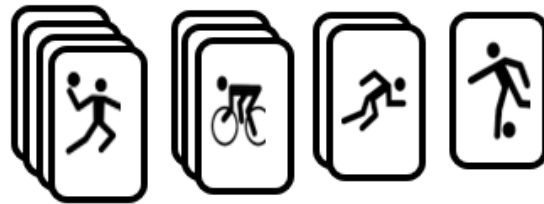


RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil B) ab 2021
3 Aufgaben im Dokument

Aufgabe B3a/2021

Zehn gleich große Karten sind mit vier verschiedenen Symbolen (Handball, Radfahren, Laufen, Fußball) bedruckt. Sie sind nach den Symbolen in vier Stapeln sortiert (siehe Abbildung).



Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Sie werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dabei werden zwei Karten gleichzeitig gezogen. Für das Spiel wird der abgebildete Gewinnplan geprüft.

| Ereignis | Gewinn |
|--------------------------|-------------|
| Zweimal | 9,00 € |
| und | 6,00 € |
| und | 3,00 € |
| Andere Ereignisse | Kein Gewinn |
| Einsatz pro Spiel 1,00 € | |

- Berechnen Sie den Erwartungswert.

Der Veranstalter möchte langfristig pro Spiel einen Erlös von 0,50 € erzielen.

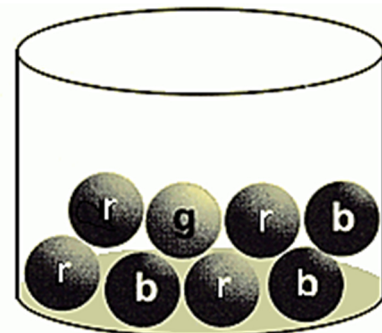
- Wie hoch muss der Gewinn für und sein, wenn alles andere unverändert bleibt.

Lösungen: $E(X) = -0,33 \text{ €}$

Gewinn für einmal Läufer und einmal Fußball: 2,25 €

Aufgabe B3a/2022

In einem Gefäß liegen acht Kugeln, die rot, blau und gelb gefärbt sind. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen.

Die Kugeln werden für ein Gewinnspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.

- Berechnen Sie den Erwartungswert.
- Der Veranstalter des Gewinnspiels möchte seinen Gewinn pro Spiel auf lange Sicht gesehen verdoppeln.
- Wie hoch müsste dann der Gewinn für „eine gelbe und eine blaue Kugel“ sein, wenn alles andere unverändert bleibt?

| Ereignis | Gewinn |
|---------------------------------|---------|
| zwei gleichfarbige Kugeln | 4,00 € |
| eine gelbe und eine blaue Kugel | 10,00 € |
| Einsatz: 2,50 € pro Spiel | |

Lösungen:

$$P(\text{zwei gleichfarbene Kugeln}) = 0,321$$

$$E(X) = -0,14 \text{ €}$$

Gewinnänderung auf 8,72 €

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

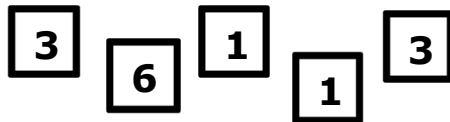
Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil B) ab 2021

Aufgabe B3a/2023

Die Klasse 10a verkauft Rubellose.

Auf jedem Los befinden sich zwei Streifen.

Jeder Streifen enthält die folgenden Ziffern:



Die Ziffern sind in zufälliger Reihenfolge angeordnet.

Der linke Streifen zeigt die Zehnerziffern, der rechte die Einerziffern. Auf jedem Streifen wird genau ein Feld freigerubbelt, wodurch eine zweistellige Zahl entsteht.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Zahl 61.

Rubbellos

| Zehner-ziffer | Einer-ziffer |
|----------------------|----------------------|
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | <input type="text"/> |

Powered by GEOGEBRA.org

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu erhalten, die größer als 60 ist?

Die Rubbellose werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.

| Ereignis | Gewinn |
|-------------------------|-------------|
| Zahl größer als 60 | 3,00 € |
| Zahl 33 | 6,00 € |
| Restliche Möglichkeiten | Kein Gewinn |

- Berechne den Erwartungswert.

Einsatz: 2,00 €

Die Klasse 10a überlegt, auf jedem Streifen der Lose eine **3** durch eine **6** zu ersetzen.

- Erhöht sich dadurch der Gewinn für die Klasse? Begründe deine Entscheidung durch Rechnung.

$$\text{Lösung: } P(> 60) = \frac{1}{5} = 20 \%$$

$$E(X) = -0,44 \text{ €}$$

Der Gewinn erhöht sich auf 0,56 € / Rubbellos

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil B) 2021-heute
Lösung W3a/2021

Lösungslogik

Erwartungswert:

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für die Läufer- Radfahrer- und Fußballkarten.
Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen.

Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.

Neuer Gewinnplan:

Berechnung des Erwartungswertes für geänderten Gewinnplan über eine Tabelle.

Klausuraufschrieb

Erwartungswert

$$P\left(\text{Läufer}\right) = \frac{2}{10}; \quad P\left(\text{Radfahrer}\right) = \frac{3}{10}; \quad P\left(\text{Fußballer}\right) = \frac{1}{10} \text{ jeweils nur im ersten Zug.}$$

$$P\left(\text{zweimal Läufer}\right) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$$

$$P\left(\text{Läufer und Fußballer}\right) = P\left(\left(\text{Läufer und Fußballer}\right); \left(\text{Fußballer und Läufer}\right)\right) = 2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{90}$$

$$P\left(\text{Radfahrer und Fußballer}\right) = P\left(\left(\text{Radfahrer und Fußballer}\right); \left(\text{Fußballer und Radfahrer}\right)\right) = 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{90}$$

Gewinnplan

| | $P\left(\text{zweimal Läufer}\right)$ | $P\left(\text{Läufer und Fußballer}\right)$ | $P\left(\text{Radfahrer und Fußballer}\right)$ |
|-----------------------------|---|---|--|
| Gewinn/Einsatz (X_i) | 9,00 € | 6,00 € | 3,00 € |
| $p(X_i)$ | $\frac{2}{90}$ | $\frac{4}{90}$ | $\frac{6}{90}$ |
| $X_i \cdot p(X_i)$ | 0,20 € | 0,27 € | 0,20 € |
| EX | 0,20 € + 0,27 € + 0,20 € – 1,00 = –0,33 € | | |

Der Spielebetreiber kann auf lange Sicht gesehen mit einer Einnahme von 0,33 € pro Spiel rechnen.

Neuer Gewinnplan:



| | $P\left(\text{zweimal} \begin{array}{c} \text{🏃} \end{array}\right)$ | $P\left(\begin{array}{c} \text{🏃} \end{array} \text{ und } \begin{array}{c} \text{🚶} \end{array}\right)$ | $P\left(\begin{array}{c} \text{🚲} \end{array} \text{ und } \begin{array}{c} \text{🚶} \end{array}\right)$ |
|-----------------------------|--|--|--|
| Gewinn/Einsatz (X_i) | 9,00 € | a € | 3,00 € |
| $p(X_i)$ | $\frac{2}{90}$ | $\frac{4}{90}$ | $\frac{6}{90}$ |
| $X_i \cdot p(X_i)$ | 0,20 € | $\frac{4}{90}a$ € | 0,20 € |
| EX | $0,20 \text{ €} + \frac{4}{90}a \text{ €} + 0,20 \text{ €} - 1,00 = -0,50 \text{ €}$ | | |

$$0,20 \text{ €} + \frac{4}{90}a \text{ €} + 0,20 \text{ €} - 1,00 = -0,50 \text{ €}$$

$$\frac{4}{90}a \text{ €} - 0,60 \text{ €} = -0,50 \text{ €} \quad | \quad +0,60 \text{ €}$$

$$\frac{4}{90}a \text{ €} = 0,10 \text{ €} \quad | \quad \cdot 90; : 4$$

$$a = 2,25 \text{ €}$$

Der Gewinn für  und  muss 2,25 € betragen, damit der Veranstalter auf lange Sicht gesehen pro Spiel 0,50 € verdient.

Lösung B3a/2022

Lösungslogik

Erwartungswert:

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für rote, blaue und gelbe Kugeln.

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugel nach den Pfadregeln.

Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.

Neuer Gewinnplan:

Berechnung des Erwartungswertes für geänderten Gewinnplan über eine Tabelle.

Der Erwartungswert entspricht dabei zweimal dem Erwartungswert von zuvor.

Klausuraufschrift

Wahrscheinlichkeiten.

$$P(\text{rot}) = \frac{4}{8}; \quad P(\text{gelb}) = \frac{1}{8}; \quad P(\text{blau}) = \frac{3}{8} \text{ jeweils nur im ersten Zug.}$$

Erwartungswert:

$$P(\text{zwei gleiche Farben}) = P(\text{rot; rot}) + P(\text{blau; blau}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{18}{56}$$

$$P(\text{gelb und blau}) = P((\text{gelb; blau}); (\text{blau; gelb})) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{56}$$

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil B) 2021-heute Gewinnplan

| | $P(\text{zwei gleich Farben})$ | $P(\text{gelb und blau})$ | Einsatz |
|--------------------------|--|---------------------------|---------|
| Gewinn/Einsatz (X_i) | 4,00 € | 10,00 € | -2,50 € |
| $p(X_i)$ | $\frac{18}{56}$ | $\frac{6}{56}$ | 1 |
| $X_i \cdot p(X_i)$ | 1,29 € | 1,07 € | -2,50 € |
| EX | $1,29 \text{ €} + 1,07 \text{ €} - 2,50 \text{ €} = -0,14 \text{ €}$ | | |

Der Spielebetreiber kann auf lange Sicht gesehen mit einer Einnahme von 0,14 € pro Spiel rechnen.

Neuer Gewinnplan:

| | $P(\text{zwei gleich Farben})$ | $P(\text{gelb und blau})$ | Einsatz |
|--------------------------|--|----------------------------------|---------|
| Gewinn/Einsatz (X_i) | 4,00 € | $a \text{ €}$ | -2,50 € |
| $p(X_i)$ | $\frac{18}{56}$ | $\frac{6}{56}$ | 1 |
| $X_i \cdot p(X_i)$ | 1,29 € | $\frac{6}{56} \cdot a \text{ €}$ | -2,50 € |
| EX | $1,29 \text{ €} + \frac{6}{56} \cdot a \text{ €} - 2,50 \text{ €} = -0,28 \text{ €}$ | | |

$$1,29 \text{ €} + \frac{6}{56} \cdot a \text{ €} - 2,50 \text{ €} = -0,28 \text{ €} \quad | \quad +1,21 \text{ €}$$

$$\frac{6}{56} \cdot a \text{ €} = 0,93 \text{ €} \quad | \quad \cdot \frac{56}{6}$$

$$a = 8,68 \text{ €}$$

Der neue Auszahlungsbetrag für $P(\text{gelb und blau})$ müsste 8,68 € betragen.

Lösung B3a/2023

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit, Zahl größer 60 zu erhalten:

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer 6 in der ersten Spalte.
Da in der zweiten Spalte keine 0 vorkommt, ist dies gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 60.

Erwartungswert:

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für Zahl größer 60 und Zahl gleich 33.
Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.

Neuer Erwartungswert:

Neuberechnung der Wahrscheinlichkeiten für $P(X > 60)$ und $P(X = 33)$.
Berechnung des neuen Erwartungswertes für geänderten Wahrscheinlichkeiten über eine Tabelle.

Klausuraufschrieb

Wahrscheinlichkeit, Zahl größer 60 zu erhalten:

$$P(X = 6 \text{ Spalte 1}) = \frac{1}{5}; \quad P(X > 0 \text{ Spalte 2}) = 1;$$

$$P(X > 60) = P(X = 6 \text{ Spalte 1}) \cdot P(X > 0 \text{ Spalte 2}) = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

Die Wahrscheinlichkeit eine Zahl größer als 60 zu erhalten beträgt $\frac{1}{5}$.

Erwartungswert:

$$P(X > 60) = \frac{1}{5}$$

$$P(X = 33) = P(X = 3 \text{ Spalte 1}) \cdot P(X = 3 \text{ Spalte 2}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Gewinnplan

| | $P(X > 60)$ | $P(X = 33)$ | Einsatz |
|--------------------------|---|----------------|---------|
| Gewinn/Einsatz (X_i) | 3,00 € | 6,00 € | -2,00 € |
| $p(X_i)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{25}$ | 1 |
| $X_i \cdot p(X_i)$ | 0,60 € | 0,96 € | -2,00 € |
| EX | $0,6 \text{ €} + 0,96 \text{ €} - 2,00 \text{ €} = -0,44 \text{ €}$ | | |

Die Klasse 10a kann mit einer Einnahme von 0,44 € pro Spiel rechnen.

Neuer Gewinnplan:

$$P(X > 60) = P(X = 6 \text{ Spalte 1}) \cdot P(X > 0 \text{ Spalte 2}) = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$$

$$P(X = 33) = P(X = 3 \text{ Spalte 1}) \cdot P(X = 3 \text{ Spalte 2}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

| | $P(X > 60)$ | $P(X = 33)$ | Einsatz |
|--------------------------|--|----------------|---------|
| Gewinn/Einsatz (X_i) | 3,00 € | 6,00 € | -2,00 € |
| $p(X_i)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{25}$ | 1 |
| $X_i \cdot p(X_i)$ | 1,20 € | 0,24 € | -2,00 € |
| EX | $1,20 \text{ €} + 0,24 \text{ €} - 2,00 \text{ €} = -0,56 \text{ €}$ | | |

Der Gewinn der Klasse 10a erhöht sich auf 0,56 € pro Spiel.