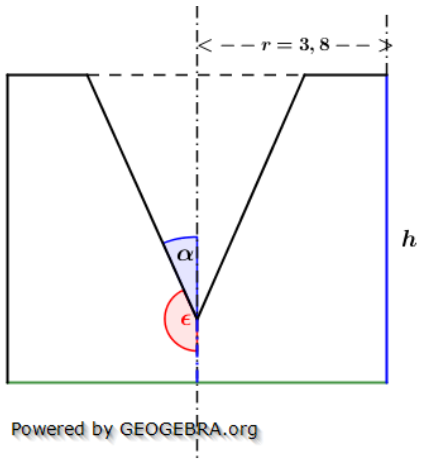
Hinweis zu den Lösungen
In den Graphiken stellen **grüne** Linien, Werte und Flächen vorgegebene Werte, **rote** Linien, Werte und Flächen gesuchte Werte und **blaue** Linien, Werte und Flächen zu ermittelnde Zwischenwerte zur Erreichung der Endergebnisse dar.

Lösung A1

Detaillierte Lösung

Lösungsschritte:

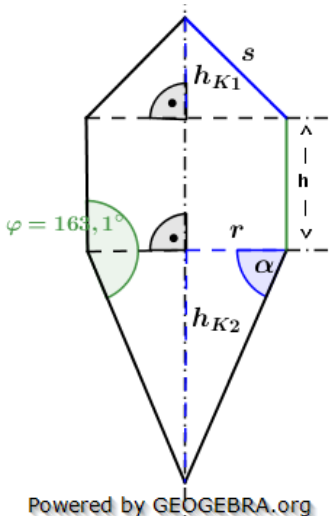
1. Über das gegebene Volumen des Zylinders und dessen Radius berechnen wir die Zylinderhöhe.
   $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad | \qquad :(\pi r^2)$
   $h = \frac{V_{Zylinder}}{\pi \cdot r^2} = \frac{326{,}6}{\pi \cdot 3{,}8^2} = 7{,}2$
2. Der Kegel hat $\frac{1}{8}$ des Volumens des Zylinders.
   $V_{Kegel} = \frac{1}{8} \cdot V_{Zylinder} = \frac{1}{8} \cdot 326{,}6 = 40{,}825$
3. Die Höhe des Kegels ist zwei Zentimeter kürzer.
   $h_{Kegel} = h - 2 = 7{,}2 - 2 = 5{,}2$
4. Wir berechnen den Radius des Kegels über die Volumenformel des Kegels.
   $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Kegel}^2 \cdot h_{Kegel} \qquad | \qquad \cdot 3;\ :(\pi \cdot h_{Kegel});\ \sqrt{\ }$
   $r_{Kegel} = \sqrt{\frac{3 \cdot V_{Kegel}}{\pi \cdot h_{Kegel}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 40{,}825}{\pi \cdot 5{,}2}} = 2{,}74$
5. Wir berechnen α über den tan.
   $tan\alpha = \frac{r_{Kegel}}{h_{Kegel}} = \frac{2{,}74}{5{,}2} = 0{,}526923$
   $\alpha = tan^{-1}(0{,}93269) = 27{,}8°$
6. Wir berechnen ϵ als Ergänzungswinkel zu 180° von α.
   $\epsilon = 180° - \alpha = 180° - 27{,}8° = 152{,}2°$



Lösung A2

Lösungslogik

Mit der gegebenen Mantelfläche und der Höhe des Zylinders lässt sich der Radius r errechnen.
Mit $\frac{5}{8}$ der Mantelfläche des Zylinders des oberen Kegels ermitteln wir die Seitenkante s.
Mit dem Satz des Pythagoras errechnet wir h_{K_1}.
Wir berechnen α.
h_2 errechnet sich über den $tan\alpha$.
Wir berechnen das Volumen des Drehkörpers.
Über das Volumen des Drehkörpers berechnen wir die Höhe des zweiten Zylinders und daraus wiederum seine Oberfläche.



Klausuraufschrieb

r: $M_{Zyl} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ | $:(2\pi h)$

$r = \frac{M_{Zyl}}{2\pi h} = \frac{73{,}9}{2\pi \cdot 4{,}2} = 2{,}80$

s: $M_{K_1} = \frac{5}{8} \cdot M_{Zyl} = \pi \cdot r \cdot s$ | $:(\pi \cdot r)$

$s = \frac{5 \cdot M_{Zyl}}{8 \cdot \pi \cdot r} = \frac{5 \cdot 73{,}9}{8 \cdot \pi \cdot 2{,}8} = 5{,}25$

h_{K_1}: $h_{K_1} = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{5{,}25^2 - 2{,}8^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{K_1} = \sqrt{19{,}7225} = 4{,}44$

α: $\alpha = \varphi - 90° = 163{,}1° - 90° = 73{,}1°$

h_{K_2}: $tan\alpha = \frac{h_{K_2}}{r}$ | $\cdot r$

$h_{K_2} = r \cdot tan\alpha = 2{,}8 \cdot tan73{,}1° = 9{,}22$

V: $V = V_{K_1} + V_{Zyl} + V_{K_2}$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{K_1} + \pi r^2 \cdot h + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{K_2}$

$= \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}8^2 \cdot 4{,}44 + \pi \cdot 2{,}8^2 \cdot 4{,}2 + \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}8^2 \cdot 9{,}22$

$= 36{,}45 + 103{,}45 + 75{,}70 = 215{,}6$

Das Volumen des Drehkörpers beträgt $216\ cm^3$.

h_2: $V_2 = V_{Drehkörper} = \pi r^2 \cdot h_2$ | $:(\pi \cdot r)$

$h_2 = \frac{V_{Drehkörper}}{\pi r^2} = \frac{216}{\pi \cdot 2{,}8^2} = 8{,}77$

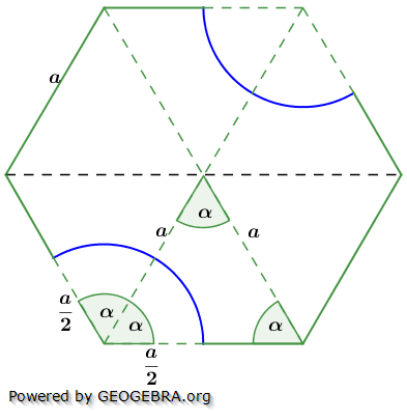
O_{Zyl}: $O_{Zyl} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h_2 = 2\pi \cdot 2{,}8^2 + 2\pi \cdot 2{,}8 \cdot 8{,}77 = 203{,}55$

Die Oberfläche des Zylinders beträgt $204\ cm^2$.

Lösung Aufgabe A3

Lösungslogik

Die Abbildung zeigt die Draufsicht auf das Prisma. Mit der gegebenen Oberfläche O des unausgebohrten Prismas und der Seitenkante a lässt sich die Höhe des Prismas ermitteln.
Hierzu benötigen wir zunächst die Fläche des Sechsecks.
Der Mantel des Prismas errechnet sich dann aus der Differenz der Oberfläche O plus 2mal der Fläche des Sechsecks. Über den Umfang des Sechsecks und der Mantelfläche ergibt sich dann die Höhe des Prismas.
Jetzt kann das Volumen de Prismas ermittelt werden.



Vom Gesamtvolumen muss nun das Volumen abgezogen werden, welches durch die beiden Bohrungen wegfällt. Wegen des Sechsecks mit seinen Außenwinkeln von $120°$ fallen $\frac{2}{3}$ des Volumens eines Zylinders mit dem Radius $\frac{a}{2}$ weg.
Zur Ermittlung der prozentualen Abnahme werden die beiden Volumina ins Verhältnis gesetzt.
Für die Mantelfläche des neuen Körpers müssen wir den Umfang des Sechsecks mit den Bohrungen ermitteln. Zum einen fallen vom Umfang viermal $\frac{a}{2}$ weg, hinzu kommt aber $\frac{2}{3}$ des Kreisumfangs der Bohrungen mit Radius $\frac{a}{2}$.
Über Umfang mal Höhe errechnet sich dann die neue Mantelfläche.

Klausuraufschrieb

A_{6-Eck} : $A_{6-Eck} = 6 \cdot a^2 \cdot sin\alpha$ | trigonometrischer Flächeninhalt

$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,2^2 \cdot sin60° = 45,83$

M_{Pris} : $M_{Pris} = O - 2 \cdot A_{6-Eck} = 308,4 - 2 \cdot 45,83 = 216,74$

u_{6-Eck} : $u_{6-Eck} = 6 \cdot a = 6 \cdot 4,2 = 25,2$

h: $M_{Pris} = u_{6-Eck} \cdot h$ | $: u_{6-Eck}$

$h = \frac{M_{Pris}}{u_{6-Eck}} = \frac{216,74}{25,2} = 8,6$

V_{Pris} : $V_{Pris} = A_{6-Eck} \cdot h = 45,83 \cdot 8,6 = 394,2$

V_{Bohr}: $V_{Bohr} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot 2,1^2 \cdot 8,6 = 119,15$

V_{Neu} : $V_{Neu} = V_{Pris} - \frac{2}{3} \cdot V_{Bohr} = 394,2 - \frac{2}{3} \cdot 119,15 = 314,77$

$p\%$: $p\% = 100\% - \frac{V_{Neu}}{V_{Pris}} \cdot 100 = 100\% - \frac{314,77}{394,2} \cdot 100 = 20,15\ \%$

Die prozentuale Abnahme des Volumens beträgt $20,2\ \%$.

u_{Neu}: $u_{Neu} = 6 \cdot a - 4 \cdot \frac{a}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{a}{2} = 4a + \frac{2}{3}\pi a = 4 \cdot 4,2 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4,2 = 25,6$

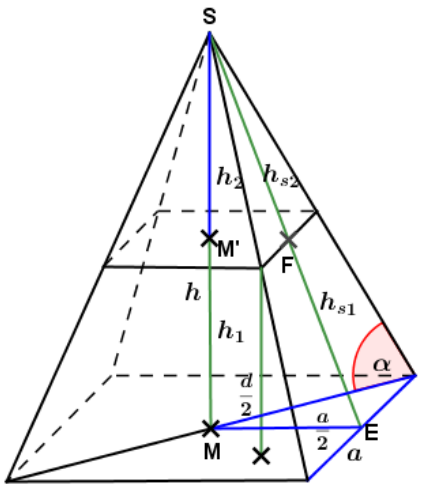
M_{Neu}: $M_{Neu} = u_{Neu} \cdot h = 25,6 \cdot 8,6 = 220,16$

Die Mantelfläche des neuen Körpers beträgt $220,2\ cm^2$.

Lösung Aufgabe A4

Lösungslogik

Mit der gegebenen Seitenhöhe h_{S_2} errechnet sich die Seitenhöhe h_{S_1}.
Die Strecke h_1 ist der Abstand $6,2\ cm$ des Parallelschnitts.
Über den 1. Strahlensatz kann damit h_2 errechnet werden und daraus die Gesamthöhe h der Pyramide.
Berechnung von $\frac{a}{2}$ mit dem Satz des Pythagoras und daraus a.
Berechnung von d über die Diagonale der quadratischen Grundfläche und daraus $\frac{d}{2}$.
Berechnung von α über den tan.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

h_{S_1}: $h_{S_1} = \frac{1}{2} \cdot h_{S_2} = \frac{1}{2} \cdot 13,6 = 6,8$

h_2: $\frac{h_2}{h_{S_2}} = \frac{h_1}{h_{S_1}}$ | $\cdot h_{S_2}$

$h_2 = \frac{h_1}{h_{S_1}} \cdot h_{S_2} = \frac{6,2}{6,8} \cdot 13,6 = 12,4$

h: $h = h_1 + h_2 = 6,2 + 12,4 = 18,6$

$\frac{a}{2}$: $\frac{a}{2} = \sqrt{\left(h_{S_1} + h_{S_2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{20,4^2 - 18,6^2}$ | Satz des Pythagoras

$\frac{a}{2} = \sqrt{70,2} = 8,38 \implies a = 16,76$

d: $d = a \cdot \sqrt{2} = 16,76 \cdot \sqrt{2} = 23,7$ | Diagonale im Quadrat

$\frac{d}{2}$: $\frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 23,7 = 11,85$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

α: $\quad tan\alpha = \frac{h}{\frac{d}{2}} = \frac{18,6}{11,85} = 1,5696$

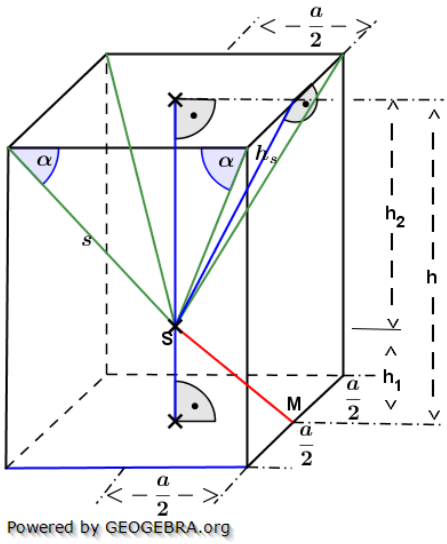
$\alpha = tan^{-1}(1,5696) = 57,4989°$

Der Neigungswinkel α der Seitenkante s beträgt $57,5°$.

Lösung Aufgabe A5

Lösungslogik

Die Skizze zeigt das Schrägbild des Körpers.
Der Basiswinkel α der gleichschenkligen Seitendreiecke der Pyramide errechnet sich über den Ergänzungswinkel zum gegebenen Winkel ϵ.
Mit der gegebenen Seitenkante s und dem Winkel α lässt sich $\frac{a}{2}$ über den $cos\alpha$ bestimmen und daraus a, sowie h_s über den Satz des Pythagoras.
Jetzt lässt sich h_2 über den Satz des Pythagoras bestimmen.
Berechnung der Mantelfläche der Pyramide.
Mit dem gegebenen Flächeninhalt des Netzes abzüglich der Mantelfläche der Pyramide erhalten wir die Restfläche der vier Seitenrechtecke und der Grundfläche.



Hieraus lässt sich jetzt die Gesamthöhe h des Körpers bestimmen.
Berechnung von h_1 über die Differenz von h und h_2.
Berechnung von $\overline{SM}$ über den Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

α: $\quad \alpha = \frac{180°-\epsilon}{2} = \frac{180°-55,6°}{2} = 62,2°$

$\frac{a}{2}$: $\quad cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{2} \quad | \quad \cdot s$

$\frac{a}{2} = s \cdot cos\alpha = 6 \cdot cos62,2° = 2,8$

a: $\quad a = 2 \cdot \frac{a}{2} = 5,6$

h_s: $\quad h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 - 2,8^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$h_s = \sqrt{28,16} = 5,3$

h_2: $\quad h_2 = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5,3^2 - 2,8^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$h_2 = \sqrt{20,25} = 4,5$

M_{Pyr}: $\quad M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 5,6 \cdot 5,3 = 59,36$

O_{Rest}: $\quad O_{Rest} = O - M_{Pyr} = 230,5 - 59,36 = 171,14$

h: $\quad O_{Rest} = 4 \cdot a \cdot h + a^2 \quad | \quad -a^2; : (4a)$

$h = \frac{O_{Rest}-a^2}{4a} = \frac{171,14-5,6^2}{4 \cdot 5,6} = 6,24$

h_1: $\quad h_1 = h - h_2 = 6,24 - 4,5 = 1,74$

$\overline{SM}$: $\quad \overline{SM} = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{1,74^2 + 2,8^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

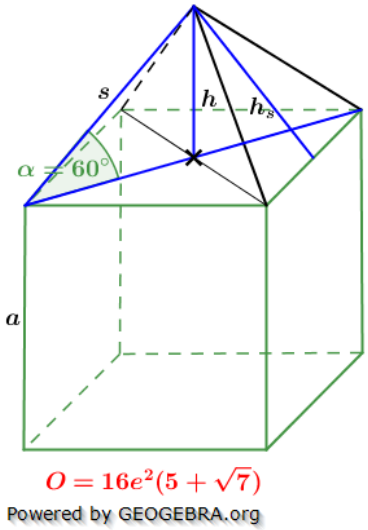
$\overline{SM} = \sqrt{10,8676} = 3,297$

Die Strecke $\overline{SM}$ ist $3,3\ cm$ lang.

Lösung Aufgabe A6

Lösungslogik

Berechnung der Diagonalen d der quadratischen Grundfläche und daraus $\frac{d}{2}$.
Berechnung von h über den $tan60°$.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Oberfläche des Würfels ohne die Deckfläche (die ist verdeckt)
Berechnung der Gesamtoberfläche.



Klausuraufschrieb

d: $\quad d = a \cdot \sqrt{2} = 4e \cdot \sqrt{2}$

$\frac{d}{2}$: $\quad \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 4e \cdot \sqrt{2} = 2e\sqrt{2}$

h: $\quad tan\alpha = \frac{h}{\frac{d}{2}} \quad | \quad \cdot \frac{d}{2}$

$h = \frac{d}{2} \cdot tan\alpha = 2e\sqrt{2} \cdot tan60° = 2e\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$h = 2e\sqrt{6}$

s: $\quad s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e\sqrt{6})^2 + \left(2e\sqrt{2}\right)^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{4e^2 \cdot 6 + 4e^2 \cdot 2} = \sqrt{32e^2} = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot e^2} = 4e\sqrt{2}$

h_s: $\quad h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e\sqrt{6})^2 + (2e)^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$h_s = \sqrt{4e^2 \cdot 6 + 4e^2} = \sqrt{28e^2} = \sqrt{4 \cdot 7 \cdot e^2} = 2e\sqrt{7}$

M_{Pyr}: $\quad M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 4e \cdot 2e\sqrt{7} = 16e^2\sqrt{7}$

$O_{Würfel}$: $\quad O_{Würfel} = 6 \cdot a^2 - a^2 = 5 \cdot a^2 = 5 \cdot (4e)^2 = 5 \cdot 16e^2 = 80e^2$

O_{Ges}: $\quad O_{Ges} = M_{Pyr} + O_{Würfel} = 16e^2\sqrt{7} + 80e^2 = 16e^2(5+\sqrt{7})$

q.e.d.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de