

Aufgabe W4a/2015

In einem Kartenstapel liegen zwölf Karten. Die Verteilung ist in der Tabelle dargestellt. Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Zwei Karten werden gleichzeitig gezogen.

		Kartenfarbe	
		schwarz	rot
♣	♠	♥	♦
Kreuz	Pik	Herz	Karo
		Anzahl	
6	1	3	2



- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten?

Lösung: $P(\text{rot und schwarz}) = 53,03\%$

Die zwölf Karten werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Es sollen ebenfalls zwei Karten gleichzeitig gezogen werden. Dazu wird der nebenstehende Gewinnplan geprüft.

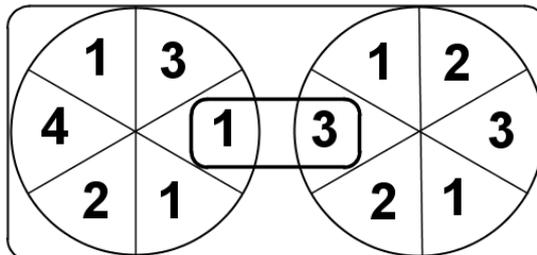
Ergebnisse	Gewinn
Zweimal Karo	10,00 €
Zweimal Herz	5,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

- Berechnen Sie den Erwartungswert.
- Sophie macht den Vorschlag, den Gewinn für „zweimal Karo“ auf 20,00 € hochzusetzen und alles andere zu belassen. Der Betreiber des Glücksspiels protestiert und behauptet, er würde dann Verlust machen. Hat der Betreiber Recht? Begründen Sie durch Rechnung.

Lösung: $E(X)_1 = 0,62 \text{ €}; E(X)_2 = 0,47 \text{ €};$ der Spielebetreiber hat nicht Recht.

Aufgabe W4a/2016

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung werden zwei Glücksräder eingesetzt. Beide Glücksräder werden gedreht. Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster eine zweistellige Zahl. Die Abbildung zeigt die Zahl 13. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen?



Die Glücksräder werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft. Berechnen Sie den Erwartungswert.

Gewinnplan	
Ergebnisse	Gewinn
Zwei gleiche Ziffern	3,00 €
Zahl größer als 40	5,00 €
Restliche Möglichkeiten	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 2,00 €	

Bei der Wohltätigkeitsveranstaltung soll ein höherer Erlös erzielt werden. Dazu soll beim rechten Glücksrad einer der beiden Dreien durch eine fünf ersetzt werden. Der Gewinnplan bleibt gleich.

Wäre dies vorteilhaft? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder durch eine Argumentation.

Lösung: $P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = \frac{5}{18}$

$E(X) = -0,33 \text{ €}$ (aus der Sicht des Spielers)

Die Veränderung ist vorteilhaft.

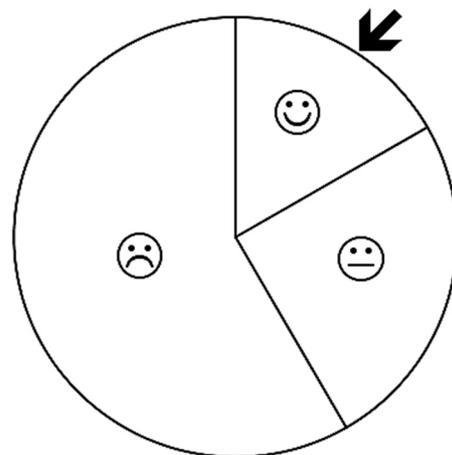
RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Aufgabe W4a/2017

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung wird ein Glücksrad eingesetzt. Die Mittelpunkts-Winkel betragen 60° , 90° und 210° . Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man höchstens einmal das Symbol



Powered by GEOGEBRA.org

Das Glücksrad wird für ein Glücksspiel verwendet. Berechnen Sie den Erwartungswert unter Berücksichtigung des nebenstehenden Gewinnplans.

Der Gewinnplan soll so verändert werden, dass das Spiel fair wird.

Gewinnplan	
Ereignisse	Gewinn
zweimal 😊	4,00 €
zweimal 😐	2,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 0,50 €	

Wie hoch muss der Gewinn für das Ereignis "zweimal 😊" sein, wenn alles andere unverändert bleibt?

$$\text{Lösung: } P(\text{höchstens einmal 😊}) = \frac{35}{36} \approx 97,2\%$$

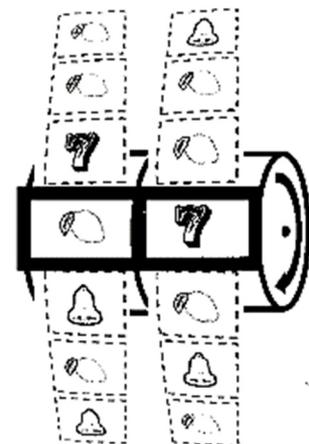
$$E(X) = -0,26 \text{ € (aus der Sicht des Spielers)}$$

Gewinn für zweimal 😊, damit das Spiel fair ist: 13,50 €

Aufgabe W4a/2018

Im Technikunterricht wurde für ein Schulfest ein Zufallsgerät gebaut, bei dem sich zwei Walzen unabhängig voneinander drehen. Die Walzen sind mit Symbolen beklebt. Auf jeder Walze sind vier Zitronen, zwei Glocken und eine Sieben abgebildet. Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster zwei Symbole nebeneinander.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "zweimal Glocke"?



RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Das Zufallsgerät wird für ein Glücksspiel eingesetzt.
Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.
Berechnen Sie den Erwartungswert.
Was bedeutet dies für den Spieler?

Ereignis	Gewinn
Zweimal Glocke	4,00 €
Zweimal Sieben	10,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel : 1,00 €	

Der Einsatz soll auf 1,20 € erhöht werden.
Der Gewinn für "zweimal Glocke" sowie der Erwartungswert bleiben gleich.

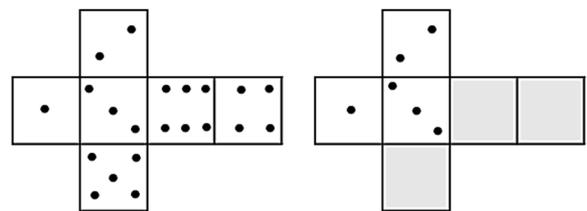
Merle behauptet: "Der Gewinn für "zweimal Sieben" beträgt dann etwa 20 €."
Hat Merle Recht? Begründen Sie rechnerisch.

Aufgabe W4a/2019

Beim Würfelspiel „Augensumme 4 gewinnt“ wird gleichzeitig mit zwei Spielwürfeln geworfen. Die Augenzahlen werden addiert (Augensumme). Dieses Spiel soll als Glücksspiel eingesetzt werden. Berechnen Sie den Erwartungswert.

Ereignisse	Gewinn
„Augensumme gleich 4“	4,00 €
„Augensumme kleiner 4“	2,00 €
„Augensumme größer 4“	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

Der Betreiber bekommt die Vorgabe, das Glücksspiel zu verändern. Er soll auf einem der beiden Spielwürfel die Vier, die Fünf und die Sechs entweder durch drei Einsen oder durch drei Dreien ersetzen.



Powered by GEOGEBRA.org

Wofür soll sich der Betreiber entscheiden?
Begründen Sie Ihre Entscheidung durch Rechnung oder Argumentation.

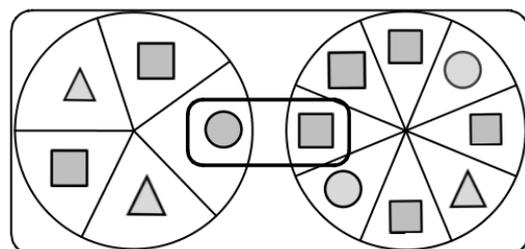
Lösungen: $E(X) = -0,50 \text{ €}$
 $E(X_{3 \text{ Einsen}}) = 0,17 \text{ €}$
 $E(X_{3 \text{ Dreien}}) = -0,17 \text{ €}$

Der Betreiber sollte sich dafür entscheiden, die Vier, Fünf und Sechs durch Dreien zu ersetzen.

Aufgabe W4a/2020

Die beiden Glücksräder werden gedreht. Nachdem sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster eine Kombination zweier Symbole.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleiche Symbole im Sichtfenster zu sehen?



Powered by GEOGEBRA.org

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil

zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

- Die Glücksräder werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird der ab gebildete Gewinnplan geprüft. Berechnen Sie den Erwartungswert.

Gewinnplan	
Ereignis	Gewinn
Gleiche Symbole	2,00 €
Kreis und Dreieck	4,00 €
Restliche Möglichkeiten	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,50 €	

- Der Gewinnplan soll so verändert werden, dass das Spiel fair wird. Wie hoch muss dann der Gewinn für das Ereignis „Kreis und Dreieck“ sein, wenn alles andere unverändert bleibt?

Lösung: $P(\text{zwei gleiche Symbole}) = 35\%$

$E(X) = -0,30 \text{ €}$ (aus der Sicht des Spielers)

Neuer Gewinn für „Kreis und Dreieck“: $X = 6,40 \text{ €}$.

Lösung W4a/2015

Lösungslogik

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für die schwarzen und die roten Karten.
Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen.

Eine rote und eine schwarze Karte hat die Ergebnisse „schwarz, rot“ oder „rot, schwarz“.

Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.

Berechnung des Erwartungswertes für geänderten Gewinnplan über eine Tabelle.

Klausuraufschrieb

$$P(\text{schwarz}) = \frac{7}{12}; \quad P(\text{rot}) = \frac{5}{12}$$

$$P(\text{eine rote und eine schwarze Karte}) = P\{(r; s), (s, r)\} = P(r, s) + P(s, r)$$

$$P(r, s) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132} \qquad P(s, r) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

$$P(\text{eine rote und eine schwarze Karte}) = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} \approx 53,03 \%$$

Erwartungswerte:

$$P(\text{zweimal Herz}) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{132}$$

$$P(\text{zweimal Karo}) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$$

Gewinnplan 1

	<i>P(zweimal Karo)</i>	<i>P(zweimal Herz)</i>	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	-9,00 €	-4,00 €	1,00 €
$p(X_i)$	$\frac{2}{132}$	$\frac{6}{132}$	$\frac{124}{132}$
$X_i \cdot p(X_i)$	-0,14 €	-0,18 €	0,94 €
EX	-0,14 € - 0,18 € + 0,94 € = 0,62 €		

Der Spielbetreiber kann auf lange Sicht gesehen mit einer Einnahme von 0,47 € pro Spiel rechnen.

Gewinnplan 2

	<i>P(zweimal Karo)</i>	<i>P(zweimal Herz)</i>	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	-19,00 €	-4,00 €	1,00 €
$p(X_i)$	$\frac{2}{132}$	$\frac{6}{132}$	$\frac{124}{132}$
$X_i \cdot p(X_i)$	-0,29 €	-0,18 €	0,94 €
EX	-0,29 € - 0,18 € + 0,94 € = 0,47 €		

Der Spielbetreiber kann nach wie vor mit einer Einnahme pro Spiel rechnen, der Spielbetreiber hat nicht Recht.

Lösung W4a/2016

Lösungslogik

Zahl mit zwei gleichen Ziffern:

An Hand der Abbildung legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Zahlen 1 bis 4 pro Glücksrad fest, stellen den Ergebnisraum auf und berechnen die Wahrscheinlichkeit.

Erwartungswert:

Wir müssen zunächst noch die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 40 bestimmen. Für den Gewinn „Zwei gleiche Ziffern“ haben wir die Wahrscheinlichkeit ja schon zuvor ermittelt.

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Veränderung Glücksrad 2:

Durch eine Argumentation:

Siehe Klausuraufschrieb

Durch Rechnung:

Wir bestimmen die neuen Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn von 3,00 € und von 5,00 € und stellen eine neue Tabelle auf.

Klausuraufschrieb

Zahl mit zwei gleichen Ziffern:

Linkes Glücksrad: $P(1) = \frac{3}{6}$; $P(2) = \frac{1}{6}$; $P(3) = \frac{1}{6}$; $P(4) = \frac{1}{6}$

Rechtes Glücksrad: $P(1) = \frac{2}{6}$; $P(2) = \frac{2}{6}$; $P(3) = \frac{2}{6}$

$$P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = P\{(1;1), (2;2), (3;3)\} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6+2+2}{36} = \frac{10}{36}$$

Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu sehen, beträgt $\frac{5}{18}$.

Erwartungswert:

$$P(\text{Zahl größer 40}) = P\{(4;1), (4;2), (4;3)\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36}$$

	P(zwei gleiche Ziffer)	P(Zahl größer 40)	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	1,00 €	3,00 €	-2,00 €
$p(X_i)$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{20}{36}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,28 €	0,50 €	-1,11 €
$E(X)$	0,28 € + 0,50 € - 1,11 € = -0,33 €		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist -0,33 €.

Veränderung Glücksrad 2:

Argumentation:

Wird beim Glücksrad 2 eine 3 durch eine 5 ersetzt, verringert sich die Wahrscheinlichkeit für die Anzeige von (3;3) von $\frac{2}{36}$ auf $\frac{1}{36}$, damit sinkt der Auszahlungsbetrag für den Gewinn 3,00 €. Auf der anderen Seite verändert sich die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 40 nicht, da die Verringerung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl 43 durch die Erhöhung der Wahrscheinlichkeit für die Zahl 45 voll ausgeglichen wird. Es sinkt also lediglich die Auszahlung für den Gewinn von 3,00 €. Dies wäre im Sinne eines höheren Erlöses vorteilhaft.

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Lösungen

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Rechnung:

$$P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = P\{(1; 1), (2; 2), (3; 3)\} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{36}$$

$$P(\text{Zahl größer 40}) = P\{(4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 5)\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$$

	$P(\text{zwei gleiche Ziffer})$	$P(\text{Zahl größer 40})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	1,00 €	3,00 €	-2,00 €
$p(X_i)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{21}{36}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,25 €	0,50 €	-1,17 €
$E(X)$	0,25 € + 0,50 € - 1,17 € = -0,42 €		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist jetzt -0,42 €.

Die Veränderung von Glücksrad 2 wäre vorteilhaft.

Lösung W4a/2017

Lösungslogik

Höchstens einmal 😊:

An Hand der gegebenen Mittelpunkt-Winkel legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Symbole 😊, 😐, sowie ☹ fest. Berechnung der Wahrscheinlichkeit für „höchstens einmal 😊“, über das Gegenereignis „zweimal 😊“.

Erwartungswert

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Faires Spiel:

Der Erwartungswert $E(X)$ muss Null sein.

Für den zu ändernden Gewinn für „zweimal 😊“, schreiben wir die Variable a .

Klausuraufschrieb

Höchstens einmal 😊:

$$P(\text{😊}) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}; \quad P(\text{😐}) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}; \quad P(\text{☹}) = \frac{210}{360} = \frac{7}{12}$$

Das Gegenereignis von „höchstens einmal 😊“, lautet „zweimal 😊“.

$$P(\text{höchstens einmal 😊}) = 1 - P(\text{zweimal 😊}) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{36} \approx 97,2 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit für „höchstens einmal 😊“, beträgt etwa 97,2 %.

Erwartungswert:

	$P(\text{zweimal 😊})$	$P(\text{zweimal 😐})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	3,50 €	1,50 €	-0,50 €
$p(X_i)$	$\frac{4}{144}$	$\frac{9}{144}$	$\frac{131}{144}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,0972 €	0,09375 €	-0,4549 €
$E(X)$	0,0972 € + 0,09375 € - 0,4549 € = -0,26335 €		

Der Erwartungswert beträgt -0,26 € (aus der Sicht des Spielers).

Faires Spiel:

	$P(\text{zweimal } \text{☺})$	$P(\text{zweimal } \text{☹})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$a - 0,50 \text{ €}$	1,50 €	-0,50 €
$p(X_i)$	$\frac{4}{144}$	$\frac{9}{144}$	$\frac{131}{144}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{4}{144}a - 0,0139\text{€}$	0,09375 €	-0,4549 €
$E(X)$	$0,0278a - 0,0139 \text{ €} + 0,09375 \text{ €} - 0,4549 \text{ €}$ $= 0,0278a - 0,37505 \text{ €}$		

Ein Spiel ist fair, wenn $E(X) = 0$ ist, also:

$$0,0278a - 0,37505 \text{ €} = 0 \quad | \quad +0,37505 \text{ €}$$

$$0,0278a = 0,37505 \text{ €} \quad | \quad :0,0278$$

$$a = 13,491007 \text{ €}$$

Der Gewinn für „zweimal ☺“, muss 13,50 € betragen, damit das Spiel fair ist.

Lösung W4a/2018

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit für zweimal Glocke:

An Hand der gegebenen Anzahl Symbole auf den Rädern bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit für das Symbol Glocke und berechnen diese über die erste Pfadregel.

Erwartungswert:

Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Merles Behauptung:

Mit einem unveränderten Erwartungswert $E(X)$ und dem neuen Einsatz berechnen wir die Auszahlung für zweimal 7 neu.

Klausuraufschrieb

Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(\text{Zitrone}) = \frac{4}{7}; \quad P(\text{Glocke}) = \frac{2}{7}; \quad P(\text{Sieben}) = \frac{1}{7}$$

Wahrscheinlichkeit für zweimal Glocken:

$$P(\text{Glocke; Glocke}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 8,16 \%$$

Erwartungswert:

	$P(\text{zweimal Glocke})$	$P(\text{zweimal } 7)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	3,00 €	9,00 €	-1,00 €
$p(X_i)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{44}{49}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,2449€	0,1837 €	-0,8980 €
$E(X)$	$0,2449 \text{ €} + 0,1837 \text{ €} - 0,8980 \text{ €} = -0,4694 \text{ €}$		

Der Erwartungswert beträgt -0,47 € (aus der Sicht des Spielers).

Der Spieler verliert auf lange Sicht 0,47 € / Spiel

Merles Behauptung:

Neuer Einsatz ist 1,20 €; $E(X) = -0,47$ €; Gewinn zweimal Glocke ist 4,00 €;
Gewinn zweimal 7 ist $a + 1,20$ €.

	$P(\text{zweimal Glocke})$	$P(\text{zweimal } 7)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	2,80 €	$a - 1,20$ €	-1,20 €
$p(X_i)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{44}{49}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,2286 €	$0,0204(a - 1,20)$ €	-1,0776 €
$E(X)$	$0,2286 \text{ €} + 0,0204 \cdot a \text{ €} - 0,0245 \text{ €} - 1,0776 \text{ €} = -0,47 \text{ €}$		

$$\begin{aligned}
 0,2286 \text{ €} + 0,0204 \cdot a \text{ €} - 0,0245 \text{ €} - 1,0776 \text{ €} &= -0,47 \text{ €} \\
 -0,8735 \text{ €} + 0,0204 \cdot a \text{ €} &= -0,47 \text{ €} & | & +0,8735 \text{ €} \\
 0,0204 \cdot a \text{ €} &= 0,4035 \text{ €} & | & :0,0204 \\
 a &\approx 19,80 \text{ €}
 \end{aligned}$$

Merle hat Recht, der Gewinn für zweimal 7 ist etwa 20 € (19,80 €).

Lösung W4a/2019

Lösungslogik

Die nachfolgende Tabelle verdeutlicht die Situation: In den 6x6-Quadraten steht die jeweilige Augensumme.

1. W ü r f e l							
2. Würfel/Wurf		1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2		3	4	5	6	7	8
3		4	5	6	7	8	9
4		5	6	7	8	9	10
5		6	7	8	9	10	11
6		7	8	9	10	11	12

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Lösungen

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Ereignis „Augensumme = 4“:

Wie wir sehen, steht die 4 in drei der 36 6x6-Quadrate (blau hinterlegt). Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. Somit ist:

$$P(\text{Augensumme} = "4") = \frac{3}{36}.$$

Ereignis „Augensumme kleiner 4“:

Wie wir sehen, steht eine Zahl kleiner 4 in drei der 36 6x6-Quadrate (Orange hinterlegt). Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Somit ist:

$$P(\text{Augensumme kleiner "4"}) = \frac{3}{36}.$$

Ereignis „Augensumme größer 4“:

Dies sind alle anderen Ereignisse der 36 6x6-Quadrate (weiß hinterlegt), also insgesamt 30 Quadrate. Jedes dieser Quadrate hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Somit ist:

$$P(\text{Augensumme größer "4"}) = \frac{30}{36}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind ermittelt, der Erwartungswert kann berechnet werden.

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Einsen.

	1	2	3
1. Würfel/Wurf	1	2	3
2	2	3	4
3	3	4	5
4	4	5	6

1. Würfel							
2. Würfel/Wurf		1	2	3	1	1	1
1		2	3	4	2	2	2
2		3	4	5	3	3	3
3		4	5	6	4	4	4
4		5	6	7	5	5	5
5		6	7	8	6	6	6
6		7	8	9	7	7	7

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Lösungen

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Aus der zuvor stehenden Grafik erkennen wir, dass die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme kleiner 4“ nun 9 der 36 Quadrate belegt. Die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme gleich 4“ belegt 6 der 36 Quadrate, damit belegt die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme größer 4“ 21 der 36 Quadrate.

$$P_{3 \text{ Einsen}}(\text{Augensumme} = "4") = \frac{6}{36}$$

$$P_{3 \text{ Einsen}}(\text{Augensumme kleiner "4"}) = \frac{9}{36}$$

$$P_{3 \text{ Einsen}}(\text{Augensumme größer "4"}) = \frac{21}{36}$$

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Dreien.

1. Würfel	2. Würfel/Wurf						
	1	2	3	3	3	3	
1	2	3	4	4	4	4	
2	3	4	5	5	5	5	
3	4	5	6	6	6	6	
4	5	6	7	7	7	7	
5	6	7	8	8	8	8	
6	7	8	9	9	9	9	

$$P_{3 \text{ Dreien}}(\text{Augensumme} = "4") = \frac{6}{36}$$

$$P_{3 \text{ Dreien}}(\text{Augensumme kleiner "4"}) = \frac{3}{36}$$

$$P_{3 \text{ Dreien}}(\text{Augensumme größer "4"}) = \frac{27}{36}$$

Entscheidung des Spielbetreibers über eine Argumentation bzw. Rechnung siehe Klausuraufschrieb.

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Lösungen

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Klausuraufschrieb

$$P(\text{Augensumme} = "4") = \frac{3}{36}; P(\text{Augensumme kleiner "4"}) = \frac{3}{36};$$

$$P(\text{Augensumme größer "4"}) = \frac{30}{36}.$$

Erwartungswert:

	$P(\text{gleich } 4)$	$P(\text{kleiner } 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	3,00 €	1,00 €	-1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,25€	0,08 €	-0,83 €
$E(X)$	0,25 € + 0,08 € - 0,83 € = -0,50 €		

Der Erwartungswert beträgt -0,50 € (aus der Sicht des Spielers).

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Einsen.

$$P_{3 \text{ Einsen}}(\text{Augensumme} = "4") = \frac{6}{36}; P_{3 \text{ Einsen}}(\text{Augensumme kleiner "4"}) = \frac{9}{36}$$

$$P_{3 \text{ Einsen}}(\text{Augensumme größer "4"}) = \frac{21}{36}$$

Änderung des zweiten Würfels, die Vier, Fünf und Sechs durch drei Dreien.

$$P_{3 \text{ Dreien}}(\text{Augensumme} = "4") = \frac{6}{36}; P_{3 \text{ Dreien}}(\text{Augensumme kleiner "4"}) = \frac{3}{36}$$

$$P_{3 \text{ Dreien}}(\text{Augensumme größer "4"}) = \frac{27}{36}$$

Entscheidung des Spielebetreibers durch eine Argumentation:

Bei Änderung des Würfels auf drei Einsen bzw. drei Dreien bleibt die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme gleich 4“ dieselbe, lediglich die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme kleiner 4“ ist bei drei Einsen wesentlich höher als bei drei Dreien. Das bedeutet, dass der Betreiber bei Änderung durch drei Einsen mehr Gewinne auszahlen muss als bei Änderung durch drei Dreien. Er sollte sich somit für eine Änderung auf drei Dreien entscheiden.

Entscheidung des Spielebetreibers durch Rechnung:

Erwartungswert für drei Einsen:

	$P(\text{gleich } 4)$	$P(\text{kleiner } 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	3,00 €	1,00 €	-1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{21}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,50€	0,25 €	-0,58 €
$E(X)$	0,50 € + 0,25 € - 0,58 € = 0,17 €		

Der Erwartungswert beträgt +0,17 € (aus der Sicht des Spielers).

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Lösungen

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Erwartungswert für drei Dreien:

	$P(\text{gleich } 4)$	$P(\text{kleiner } 4)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	3,00 €	1,00 €	-1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{27}{36}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,50 €	0,08 €	-0,75 €
$E(X)$	0,50 € + 0,08 € - 0,75 € = -0,17 €		

Der Erwartungswert beträgt -0,17 € (aus der Sicht des Spielers).

Da der Spielebetreiber bei Änderung auf drei Einsen einen Verlust von 0,17 € / Spiel erleidet, sollte er sich für eine Änderung auf drei Dreien entscheiden.

Lösung W4a/2020

Lösungslogik

Gleiche Symbole:

An Hand der Abbildung legen wir die Wahrscheinlichkeiten der Symbole pro Glücksrad fest, stellen den Ergebnisraum auf und berechnen die Wahrscheinlichkeit.

Erwartungswert:

Wir müssen zunächst noch die Wahrscheinlichkeit für die Symbolkombination „Kreis und Dreieck“ bestimmen. Für den Gewinn „Zwei gleiche Symbole“ haben wir die Wahrscheinlichkeit ja schon zuvor ermittelt. Wir stellen eine Tabelle auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass von den Auszahlungen (Gewinne) die Einzahlungen (Einsatz) abzuziehen sind.

Veränderung Gewinn für Symbolkombination „Kreis und Dreieck“ für faires Spiel:

Wir setzen den Auszahlungsbetrag für „Kreis und Dreieck“ auf a sowie den Erwartungswert auf 0 und lösen die entstehende Gleichung nach a auf. Die sich ergebende Auszahlung muss dann noch um 1,50 € (Einsatz) erhöht werden.

Klausuraufschrieb

Gleiche Symbole:

Linkes Glücksrad: $P(\text{Dreieck}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{Quadrat}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{Kreis}) = \frac{1}{5}$

Rechtes Glücksrad: $P(\text{Dreieck}) = \frac{1}{8}$; $P(\text{Quadrat}) = \frac{5}{8}$; $P(\text{Kreis}) = \frac{2}{8}$

$P(\text{zwei gleiche Symbole}) = P\{(\text{Dreieck}; \text{Dreieck}), (\text{Quadrat}; \text{Quadrat}), (\text{Kreis}; \text{Kreis})\}$
 $= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2+10+2}{40} = \frac{14}{40} = 35\%$

Die Wahrscheinlichkeit, im Sichtfenster zwei gleiche Symbole zu sehen, beträgt 35 %.

Erwartungswert:

$P(\text{Kreis und Dreieck}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{40}$

	$P(\text{zwei gleiche Symbole})$	$P(\text{Kreis Dreieck})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	0,50 €	2,50 €	-1,50 €
$p(X_i)$	$\frac{14}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{21}{40}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,175 €	0,3125 €	-0,7875 €
$E(X)$	0,175 € + 0,3125 € - 0,7875 € = -0,30 €		

Der Erwartungswert (aus der Sicht des Spielers) ist -0,30 €.

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Lösungen

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) ab 2015

Veränderung Gewinn für Symbolkombination „Kreis und Dreieck“ für faires Spiel:

	$P(\text{zwei gleiche Ziffer})$	$P(\text{Kreis Dreieck})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	0,50 €	a €	-1,50 €
$p(X_i)$	$\frac{14}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{21}{40}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,175 €	0,125a €	-0,7875 €
$E(X)$	$0,175 \text{ €} + 0,125a \text{ €} - 0,7875 \text{ €} = 0,125a \text{ €} - 0,6125$		

$$0,125a \text{ €} - 0,6125 \text{ €} = 0 \quad | \quad +0,6125 \text{ €}; : 0,125$$

$$a = 4,90$$

Die Auszahlung für „Kreis und Dreieck“ muss 4,90 € betragen, somit muss der Gewinn $4,90 \text{ €} + 1,50 \text{ €} = 6,40 \text{ €}$ sein.

Die Gewinn für die Symbole „Kreis und Dreieck“ muss 6,40 € betragen, damit das Spiel fair ist.