Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Pflichtteil) 2010-2020
7 Aufgaben im Dokument

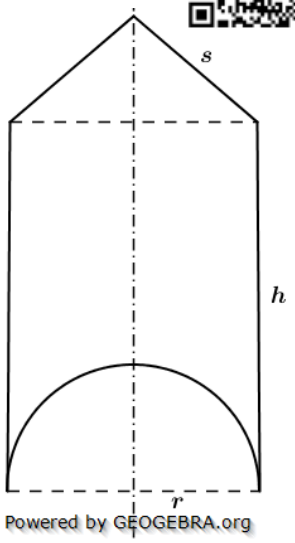
Aufgabe P1/2010

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Zylinder und aufgesetztem Kegel. Aus diesem Körper wird eine Halbkugel herausgearbeitet (siehe Achsenschnitt).
Es gilt:

$r = 3{,}0\ cm$ (Radius des Zylinders)
$h = 8{,}6\ cm$ (Höhe des Zylinders)
$s = 3{,}8\ cm$ (Mantellinie des Kegels)

Berechnen Sie das Volumen des Restkörpers.

Lösung: $V_{Rest} = 209\ cm^3$



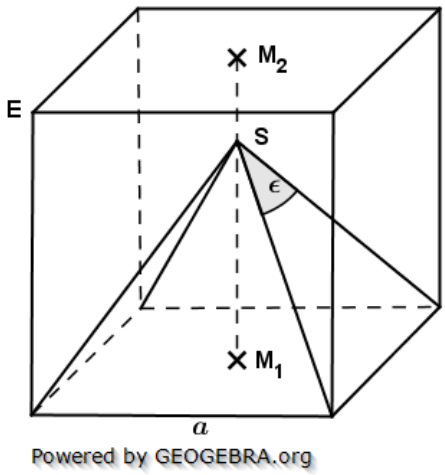
Aufgabe P3/2010

Das Schrägbild zeigt eine Pyramide in einem Würfel.
Es gilt:

$a = 8\ cm$
$\epsilon = 58{,}0\,°$

Wie groß ist das Volumen der Pyramide?
Berechnen Sie die Länge $\overline{ES}$.

Lösung: $V = 128\ cm^3$
$\overline{ES} = 6{,}0cm$



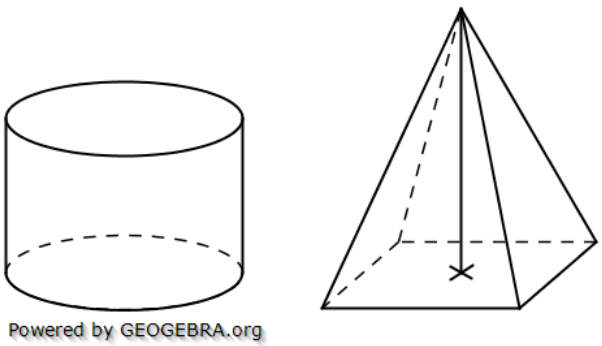
Aufgabe P3/2013

Ein Zylinder und eine quadratische Pyramide haben gleich große Mantelflächen.
Die Umfänge der beiden Grundflächen sind ebenfalls gleich.
Für den Zylinder gilt:

$V_Z = 220\ cm^3$ (Volumen)
$r_Z = 3{,}8\ cm$ (Radius)

Berechnen Sie die Höhe der Pyramide.

Lösung: $h_{Pyr} = 9{,}2\ cm$

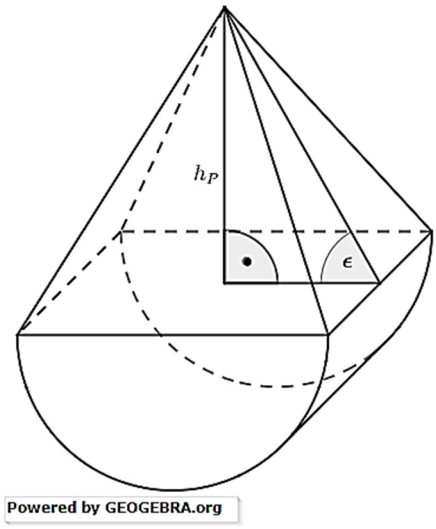


© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe P3/2017

Ein Körper setzt sich aus einem halben Zylinder und einer quadratischen Pyramide zusammen.
Es gilt:

$h_P = 16\,cm$
$\epsilon = 58\,°$



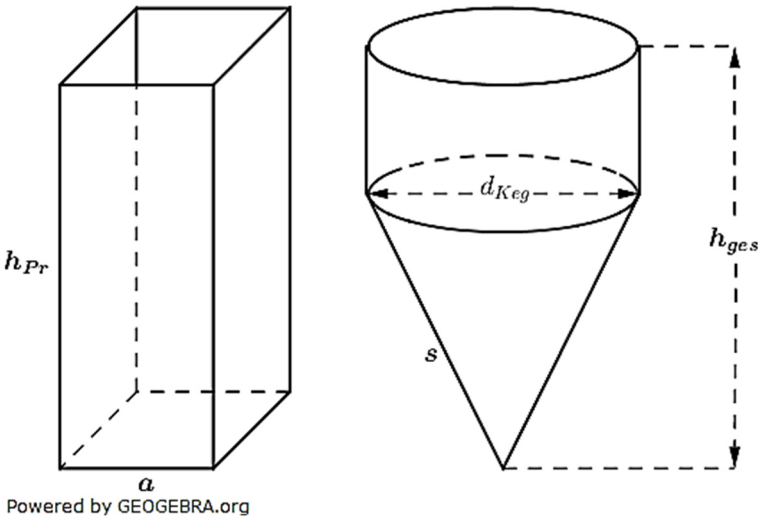
Berechnen Sie die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Lösung: $O_{Körper} = 1697{,}3\,cm^2$

Aufgabe P3/2018

Die Abbildung zeigt ein quadratisches Prisma und einen zusammengesetzten Körper. Der zusammengesetzte Körper besteht aus einem Kegel mit aufgesetztem Zylinder.
Das quadratische Prisma ist vollständig mit Wasser gefüllt. Dieses Wasser wird in den zusammengesetzten Körper umgefüllt.
Es gilt:

$a = 10{,}0\,cm$
$h_{Pr} = h_{ges} = 25{,}0\,cm$
$s = 20{,}0\,cm$
$d = 17{,}8\,cm$



Wie hoch steht das Wasser im zusammengesetzten Körper?

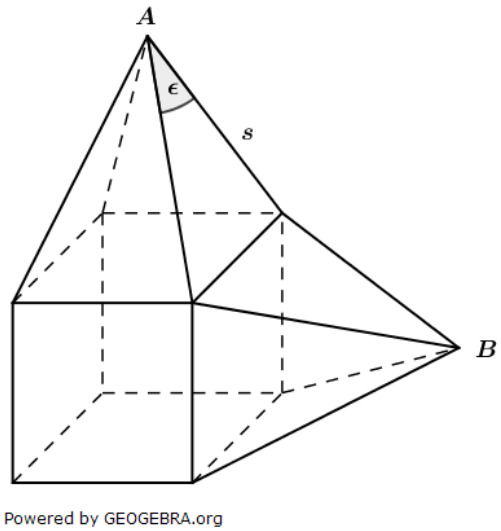
Lösung: $h_W = 22\,cm$

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Pflichtteil) 2010-2020

Aufgabe P3/2019

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Würfel und zwei quadratischen Pyramiden.
Die Pyramiden haben die gleiche Höhe.
Es gilt:

$$s = 8{,}5\ cm$$
$$\epsilon = 41{,}4\ °$$

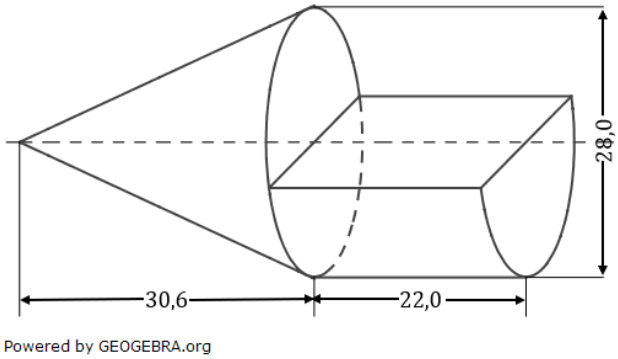


Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers.
Wie weit sind die Pyramiden-spitzen A und B voneinander entfernt?

Lösung: $O_{Körper} = 334{,}8\ cm^2$
$\overline{AB} = 14{,}7\ cm$

Aufgabe P3/2020

Ein Werkstück besteht aus einem Kegel und einem halben Zylinder.
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Werkstücks.
(Maße in cm)



Lösung: $O_{Werkstück} = 3679{,}4\ cm^2$

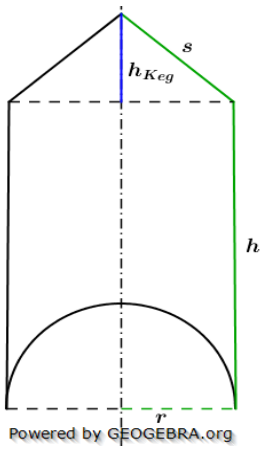
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Pflichtteil) 2010-2020

Lösung P1/2010

Lösungslogik

Das Volumen des Körpers setzte sich zusammen aus dem Volumen des Zylinders mit der Höhe h abzüglich des Volumens der Halbkugel mit dem Radius r zuzüglich dem Volumen des aufgesetzten Kegels mit dem Radius r und der Höhe h_{Keg}.



Berechnung von h_{keg} Über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens des Zylinders.
Berechnung des Volumens der Halbkugel.
Berechnung des Volumens des Kegels.
Berechnung des Volumens des zusammengesetzten Körpers.

Klausuraufschrieb

h_{Keg}: $h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{3{,}8^2 - 3^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{5{,}44} = 2{,}33$

V_{Zyl}: $V_{Zyl} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 8{,}6 = 243{,}2$

V_{HK}: $V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = 56{,}55$

V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 2{,}33 = 22{,}0$

$V_{Körper}$: $V_{Körper} = V_{Zyl} - V_{HK} + V_{Keg} = 243{,}2 - 56{,}55 + 22 = 208{,}65$

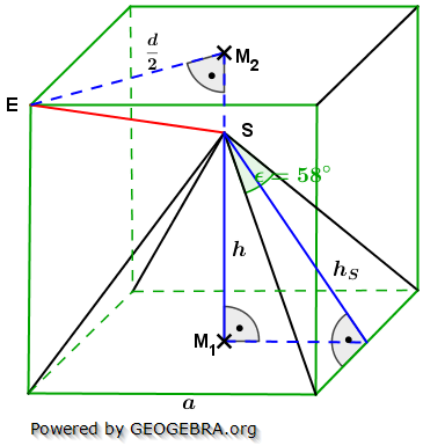
Der Körper hat ein Volumen von $209\ cm^3$.

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $311\ cm^2$.

Lösung P3/2010

Lösungslogik

Berechnung von h_s über den $tan\frac{\epsilon}{2}$.
Berechnung von h über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens der Pyramide.
Berechnung von $\overline{SM_2}$ aus der Differenz von a und h.
Berechnung der Diagonalen d des Würfelquadrats und daraus $\frac{d}{2}$.
Berechnung von $\overline{ES}$ über den Satz des Pythagoras.



Klausuraufschrieb

h_s: $tan\frac{\epsilon}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_S}$ | $\cdot h_S;\ :tan\frac{\epsilon}{2}$

$h_s = \frac{\frac{a}{2}}{tan\frac{\epsilon}{2}} = \frac{4}{tan29°} = 7{,}22$

h: $h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7{,}22^2 - 4^2}$ | Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{36{,}1284} = 6{,}0$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 6 = 128$

Das Volumen der Pyramide beträgt $128\ cm^3$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overline{SM_2}$: $\overline{SM_2} = a - h = 8 - 6 = 2$

d: $d = a \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot \sqrt{2} = 11{,}31 \implies \frac{d}{2} = 5{,}66$

$\overline{ES}$: $\overline{ES} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \overline{SM_2}^2} = \sqrt{5{,}66^2 + 2^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{ES} = \sqrt{36{,}0356} = 6{,}0$

Die Strecke $\overline{ES}$ ist $6{,}0\ cm$ lang.

Lösung P3/2013

Lösungslogik

Über das gegebene Volumen des Zylinders berechnen wir zunächst dessen Höhe über die Volumenformel $V_z = \pi r_z^2 \cdot h_z$.
Mit dem gefundenen h_z berechnen wir den Mantel des Zylinders über die Formel $M_Z = 2\pi r_Z \cdot h_z$.
Über den gegebenen Radius r_Z berechnen wir den Umfang des Grundkreises des Zylinders über die Formel $u_Z = 2\pi \cdot r_z$.
Der Umfang der Grundfläche der Pyramide ist (nach Aufgabenstellung) gleich groß wie der Umfang der Grundfläche des Zylinders. Somit muss gelten:

$u_Z = u_P = 4 \cdot a$.

Hieraus errechnen wir die Länge der Seitenkante der Pyramidengrundfläche.
Der Mantel der quadratischen Pyramide errechnet sich aus $M_P = 2 \cdot a \cdot h_s$ mit h_s als Höhe einer Seitenfläche. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h_s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$.

Daraus folgt $h_s = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$.
Mantelfläche des Zylinders soll gleich groß sein wie die Mantelfläche der Pyramide, also $M_Z = M_P = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$
Die so gefundene Formel lösen wir dann nach h auf.

Klausuraufschrieb

h_z: $V_z = \pi r_z^2 \cdot h_z$

$220 = \pi \cdot 3{,}8^2 \cdot h_z$ | $: \pi \cdot 3{,}8^2$

$h_z = \frac{220}{\pi \cdot 3{,}8^2} = 4{,}85$

M_z: $M_Z = 2\pi r_Z \cdot h_z = 2\pi \cdot 3{,}8 \cdot 4{,}85 = 115{,}8$

u_z: $u_Z = 2\pi \cdot r_z = 2\pi \cdot 3{,}8 = 23{,}88$

a_P: $u_Z = u_P = 4 \cdot a_P$

$23{,}88 = 4 \cdot a_P$ | $: 4$

$a_P = \frac{23{,}88}{4} = 5{,}97$

h_P: $M_P = 2 \cdot a_p \cdot h_s$

$h_s^2 = \left(\frac{a_p}{2}\right)^2 + h_p^2 \implies h_s = \sqrt{\frac{a_p^2}{4} + h_p^2}$ | Satz des Pythagoras

$M_P = 2 \cdot a_p \cdot \sqrt{\frac{a_p^2}{4} + h_p^2}$

$M_Z = M_P = 115{,}8$

$115{,}8 = 2 \cdot 5{,}97 \cdot \sqrt{\frac{5{,}79^2}{4} + h_P^2}$ | $: 2 \cdot 5{,}97$

$\frac{115{,}8}{2 \cdot 5{,}97} = \sqrt{8{,}91 + h_P^2}$

$9{,}7 = \sqrt{8{,}91 + h_P^2}$ | ^{2}
$94{,}06 = 8{,}91 + h_P^2$ | $-8{,}91$
$h_P^2 = 85{,}15$ | $\sqrt{}$
$h_p = 9{,}23$

Die Höhe der Pyramide beträgt $9{,}2\ cm$.

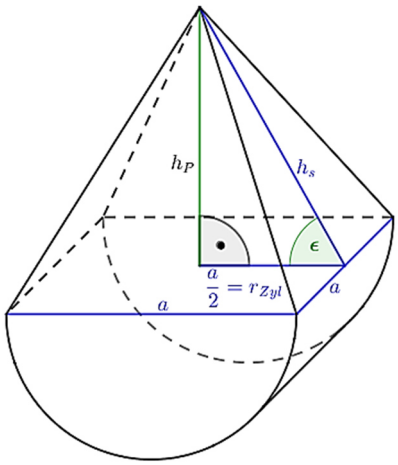
Lösung P3/2017

Lösungslogik

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers besteht aus einem Halbzylinder und dem Mantel einer quadratischen Pyramide.
Mithilfe der gegebenen Höhe und dem Winkel ϵ berechnen wir die Länge der Grundkante a der Pyramide. Der Radius des Zylinders ist dann $\frac{a}{2}$, damit ist seine Höhe gleich a.
Oberfläche des Halbzylinders:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2\pi r_{Zyl}^2 + 2\pi r_{Zyl} \cdot h\right) = \pi \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right)$$

Für den Mantel der Pyramide benötigen wir noch h_s welches wir über den $sin\ (\epsilon)$ berechnen.
Der Mantel der Pyramide ist $M_{Pyr} = 2a \cdot h_s$.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$O_{Körper} = \frac{1}{2} \cdot O_{Zyl} + M_{Pyr}$

O_{Zyl}: $O_{Zyl} = 2\pi r_{Zyl}^2 + 2\pi r_{Zyl} \cdot h_{Zyl} = 2\pi r(r_{Zyl} + h_{Zyl})$

r_{Zyl}: $tan\epsilon = \frac{h_P}{r_{Zyl}}$;

$r_{Zyl} = \frac{h_p}{\tan(\epsilon)} = \frac{16}{tan\ (58\ °)} = 10{,}0$

h_{Zyl}: $h_{Zyl} = 2 \cdot r_{Zyl} = 20{,}0$

O_{Zyl}: $O_{Zyl} = 2\pi \cdot 10(10 + 20) = 600\pi \approx 1885$

M_{Pyr}: $M_{Pyr} = 2a \cdot h_s$

h_s: $sin\ (\epsilon) = \frac{h_p}{h_2}$

$h_s = \frac{h_P}{\sin(\epsilon)} = \frac{16}{\sin(58°)} = 18{,}87$

M_{Pyr}: $M_{Pyr} = 2 \cdot 20 \cdot 18{,}87 \approx 754{,}8$

$O_{Körper} = \frac{1}{2} \cdot 1885 + 754{,}8 = 1697{,}3$

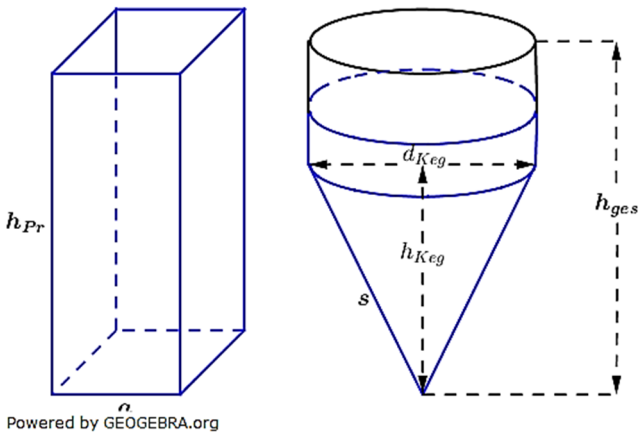
Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $1697{,}3\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung P3/2018

Lösungslogik

Die Wasserfüllung ist in nebenstehender Graphik durch die blauen Linien gekennzeichnet.
Wir berechnen zunächst das Volumen des Prismas über $V_{Pr} = G_{Pr} \cdot h_{Pr}$.
Danach berechnen wir das Volumen des Kreiskegels mit
$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$
Da h_{Keg} nicht gegeben ist, müssen wir h_{Keg} berechnen über den Satz des Pythagoras mit der Seitenkante s und dem Radius des Kegels mit $r_{Keg} = \frac{1}{2}d$.
Jetzt können wir V_{Keg} bestimmen.



Die Differenz aus $V_{Pr} - V_{Keg}$ ist das Wasservolumen, welches dann vom Zylinder aufgenommen wird. Über $V_{Pr} - V_{Keg} = \pi r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl}$ (mit $r_{Zyl} = r_{Keg}$) ermitteln wir die Höhe des im Zylinder stehenden Wassers.
Die gesuchte Höhe ist dann $h_{Keg} + h_{Zyl}$.

Klausuraufschrieb

$V_{Pr} = G_{Pr} \cdot h_{Pr} = a^2 \cdot h_{Pr} = 100 \cdot 25 = 2500\ cm^3$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

h_{Keg}: $h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r_{Keg}^2}$ | Satz des Pythagoras

r_{Keg}: $r_{Keq} = \frac{1}{2} \cdot d = 8{,}9$

$h_{Keg} = \sqrt{20^2 - 8{,}9^2} = 17{,}91$

V_{Keq}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot 8{,}9^2 \cdot 17{,}91 = 1485{,}61$

V_{Rest}: $V_{Rest} = V_{Pr} - V_{Keg} = 2500 - 1485{,}61 = 1014{,}39$

Der aufgesetzte Zylinder muss somit noch $1014{,}39\ cm^3$ Wasser aufnehmen.

h_{Zyl}: $V_{Rest} = V_{Zyl} = \pi \cdot r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl}$

$1014{,}39 = \pi \cdot 8{,}9^2 \cdot h_{Zyl}$

$1014{,}39 = 248{,}8456 \cdot h_{Zyl}$ | $: 248{,}8456$

$h_{Zyl} = 4{,}07$

h_W: $h_W = h_{Keg} + h_{Zyl} = 17{,}91 + 4{,}07 = 21{,}98$

Das Wasser steht ca. $22\ cm$ hoch im Körper.

Lösung P3/2019

Lösungslogik

Oberfläche:

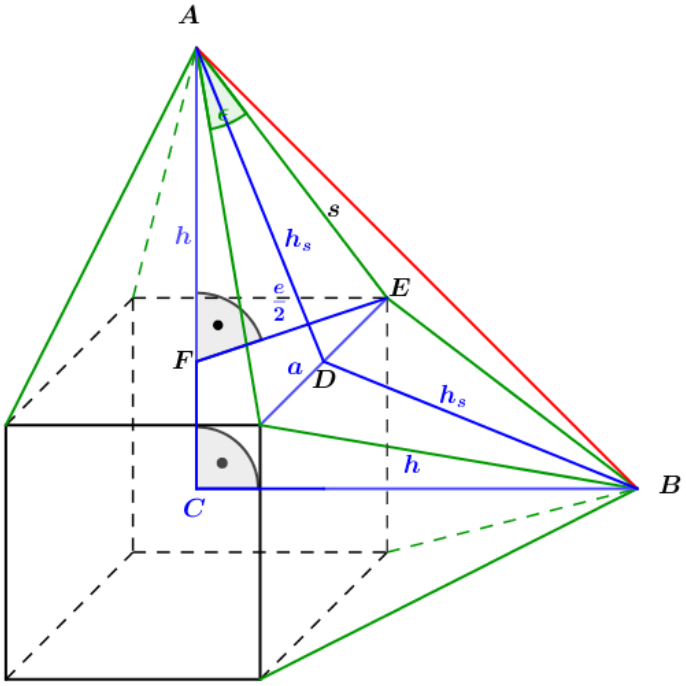
Die Oberfläche besteht aus 4 Seitenflächen des Würfels sowie zwei Mantelflächen der Pyramide (die Grundflächen der Pyramide verdecken zwei Seitenflächen des Würfels, sodass diese nicht zur Oberfläche gehören).

$O_{Körper} = 4 \cdot a^2 + 2 \cdot 2a \cdot h_s$

Berechnung von $\frac{a}{2}$ über den $\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ im Dreieck DEA.

Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras im Dreieck DEA.

Berechnung von $O_{Körper}$.



Powered by GEOGEBRA.org

Länge der Strecke $\overline{AB}$:

In nebenstehender Grafik erkennen wir, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist mit einem rechten Winkel bei C. Weiterhin gilt, dass $\overline{AC} = \overline{BC}$.

$\overline{AB} = \sqrt{2 \cdot \overline{AC}^2} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2}$

Berechnung von $\overline{AC}$ aus der Summe von $\overline{FC}$ und $\overline{AF}$.

$\overline{AF} = h_{Pyr}$

Berechnung von $\frac{e}{2}$ als halbe Diagonale einer Würfelseitenfläche.

Berechnung von h_{Pyr} über den Satz des Pythagoras im Dreieck AFE.

Der Punkt C liegt im Würfelmittelpunkt, damit ist $\overline{FC} = \frac{a}{2}$.

Klausuraufschrieb

$O_{Körper} = 4 \cdot a^2 + 2 \cdot 2a \cdot h_s$

a: $\quad sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s} \quad | \quad \cdot s$

$\frac{a}{2} = s \cdot sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = 8{,}5 \cdot sin(20{,}7\,°) = 3{,}0$

$a = 6{,}0$

h_s: $\quad h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{8{,}5^2 - 3^2} = 7{,}95$

$O_{Körper} = 4 \cdot a^2 + 2 \cdot 2a \cdot h_s = 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 \cdot 7{,}95 = 144 + 190{,}8 = 334{,}8$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Köpers beträgt $334{,}8\ cm^2$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overline{AB}$: $\overline{AB} = \sqrt{2 \cdot \overline{AC}^2} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2}$

$\overline{AC}$: $\overline{AC} = \overline{FC} + \overline{AF}$

$\overline{FC}$: $\overline{FC} = \frac{a}{2} = 3{,}0$

$\overline{AF}$: $\overline{AF} = h_{Pyr}$

$h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

$e = a \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$ | Diagonale einer Würfelseite

$\frac{e}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

$h_{Pyr} = \sqrt{8{,}5^2 - \left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 7{,}365$

$\overline{AC}$: $\overline{AC} = \overline{FC} + \overline{AF} = 3{,}0 + 7{,}365 = 10{,}365$

$\overline{AB}$: $\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2} = 10{,}365 \cdot \sqrt{2} = 14{,}66$

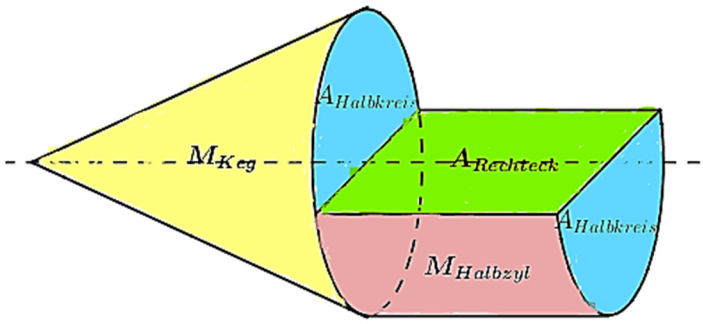
Die Entfernung der Punkte A und B beträgt $14{,}7\ cm$.

Lösung P3/2020

Lösungslogik

Die Oberfläche setzt sich aus 4 Einzelflächen zusammen und zwar:
Mantelfläche des Kegels M_{Keg} (in Grafik gelb),
Mantelfläche des Halbzylinders $M_{Halbzyl}$ (in Grafik rot),
Zwei Halbkreisflächen $A_{Halbkreis}$ (in Grafik blau),
Fläche eines Rechtecks $A_{Rechteck}$ (in Grafik grün).

$O_{Werkstück} = M_{Keg} + M_{Halbzyl} + 2 \cdot A_{Halbkreis} + A_{Rechteck}$



Klausuraufschrieb

$O_{Werkstück} = M_{Keg} + M_{Halbzyl} + 2 \cdot A_{Halbkreis} + A_{Rechteck}$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$

$r_{Keg} = 14{,}0$

s: $s = \sqrt{h_{Keg}^2 + r_{Keg}^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{30{,}6^2 + 14^2} = 33{,}65$

$M_{Keg} = \pi \cdot 14 \cdot 33{,}65 = 1480{,}0$

$M_{Halbzyl}$:

$M_{Halbzyl} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{Keg} \cdot h_{Zyl}$

$M_{Halbzyl} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 14{,}0 \cdot 22{,}0 = 967{,}61$

$A_{Halbkreis}$:

$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$

$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 14^2 = 307{,}88$

$A_{Rechteck}$:

$$A_{Rechteck} = a \cdot b = 2 \cdot r_{Zyl} \cdot h_{Zyl}$$

$$A_{Rechteck} = a \cdot b = 2 \cdot 14{,}0 \cdot 22{,}0 = 616$$

$O_{Werkstück} = 1480{,}0 + 967{,}61 + 2 \cdot 307{,}88 + 616 = 3679{,}37$

Die Oberfläche des Werkstücks beträgt $3679{,}4\ cm^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de