Aufgabe P1/2021

Ein Kunstwerk setzt sich aus einer Halbkugel und einem Kegel zusammen.

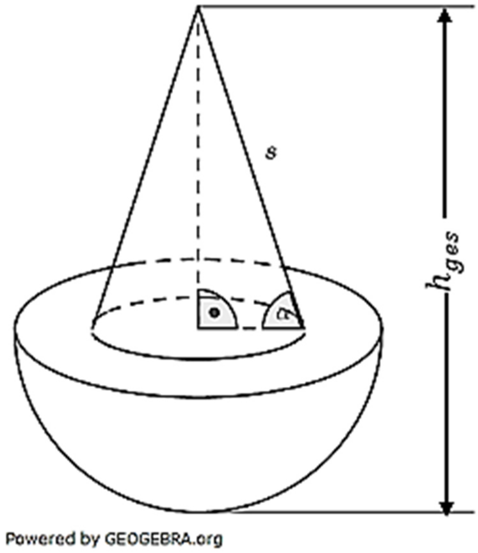
Es gilt:

$s = 3{,}7\ m$

$h_{ges} = 5{,}1\ m$

$\alpha = 72\ °$

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des zusammengesetzte Körpers.



Dieses Kunstwerk soll mit Farbe angestrichen werden. Eine 1-Liter-Farbdose reicht für $10\ m^2$.

b) Wie viele Dosen müssen gekauft werden?

Lösungen: $O_{körper} = 32{,}7\ m^2$; $n = 4$ *Dosen*

Aufgabe P2/2022

1000 Wachskugeln werden eingeschmolzen. Sie haben jeweils einen Radius von $1{,}5\ cm$. Mit diesem eingeschmolzenen Wachs werden quadratische Pyramiden gegossen. Dazu wird die abgebildete Gussform verwendet. Diese wird vollständig mit Wachs gefüllt.

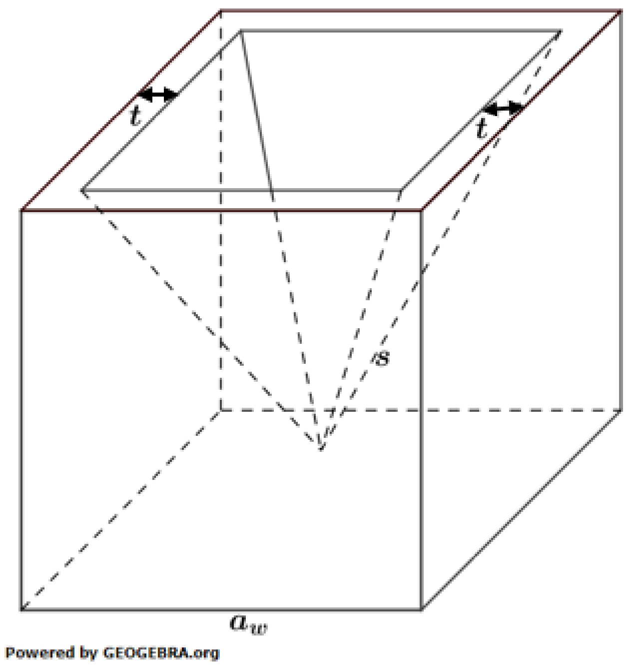
Es gilt:

$a_w = 10\ cm$ (Grundkante Würfel)

$s = 9\ cm$

$t = 1\ cm$

Wie viele solcher Pyramiden können mit dem eingeschmolzenen Wachs gegossen werden.

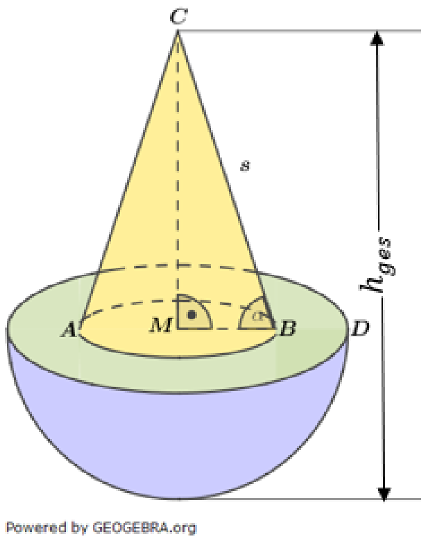


Lösung: $n = 95$ *Pyramiden*

Lösung P2/2021

Lösungslogik

a) Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus dem Mantel des Kegels (gelb), einem Kreisring (grün) mit innerem Radius $\overline{MB}$ und äußerem Radius $\overline{MD}$ sowie der Oberfläche der Halbkugel (blau).
Berechnung von $\overline{MC}$ über den $sin\,(\alpha)$.
Berechnung des $\overline{MB}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Mantels des Kegels über $M_{Keg} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot \overline{MB} \cdot s$
Berechnung des Radius der Halbkugel über $\overline{MD} = h_{ges} - \overline{MC}$.
Berechnung des Oberfläche des Kreisrings über $A_{Ring} = \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \pi \cdot \left(\overline{MD}^2 - \overline{MB}^2\right)$.



Berechnung der Oberfläche der Halbkugel über $A_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi \cdot \overline{MD}^2$
Addition der berechneten Flächen zur Gesamtfläche des Körpers.

b) Die berechnete Gesamtfläche des Körpers dividiert durch 10 ergibt Anzahl der zu kaufenden Dosen. Achtung, Ergebnis auf ganze Zahl aufrunden.

Klausuraufschrieb

$A_{ges} = M_{Keg} + A_{Kreisring} + A_{Halbkugel}$

a) $\overline{MC}$: $sin(\alpha) = \frac{\overline{MC}}{s}$

$\overline{MC} = s \cdot sin(\alpha) = 3{,}7 \cdot \sin(72\,°) = 3{,}52\,m$

$\overline{MB}$: $\overline{MB} = \sqrt{s^2 - \overline{MC}^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{MB} = \sqrt{3{,}7^2 - 3{,}52^2} = 1{,}14\,m$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s = \pi \cdot \overline{MB} \cdot s = \pi \cdot 1{,}14 \cdot 3{,}7 = 13{,}25\,m^2$

$\overline{MD}$: $\overline{MD} = h_{ges} - \overline{MC} = 5{,}1 - 3{,}52 = 1{,}58\,m$

A_{Ring}: $A_{Ring} = \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \pi \cdot \left(\overline{MD}^2 - \overline{MB}\right)^2 = \pi \cdot (1{,}58^2 - 1{,}14^2) = 3{,}76\,m^2$

$A_{Halbkugel}$:

$A_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi \cdot \overline{MD}^2 = 2\pi \cdot 1{,}58^2 = 15{,}69\,m^2$

A_{ges}: $A_{ges} = M_{Keg} + A_{Ring} + A_{Halbkugel} = 13{,}25 + 3{,}76 + 15{,}69 = 32{,}7$

Das Kunstwerk hat eine Oberfläche von $32{,}7\,m^2$.

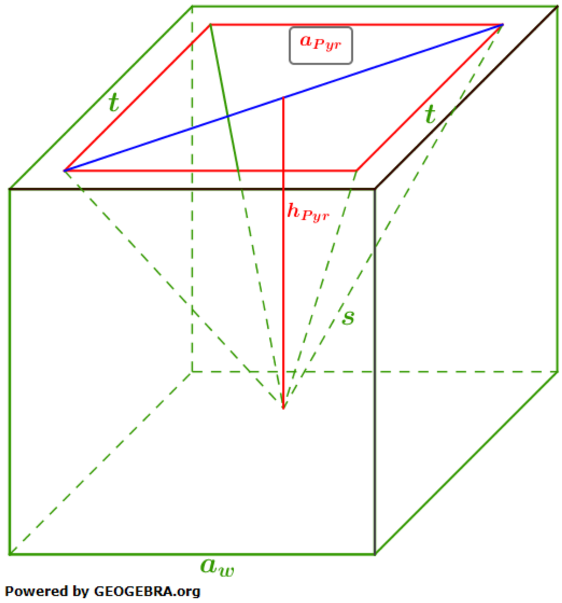
b) $n = \frac{A_{ges}}{10} = \frac{32{,}7}{10} = 3{,}27$

Es müssen vier $1l$*-Dosen Farbe gekauft werden.*

Lösung P2/2022

<u>Lösungslogik</u>

Wir bestimmen zunächst das Volumen einer Wachskugel über die Volumenformel einer Kugel.
Das Kugelvolumen multipliziert mit 1000 ergibt das Gesamtvolumen des zu verarbeitenden Wachses.
Nun bestimmen wir das Volumen der Pyramide in der Gussform über die Volumenformel einer quadratischen Pyramide mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G_{Pyr} \cdot h_{pyr}$.
Die Grundfläche der Pyramide ergibt sich aus a_{Pyr}^2, wobei $a_{pyr} = a_w - 2 \cdot t$ ist.
Die Höhe der Pyramide bestimmen wir mit dem Satz des Pythagoras mit als Hypotenuse, die halbe Diagonale der Grundfläche der Pyramide und der Höhe der Pyramide selbst.



Nun kann das Volumen errechnet werden. Das Gesamtvolumen des zu verarbeitenden Wachses dividiert durch das Volumen der Pyramide ergibt die Anzahl der herzustellenden Pyramiden.

<u>Klausuraufschrieb</u>

$n_{Pyr} = \frac{V_{Wachs}}{V_{Pyr}}$

V_{Wachs}: $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 = 14{,}14\ cm^3$

$V_{Wachs} = 1000 \cdot V_{Kugel} = 14140\ cm^3$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a_{Pyr}^2 \cdot h_{pyr}$

a_{Pyr}: $a_{Pyr} = a_W - 2 \cdot t = 10 - 2 = 8\ cm$

h_{Pyr}: $s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h_{Pyr}^2$ | Satz des Pythagoras

d: $d = a_{Pyr} \cdot \sqrt{2}$ | Länge der Diagonalen

$d = 8 \cdot \sqrt{2} = 11{,}3138$

$h_{Pyr} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{11{,}3138}{2}\right)^2} = 7$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 7 = \frac{443}{3}\ cm^3$

n_{Pyr}: $n_{Pyr} = \frac{14140}{\frac{443}{3}} = 95{,}75$

Es können 95 Pyramiden aus dem Wachs geformt werden .