 18{,}75\,\%$

zu c): mindestens eine blaue Kugel ziehen

4. Schritt: Achte auf die Aufgabenstellung. Die Aussage „mindestens" bedeutet, dass sowohl eine als auch zwei Kugeln blau sein können. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses über das Gegenereignis. Das Gegenereignis von „mindestens eine Kugel ist blau" lautet „keine Kugel ist blau".

Wir erklären nun die roten, die weißen und die grüne Kugel zu „nicht blaue Kugeln" und stellen das Ereignis auf mit

$P(mindestens\ 1\ blaue\ Kugel) = 1 - P(keine\ blaue\ Kugeln)$

Wegen $P(\overline{blau}) = \frac{6}{8}$ gilt somit:

$P(mindestens\ 1\ blaue\ Kugel) = 1 - P(\overline{bb}) = 1 - \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8}$

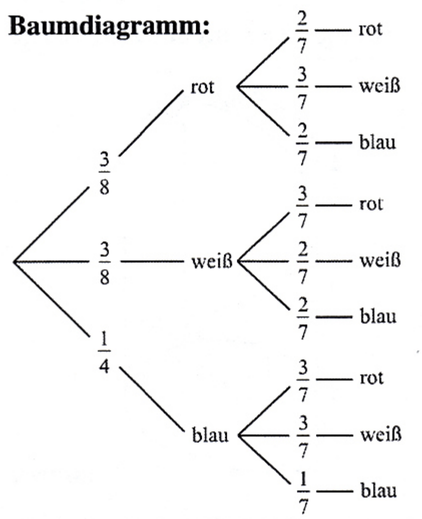
$P(mindestens\ 1\ blaue\ Kugel) = \frac{28}{64} = 0{,}4375 = 43{,}75\,\%$

Lösung A2

Wir ermitteln zuerst die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse und zeichnen danach das Baumdiagramm.

Es befinden sich 8 Kugeln in der Urne, sodass für den ersten Zug gilt:

$P(r) = \frac{3}{8}$ $\quad P(w) = \frac{3}{8}$ $\quad P(b) = \frac{1}{4}$



Jetzt berechnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine der Kugeln rot ist. Hierzu erklären wir die weißen und blauen Kugeln zu „nicht rot", sodass die Wahrscheinlichkeiten wie folgt aussehen:

$P(r) = \frac{3}{8}$ $\quad P(\overline{r}) = \frac{5}{8}$

Die Wahrscheinlichkeit für zweimal "nicht rot" ist dann

$P(\overline{r};\overline{r}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} \approx 35{,}7\ \%$

Das Ereignis „mindestens eine der Kugeln ist weiß oder blau" bedeutet, dass entweder eine oder beide Kugeln weiß oder blau sind. Dies ist dann der Fall, wenn nicht beide Kugeln rot sind. „Beide Kugeln rot" ist somit das Gegenereignis zu „mindestens eine der Kugeln ist weiß oder blau".

$P(mindestens\ \ 1\ Kugel\ \ weiß\ oder\ blau) = 1 - P(r;r) = 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = 1 - \frac{6}{56}$

$P(mindestens\ \ 1\ Kugel\ \ weiß\ oder\ blau) = \frac{50}{56} \approx 89{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{28}$ ist dann gegeben, wenn nach der 1. Pfadregel die Multiplikation zweier nachfolgender Einzelereignisse den Wert $\frac{1}{28}$ ergibt.

$P(b;b) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

Die Ziehung „2 blaue Kugeln" passt zur Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{28}$.

Lösung A3

Wir bestimmen zunächst die Elementarereignisse für „zwei gleichfarbige Kugeln" und berechnen daraus die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.

Mit Zurücklegen:

$P(2\ gleichfarbige\ Kugeln) = P\{(r;r),(w;w),\{g;g\},\{b;b\}\}$

$P(r;r) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$ $\quad P(w;w) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

$P(g;g) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$ $\quad P(b;b) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$

$P\{(r;r),(w;w),(g;g),(b;b)\} = P(r;r) + P(w;w) + P(g;g) + P(b;b)$

$= \frac{9}{49} + \frac{4}{49} + \frac{1}{49} + \frac{1}{49} = \frac{15}{49} \approx 30{,}6\ \%$

Ohne Zurücklegen:

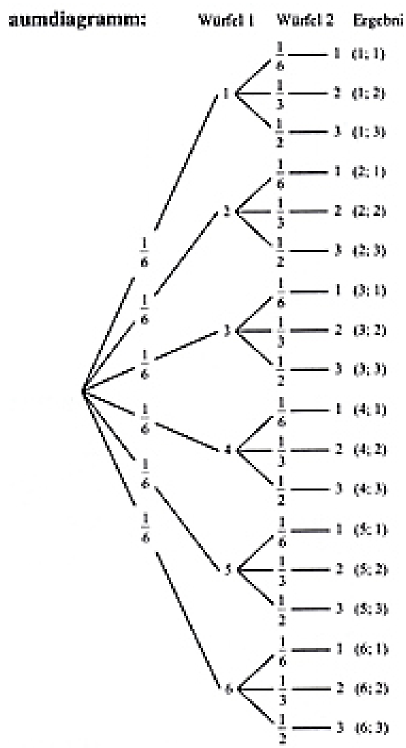
$P(2\ gleichfarbige\ Kugeln) = P\{(r;r),(w;w)\}$

$P(r;r) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$ $\quad P(w;w) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42}$

$P\{(r;r),(w;w)\} = P(r;r) + P(w;w) = \frac{6}{42} + \frac{2}{42} = \frac{8}{42} \approx 19{,}1\ \%$

Lösung A4

Wir zeichnen zunächst das Baumdiagramm mit Angabe der Einzelwahrscheinlichkeiten.
Wir berechnen dann die Wahrscheinlichkeit für „zwei gleiche Zahlen würfeln“ und untersuchen danach die Wahrscheinlichkeiten „rund um die Eins“.



a) $P(2\ gleiche\ Zahlen) = P\{(1;1),(2;2),(3;3)\}$

$P(1;1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\quad P(2;2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{36}$

$P(3;3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{36}$

$P(2\ gleiche\ Zahlen) = P(1;1) + P(2;2) + P(3;3)$

$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$

$P(2\ gleiche\ Zahlen) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$

b) $P(mind.\ eine\ 1) = 1 - P(\overline{1};\overline{1})$

$P(\overline{1};\overline{1}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$P(mind.\ eine\ 1) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 30{,}6\ \%$

$P(genau\ eine\ 1) = P\{(1;\overline{1}),(\overline{1};1)\}$

$P(1;\overline{1}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ $\quad P(\overline{1};1) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$P(genau\ eine\ 1) = P(1;\overline{1}) + (\overline{1};1) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36}$

$P(genau\ eine\ 1) = \frac{10}{36} \approx 27{,}8\ \%$

$P(keine\ 1) = P(\overline{1};\overline{1}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36} \approx 69{,}4\ \%$

$P(zweimal\ eine\ 1) = P(1;1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\ \%$

Lösung A5

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse A, E, I und U und leiten daraus ab.

$P(A) = \frac{3}{9}$ $\quad P(E) = \frac{2}{9}$ $\quad P(I) = \frac{1}{9}$ $\quad P(O) = \frac{2}{9}$ $\quad P(U) = \frac{1}{9}$

a) Berechnung von „zweimal hintereinander der gleiche Vokal“.

$P(zweimal\ Vokal) = P\{(A;A),(E;E),(I;I),(O;O),(U;U)\}$

$P(zweimal\ Vokal) = P(A;A) + P(E;E) + P(I;I) + P(O;O) + P(U;U)$

$P(A;A) = \frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9} = \frac{9}{81}$ $\quad P(E;E) = \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{4}{81}$

$P(I;I) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{81}$ $\quad P(O;O) = \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{4}{81}$

$P(U;U) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{81}$

$P(zweimal\ Vokal) = \frac{9}{81} + \frac{4}{81} + \frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{1}{81} = \frac{19}{81} \approx 23{,}5\ \%$

b) Berechnung der Wahrscheinlichkeit „einmal U und einmal O“.

$P(einmal\ O\ und\ einmal\ U) = P\{(O;U),(U;O)\}$

$P(einmal\ O\ und\ einmal\ U) = P(O;U) + P(U;O)$

$P(O;U) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{81}$ $\quad P(U;O) = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{81}$

$P(einmal\ O\ und\ einmal\ U) = \frac{2}{81} + \frac{2}{81} = \frac{4}{81} \approx 4{,}9\ \%$

c) Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für AU und EI unter Berücksichtigung der Reihenfolge mit Vergleich der Wahrscheinlichkeiten.

$P(A;U)=\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{3}{81}$ $\qquad P(E;I)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{81}$

$P(A;U)>P(E;I)$ um den Faktor $\frac{3}{81}:\frac{2}{81}=1{,}5$

Die Wahrscheinlichkeit, das Wort „$A;U$" zu drehen, ist $1{,}5$–mal höher als die Wahrscheinlichkeit, das Wort „$E;I$" zu drehen.

d) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zweimal nicht A.

Wir erklären die Buchstaben E, I und U zu nicht A. Dann gilt:

$P(\overline{A})=\frac{6}{9}$ und damit $P(\overline{A};\overline{A})=\frac{6}{9}\cdot\frac{6}{9}=\frac{36}{81}\approx 44{,}4\,\%$

Lösung A6

Wir stellen zunächst die Ergebnismenge in einer Tabelle dar. Spaltenmäßig (von oben nach unten) tragen wir den ersten Zug und zeilenmäßig (von rechts nach links) den zweiten Zug in die Tabellenelemente ein. Unter die Elementarereignisse in den Tabellenelementen tragen wir noch die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses ein.

a)

	1	2	3	4	5	6	7
1	$--$	$(1;2)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(1;3)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(1;4)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(1;5)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(1;6)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(1;7)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$
2	$(2;1)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$--$	$(2;3)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(2;4)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(2;5)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(2;6)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(2;7)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$
3	$(3;1)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(3;2)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$--$	$(3;4)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(3;5)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(3;6)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(3;7)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$
4	$(4;1)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(4;2)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(4;3)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$--$	$(4;5)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(4;6)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(4;7)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$
5	$(5;1)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(5;2)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(5;3)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(5;4)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$--$	$(5;6)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(5;7)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$
6	$(6;1)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(6;2)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(6;3)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(6;4)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(6;5)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$--$	$(6;7)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$
7	$(7;1)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(7;2)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(7;3)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(7;4)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(7;5)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$(7;6)$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$	$--$

b) $P(Augensumme\ 8)=P\{(1;7),(2;6),(3;5),(5;3),(2;6),(7;1)\}$

Jedes der Elementarereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $p=\frac{1}{42}$. Somit:

$P(Augensumme\ 8)=6\cdot\frac{1}{42}=\frac{6}{42}\approx 14{,}3\,\%$

c) $P(Augensumme\ höchstens\ 4)=P\{(1;2),(1;3),(2;1),(3;1)\}$

Jedes der Elementarereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $p=\frac{1}{42}$. Somit:

$P(Augensumme\ höchstens\ 4)=4\cdot\frac{1}{42}=\frac{4}{42}\approx 9{,}5\,\%$

d) $P(erst<4, dann>4)=P\{(1;5),(1;6),(1;7),(2;5),(2;6),(2;7),(3;5),(3;6),(3;7)\}$

Jedes der Elementarereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $p=\frac{1}{42}$. Somit:

$P(erst<4, dann>4)=9\cdot\frac{1}{42}=\frac{9}{42}\approx 21{,}4\,\%$

e) Zu den unter d) aufgeführten Elementarereignissen kommen noch die umgekehrten Reihenfolgen hinzu, sodass sich die Wahrscheinlichkeit gegenüber d) verdoppelt.

$P(erst < 4, dann > 4 \; oder \; erst > 4, dann < 4) = 2 \cdot P(erst < 4, dann > 4)$

$P(erst < 4, dann > 4 \; oder \; erst > 4, dann < 4) = 2 \cdot \frac{9}{42} = \frac{18}{42} \approx 42{,}9\ \%$

Lösung A7

Dies ist eine „Erwartungswert“-Aufgabe. Zur Ermittlung eines Erwartungswertes erstellen wir sofort eine 3-zeilige Tabelle. Die Tabelle hat so viele Spalten, wie es Gewinne gibt. Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne ungleich $100\ \%$, muss eine weitere Spalte für den Einsatz angehängt werden.
In die erste Zeile schreiben wir die einzelnen Gewinnbeträge. Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne ungleich $100\ \%$, muss der Einsatz vom Gewinnbetrag abgezogen werden und der Einsatz wird mit einem Minuszeichen in die Tabelle eingetragen.
In die zweite Zeile schreiben wir unter jeden Gewinn-, Einsatzbetrag dessen Einzelwahrscheinlichkeit.
In der dritten Zeile multiplizieren wir spaltengerecht den Gewinn-, Einsatzbetrag mit seiner Wahrscheinlichkeit.
Am Ende addieren wir alle Werte der dritten Zeile vorzeichengerecht. Das daraus sich ergebende Ergebnis ist der gesuchte Erwartungswert.
Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten zu den Gewinnen:

$P(zweimal\ Elefant) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

$P(zweimal\ Löwe) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$

$P(zweimal\ Strauß) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

$P(kein\ Gewinn) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{4}{64} - \frac{1}{64} = \frac{58}{64}$

a) Berechnung der Erwartungswerte
Tabelle für Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche:

Gewinn/Einsatz (X_i)	$4{,}50$ €	$2{,}50$ €	$1{,}00$ €	$-0{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{58}{64}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}07$ €	$0{,}16$ €	$0{,}02$ €	$-0{,}45$ €
EX	$0{,}07\text{ €} + 0{,}16 + 0{,}02 - 0{,}45\text{ €} = -0{,}20\text{ €}$			

$EX_{Jugend} = -0{,}20$ €

Tabelle für Erwachsene:

Gewinn/Einsatz (X_i)	$4{,}00$ €	$2{,}00$ €	$0{,}50$ €	$-1{,}00$ €
$p(X_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{58}{64}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0{,}06$ €	$0{,}13$ €	$0{,}01$ €	$-0{,}90$ €
EX	$0{,}06\text{ €} + 0{,}13 + 0{,}01 - 0{,}90\text{ €} = -0{,}70\text{ €}$			

$EX_{Erwachsene} - 0{,}70$ €

Die SMV kann mit einem Gewinn von $0{,}20$ € pro Spiel bei den Jugendlichen und von $0{,}70$ € pro Spiel bei den Erwachsenen rechnen.

b) Abweichung zwischen Erwartungswert und Gesamtgewinn:

$372 \cdot 0{,}20\ € + 214 \cdot 0{,}70\ € = 224{,}20\ €$ Gewinn nach Erwartungswert

$G_{E(X)} - G_{gesamt} = 224{,}20 - 217{,}50 = 6{,}70\ €$

Die Abweichung des tatsächlichen Gewinns zum Erwartungswert beträgt $6{,}70\ €$.

Der mit den Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelte Gesamtgewinn $224{,}20\ €$ ist ein theoretischer Wert. Im konkreten Fall kann er nicht erreicht werden, da der Gesamtgewinn aufgrund der Einsätze und Preise ein Vielfaches von $0{,}50\ €$ sein muss.