## zu zusammengesetzten Körpern

## **Themenerläuterung**

Im Kapitel **Zusammengesetzte Körper** geht es um die Berechnung von Volumen und Oberfläche von zusammengesetzten Körpern aus z.B. Würfeln, Quadern, Pyramiden, Kegeln, Halbkugeln usw. Es kommen auch Aufgaben vor, bei denen ein Körper aus einem anderen Körper "ausgebohrt", "ausgearbeitet" wurde.



Bei diesen Aufgaben ist es wichtig zu erkennen, ob die Volumen der einzelnen Körper addiert oder subtrahiert werden müssen, bzw. welche Oberflächen "verdeckt" sind bzw. "nicht vorhanden" und damit nicht mehr zur gesamten Oberfläche gehören.

Einige Aufgaben sind auch mit der sogenannten "Formvariablen e" gestellt.

## Die wichtigsten benötigten Formeln

1. Satz des Pythagoras

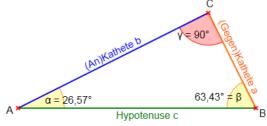
Ist im rechtwinkligen Dreieck c die Hypothenuse (= längste Seite) und a und b die beiden Katheten, so gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
 bzw.  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$   
 $a^2 = c^2 - b^2$  bzw.  $a = \sqrt{c^2 - b^2}$   
 $b^2 = c^2 - a^2$  bzw.  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ 

2. Die trigonometrischen Formeln

$$sin(\alpha) = rac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$
 $cos(\alpha) = rac{Ankathete}{Hypothenuse}$ 
 $tan(\alpha) = rac{Gegenkathete}{Ankathete}$ 

Die Hypothenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und liegt dem rechten Winkel gegenüber.



Die **Gegen**kathete ist die Kathete, die dem Winkel, um den es geht, **gegenüber** liegt.

Die **An**kathete ist die Kathete, die an dem Winkel, um den es geht, **anliegt**.

3. Quadrat und Würfel

Sei a die Seitenkante, dann gilt:

Fläche des Quadrates:

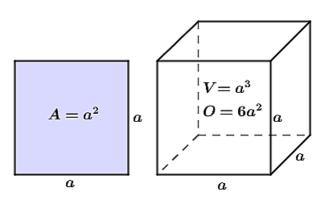
$$A = a^2$$
;  $a = \sqrt{A}$ 

Volumen des Würfels:

$$V=a^3; \quad a=\sqrt[3]{V}$$

Oberfläche des Würfels:

$$0 = 6 \cdot a^2; \quad a = \sqrt{\frac{o}{6}}$$



Powered by GEOGEBRA.org

### zu zusammengesetzten Körpern

### 4. Rechteck und Quader

Seien a und b die Seitenkante der rechteckigen Grundfläche und c die Höhe des Quaders, dann gilt:

Grundfläche des Quaders:

$$G = a \cdot b$$

Volumen des Quaders:

$$V = G \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

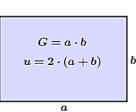
Oberfläche des Quaders:

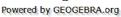
$$O = 2 \cdot G + M$$

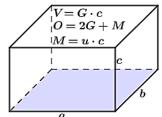
Mantelfläche des Quaders:

$$M = u \cdot c \text{ mit } u = 2 \cdot (a + b)$$

(u = Umfang der Grundfläche)







### 5. Prisma

Sei G die Grundfläche eines Prismas und h dessen Höhe, so gilt:

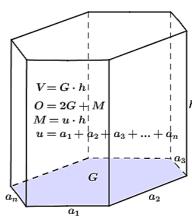
$$V = G \cdot h$$
;  $h = \frac{V}{G}$ ;  $G = \frac{V}{h}$   
Oberfläche des Prismas:

$$O = 2 \cdot G + M$$

Mantelfläche des Prismas:

$$M = u \cdot h$$

(u = Umfang der Grundfläche)



Powered by GEOGEBRA.org

### Regelmäßige n-Eckpyramide 6. Sei G die Grundfläche einer Pyramide h deren

Höhe und n die Anzahl der Ecken der Grundfläche, so gilt:

Für die Grundfläche:

$$G = n \cdot A_{Dreieck} = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot sin\gamma$$
 bzw.

$$G = n \cdot A_{Dreieck} = \frac{2}{2} \cdot a \cdot h_g$$

mit

$$\gamma = \frac{360^{\circ}}{n} \text{ und } \alpha = \frac{180^{\circ} - \gamma}{2}$$

$$r = \frac{a}{2 \cdot cos\alpha} \text{ und } h_g = \frac{a}{2} \cdot tan\alpha$$
Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h; \quad h = \frac{3V}{G}; \quad G = \frac{3V}{h}$$
  
Oberfläche der Pyramide:

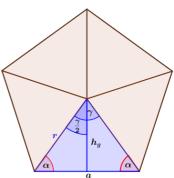
$$O = G + M$$

Mantelfläche der Pyramide:

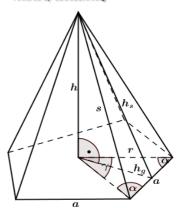
$$M = \frac{n}{2} \cdot a \cdot h_S$$

 $(h_s = H\ddot{o}he eines Seitendreiecks)$ 

Diese Formeln gelten auch für Dreieck-, quadratische und Sechseck-Pyramiden.



owered by GEOGEBRA.org



a Powered by GEOGEBRA.org

zu zusammengesetzten Körpern

### Kreis und Kugel 7.

### Kreis:

Für die Fläche A eines Kreises mit Radius r und Durchmesser d gilt:

$$A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

$$d = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

Für den Umfang u eines Kreises mit Radius r und Durchmesser d gilt:

$$u = 2\pi \cdot r = d \cdot \pi$$
$$r = \frac{u}{2\pi}; \qquad d = \frac{u}{\pi}$$

# $\boldsymbol{A}$

### Kugel:

Für eine Kugel mit Radius r bzw. Durchmesser *d* gilt:

Volumen:

$$\overline{V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3} = \frac{1}{3}\pi \cdot d^2$$

$$\overline{0 = 4\pi r^2} = \pi d^2$$

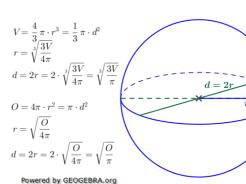
Radius bzw. Durchmesser:

Bei gegebenem Volumen V gilt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}; \quad d = 2r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Bei gegebener Oberfläche O gilt:

$$r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}; \quad d = 2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{o}{4\pi}} = \sqrt{\frac{o}{\pi}}$$



### 8. Kreiskegel

Sei G die Grundfläche eines Kreiskegels und h dessen Höhe, so gilt: Volumen des Kegels:

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$h = \frac{3V}{\pi \cdot r^2}; \quad G = \pi \cdot r^2$$

Mantelfläche des Kreiskegels:

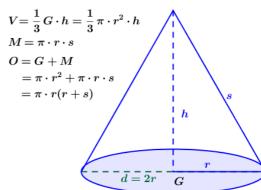
$$M = \pi \cdot r \cdot s$$

(s = Länge der Seitenkante)

Oberfläche des Kreiskegels:

$$0 = G + M = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

$$0 = G + M = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$
  
$$0 = \pi \cdot r \cdot (r + s)$$



Powered by GEOGEBRA.org

zu zusammengesetzten Körpern

9. Besondere Werte für sin, cos und tan
Einige Aufgaben sind in Abhängigkeit einer sogenannten "Formvariablen"
gestellt. Diese Formvariable wird mit dem Buchstaben "e" bezeichnet. In
diesen Aufgaben wird verlangt, dass du den Nachweis ohne gerundete
Werte führen sollst. Dies bedeutet für dich, dass du keinen Taschenrechner
verwenden kannst und die Aufgabe manuell lösen musst.
In diesen Aufgaben handelt es sich stets nur um Winkel der Größe 30°, 45°,
60° bzw. 90°. Für diese Winkelgrößen gibt es besondere Werte, die in
nachstehender Tabelle aufgeführt sind. Diese Tabelle findest du auch in

deiner Formelsammlung.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sinα	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,5	0
cosα	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,5	0	-0,5	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
tanα	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0

zu zusammengesetzten Körpern

### Aufgabe A1

Aus einem Zylinder wird konzentrisch zur Drehachse ein Kegel herausgearbeitet.

Es gilt:

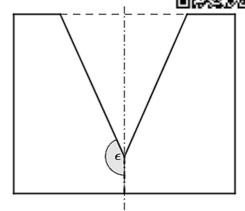
$$V_{Zylinder} = 326,6 cm^3$$

$$r_{Zylinder} = 3.8 cm$$

Das Volumen des Kegels beträgt ein Achtel des Zylindervolumens. Die Höhe ist zwei Zentimeter kürzer als die des Zylinders.

Berechnen Sie den Winkel  $\epsilon$ .

Lösung:  $\epsilon = 152,2^{\circ}$ 



Powered by GEOGEBRA.org

### Aufgabe A2

Die Abbildung zeigt einen Drehkörper. Für den zylinderförmigen Teil gilt:

$$M = 73.9 cm^2$$

$$h = 4.2 cm$$

Die Größe der Mantelfläche des oberen Kegels entspricht fünf Achtel der Mantelfläche des Zylinders. Für Winkel  $\varphi$  gilt:

$$\varphi = 163,1^{\circ}$$

Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers.

Wie groß ist die Oberfläche eines Zylinders, für den gilt:

$$V_{Zylinder} = V_{Drehk\"{o}rper}$$

$$r_{Zvlinder} = r_{Drehk\"{o}rper}$$

Lösung: 
$$V = 216 cm^3$$

$$O_{Zvl} = 204 \ cm^2$$

## Aufgabe A3

Von einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma sind bekannt:

$$0 = 308.4 cm^2$$
 (Oberfläche)

$$a = 4.2 cm$$
 (Grundkante)

Aus dem Prisma werden – wie abgebildet – zwei Teile ausgebohrt. Bohrachsen sind die senkrechten Kanten des Prismas. Die beiden Teile haben die Form von Zylinderausschnitten. Für den Radius der Bohrung gilt:

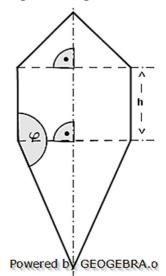
$$r = \frac{a}{2}$$

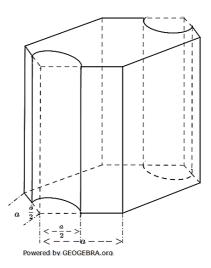
Ermitteln Sie die prozentuale Veränderung des Volumens.

Berechnen Sie die Mantelfläche des neuen Körpers. Lösung: Prozentuale Abnahme des Volumens:

$$p\% = 20.2\%$$

$$M_{Nev} = 220.2 \ cm^2$$







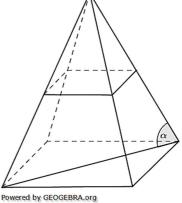
zu zusammengesetzten Körpern

## Aufgabe A4

Eine quadratische Pyramide wird im Abstand von  $6.2\ cm$  parallel zur Grundfläche zerschnitten.

Die Höhe  $h_{\mathcal{S}_2}$  auf der Seite der Restpyramide ist 13,6 cm lang. Sie ist damit doppelt so lang, wie die Höhe  $h_{\mathcal{S}_1}$  auf der Seite des entstandenen Pyramidenstumpfes.

Berechnen Sie den Neigungswinkel  $\alpha$  der Seitenkante s. Lösung:  $\alpha = 57.5^{\circ}$ 



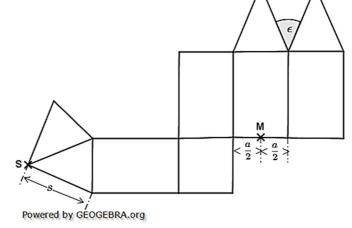
### Aufgabe A5

Die Abbildung zeigt das Netz eines quadratischen Quaders mit ausgefräster Pyramide. Der Flächeninhalt des Netzes beträgt 230,5  $cm^2$ .

$$\epsilon = 55,6^{\circ}$$
 (Winkel)  
 $s = 6,0 \ cm$  (Seitenkante)  
Berechnen Sie die Entfernung

zwischen den Punkten S und M im Körper.

Lösung: 
$$\overline{SM} = 3.3 cm$$



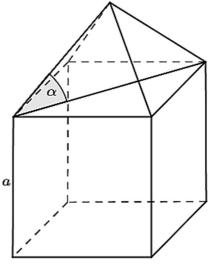
## Aufgabe A6

Ein Körper besteht aus einem Würfel mit aufgesetzter Pyramide. Es gilt:

$$a = 4e$$
 (Würfelkante)  
 $\alpha = 60^{\circ}$  (Winkel)

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für die Oberfläche des Körpers gilt:

$$0 = 16e^2(5 + \sqrt{7})$$



Powered by GEOGEBRA.org

