Lösung W4a/2008

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe genau 30.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe größer als 12.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Summe kleiner als 30.

Klausuraufschrieb

$P(6) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(10) = \frac{1}{3}$ $\qquad P(20) = \frac{1}{6}$

$P(Summe = 30) = P\{(10;20),(20;10)\}$

$P(10;20) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ $\qquad P(20;10) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P(Summe = 30) = P(10;20) + P(20;10) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} \approx 11{,}1\,\%$

Die Summe größer als 12 hat das Gegenereignis Summe gleich 12.

$P(Summe > 12) = 1 - P(Summe = 12)$

$P(6;6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(Summe > 12) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \approx 75\,\%$

Die Summe kleiner als 30 hat das Gegenereignis Summe größer gleich 30.

$P(Summe < 30) = 1 - \big(P(Summe = 30) + P(Summe = 40)\big)$

$P(Summe < 30) = 1 - \frac{2}{18} - \frac{1}{36} = \frac{31}{36} \approx 86{,}1\,\%$

Lösung W4a/2009

Lösungslogik

Aufstellung einer 6-Zeilen-6-Spaltentabelle mit Eintragung der Elementarereignisse in die einzelnen Tabellenelemente.
Ermittlung der gefragten Wahrscheinlichkeiten aus der Anzahl möglicher Elementarereignisse in der Tabelle.

Klausuraufschrieb

2. Würfel/Wurf \ 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

$P(Augensumme < 5) = P\{(1;1),(1:2),(2;1),(2{,}2);(1{,}3),(3{,}1)\}$

Die Wahrscheinlichkeit jedes Einzelelements der Tabelle beträgt $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, somit ist

$P(Augensumme < 5) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$

$P(kein\ Pasch) = 1 - P(Pasch) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\ \%$

$p = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$

$P(Augensumme < 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$P(Augensumme > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Lösung W4a/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen über die angegebenen Mittelpunkts-Winkel.
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ und Vergleich.
Neuberechnung der Wahrscheinlichkeit für die Zahlen 4 und 5 über die neuen Mittelpunktswinkel.
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ und Vergleich.

Klausuraufschrieb

$P(1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(2) = \frac{135}{360} = \frac{3}{8}$ $\quad P(3) = \frac{3}{8}$
$P(4) = \frac{1}{6}$ $\quad P(5) = \frac{1}{3}$ $\quad P(6) = \frac{1}{2}$
$P(A) = \{(3;5), (2;6), (3;6)\}$
$P(B) = 1 - P(A)$
$P(3;5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}$ $\quad P(2;6) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad P(3;6) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$
$P(A) = P(3;5) + P(2;6) + P(3;6) = \frac{3}{24} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2} = 50\ \%$
$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$
Es ist gleichgültig, für welche Gewinnsituation man sich entscheidet.
Geänderter Mittelpunkts-Winkel für die 4 und die 5.
$P(4) = \frac{1}{4}$ $\quad P(5) = \frac{1}{4}$
$P(3;5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$
$P(A) = P(3;5) + P(2;6) + P(3;6) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{15}{32} \approx 46{,}9\ \%$
$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32} \approx 53{,}1\ \%$
Man wird sich jetzt für Gewinnsituation B entscheiden.

Lösung W4a/2011

Lösungslogik

Aufgabe zum Erwartungswert.
Aufstellen einer Tabelle aus drei Zeilen mit drei Spalten, die ersten zwei Spalten für die Gewinnsituationen, die dritte Spalte für die Niete.
Eintragung der jeweiligen Gewinne **abzüglich** Lospreis in die ersten beiden Spalten der ersten Zeile. Eintragung des Lospreises mit negativem Vorzeichen in die dritte Spalte der ersten Zeile.
Eintragung der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne in die ersten beiden Spalten der zweiten Zeile, Wahrscheinlichkeit für die Nieten in der dritten Spalte der zweiten Zeile.
Spalten der Zeile eins und zwei vorzeichengerecht multiplizieren und in die Spalten der dritten Zeile eintragen.
Vorzeichengerechte Addition der Spalteninhalte der dritten Zeile ergibt den Erwartungswert.
Neuberechnung des Erwartungswertes mit erhöhter Losanzahl.
Berechnung des Betrages, der gespendet werden kann über die Multiplikation von Anzahl der Lose mit dem Betrag des Erwartungswertes.

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) 2008-2014

Klausuraufschrieb

$P(20\text{ €}) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ $P(4\text{ €}) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$ $P(-2\text{ €}) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$

Berechnung der Erwartungswerte:

18 €	2 €	$-2{,}00\text{ €}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
$0{,}90\text{ €}$	$0{,}40\text{ €}$	$-1{,}50\text{ €}$

$EX = 0{,}9 + 0{,}40 - 1{,}50 = -0{,}20\text{ €}$

Neuberechnung nach Erhöhung der Losanzahl:

$P(20\text{ €}) = \frac{10}{250} = \frac{1}{25}$ $P(4\text{ €}) = \frac{40}{250} = \frac{4}{25}$ $P(-2\text{ €}) = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}$

Berechnung der Erwartungswerte

18 €	2 €	$-2{,}00\text{ €}$
$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}$
$0{,}72\text{ €}$	$0{,}32\text{ €}$	$-1{,}60\text{ €}$

$EX = 0{,}72 + 0{,}32 - 1{,}60 = -0{,}56\text{ €}$

Verkauf aller Lose:

$G = n \cdot |EX| = 250 \cdot 0{,}56 = 140\text{ €}$

Die Schüler der Abschlussklasse können 140 € *spenden, wenn alle Lose verkauft werden.*

Lösung W4a/2012

Lösungslogik

Aufgabe zum Erwartungswert.
Aufstellen einer Tabelle aus drei Zeilen mit drei Spalten, ähnlich Aufgabe W4a/2011. Da jedoch alle Farben gewinnen, wird keine Spalte für den Spieleinsatz eingetragen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Farbe Blau über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit „Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementereignisse eines Zufallsexperiments ist stets 1„.
Spalten der Zeile eins und zwei multiplizieren und in die Spalten der dritten Zeile eintragen. Vorzeichengerechte Addition der Spalteninhalte der dritten Zeile ergibt den Erwartungswert.
Berechnung der Veränderung des Gewinnplans, damit der Gewinn pro Spiel verdoppelt wird.

Klausuraufschrieb

$P(rot) = \frac{1}{4}$ $P(gelb) = \frac{1}{3}$ $P(blau) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Berechnung der Erwartungswerte

4 €	$1{,}50\text{ €}$	$0{,}60\text{ €}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
$1{,}00\text{ €}$	$0{,}50\text{ €}$	$0{,}25\text{ €}$

$EX = 1{,}00 + 0{,}50 + 0{,}25 = 1{,}75\text{ €}$

Gewinn pro Spiel:

$Gewinn = Einsatz - EX = 2{,}00 - 1{,}75 = 0{,}25\text{ €}$

Verdoppelung des Gewinns:
$2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50 = 2{,}00 - EX \Longrightarrow \quad EX = 1{,}50$
Mit einer Veränderung des Gewinns von 4 € auf 3 € ergibt sich:
$EX = 3 \cdot \frac{1}{4} + 1{,}50 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}60 \cdot \frac{5}{12} = 0{,}75 + 0{,}50 + 0{,}25 = 1{,}50$ €
Der Gewinnplan muss von 4 € auf 3 € verändert werden, damit die Klasse den doppelten Gewinn macht.

Lösung W4a/2013

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit „mindestens eine Sechs":
Wir stellen die Wahrscheinlichkeit einer Sechs für Würfel A und Würfel B auf. Würfel A hat nur eine Sechs, also $P(6_A) = \frac{1}{6}$. Würfel B hat zwei Sechsen, also $P(6_B) = \frac{2}{6}$.
Mindestens eine Sechs bedeutet eine Sechs oder zwei Sechsen. Am Wort „mindestens" erkennen wir, dass der schnellste Lösungsweg über das Gegenereignis führt, denn „mindestens eine Sechs" ist dasselbe wir $1 -$ „keine Sechs". Keine Sechs bei Würfel A ist $P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$, bei Würfel B jedoch $P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$.
Erwartungswert:
Zunächst müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „Pasch" bestimmen. Aufgrund des Aufbaus der beiden Würfel sind nur die Ereignisse $\{5; 5\}$ und $\{6; 6\}$ möglich. $P(6_A)$ und $P(6_B)$ sind bereits bekannt, $P(5_A) = P(5_B) = \frac{1}{6}$.
Wir bestimmen nun den Erwartungswert über eine Tabelle.
Ersatz der „Fünf" bei Würfel A durch eine „Sechs":
Durch den Ersatz ist nunmehr ein 5–er Pasch ausgeschlossen, es ist nur noch ein 6–er Pasch möglich, wobei jetzt $P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6}$ ist. Wir berechnen den Erwartungswert neu und vergleichen diesen mit dem Vorwert.

Klausuraufschrieb

$P(6_A) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$
$P(6_B) = \frac{2}{6}$ $\qquad P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$
$P(mindestens\ 1\ Sechs) = 1 - P(keine\ Sechs)$
$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt $44{,}4\ \%$.

Erwartungswert:

$P(Pasch) = P\{(5;5),(6;6)\} = P(5;5) + P(6;6)$

$P(5;5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\quad$ $P(6;6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$

$P(Pasch) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(Gewinn)$

$P(\overline{Gewinn}) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Gewinn/Einsatz (X_i)	$8{,}00\ €$	$-1{,}00\ €$
$p(X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{8}{12}\ €$	$-\frac{11}{12}\ €$
EX	$\frac{8}{12}\ € - \frac{11}{12}\ € = -\frac{3}{12}\ € = -0{,}25\ €$	

Der Erwartungswert ist $EX = -0{,}25$.

Ersatz der „Fünf" bei Würfel A

Es ist nur noch das Ereignis $\{6;6\}$ möglich.

$P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(Gewinn) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$P(\overline{Gewinn}) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Gewinn/Einsatz (X_i)	$8{,}00\ €$	$-1{,}00\ €$
$p(X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$\frac{8}{9}\ €$	$-\frac{8}{9}\ €$
EX	$\frac{8}{9}\ € - \frac{8}{9}\ € = 0\ €$	

Der Erwartungswert nach Ersatz der „Fünf" bei Würfel A ist 0, d.h., das Spiel ist fair, das Ersetzen wäre für den Veranstalter nicht vorteilhaft.

Lösung W4a/2014

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Karten mit unterschiedlichen Buchstaben ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(A;B)$, $P(B;A)$, $P(B;C)$, $P(C;B)$, $P(A;C)$ und $P(C;A)$. Einfacher ist hier der Weg über das Gegenereignis, nämlich $1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$.

Für die Prüfung der Gewinnpläne erstellen wir eine Tabelle zur Errechnung der Erwartungswerte.

Realschulabschluss Zufall und Wahrscheinlichkeit (Wahlteil) 2008-2014

Klausuraufschrieb

$P(A;A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}; \quad P(B;B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}; \ P(C;C) = 0$

$P(zwei\ unterschiedliche\ Buchstaben) = 1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$

$= 1 - \frac{22}{56} = \frac{34}{56} \approx 60{,}7\%$

Erwartungswerte:

$P(zwei\ gleichen\ Buchstaben) = \frac{22}{56}$

$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = P(A;C) + P(C;A) + P(B;C) + P(C;B)$

$P(A;C) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{56},\ P(C;A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{56},\ P(B;C) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56},\ P(C;B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{56}$

$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = \frac{14}{56}$

Gewinnplan 1

	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-0{,}50$ €	$-2{,}50$ €	$2{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{20}{56}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}20$ €	$-0{,}62$ €	$0{,}89$ €
EX	$-0{,}20$ € $-$ $0{,}62$ € $+$ $0{,}89$ € $=$ $0{,}07$ €		

Gewinnplan 2

	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (X_i)	$-2{,}50$ €	$-0{,}50$ €	$2{,}50$ €
$p(X_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{14}{56}$	$\frac{20}{56}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$-0{,}98$ €	$-0{,}12$ €	$0{,}89$ €
EX	$-0{,}98$ € $-$ $0{,}12$ € $+$ $0{,}89$ € $=$ $-0{,}21$ €		

Der Spielebetreiber sollte sich für Gewinnplan 1 entscheiden, da er hier auf lange Sicht gesehen einen Gewinn pro Spiel erzielt.