

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu zusammengesetzten Körpern

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Wahlteil B) ab 2022-heute
2 Aufgaben im Dokument



Aufgabe B2b/2022

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem regelmäßigen Fünfeckprisma mit aufgesetzter regelmäßiger fünfseitiger Pyramide.

Es gilt:

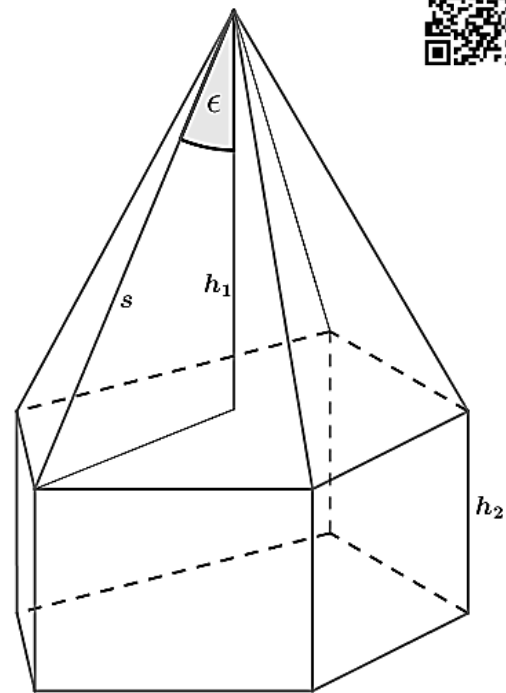
$$s = 12,6 \text{ cm}$$

$$\epsilon = 33^\circ$$

$$h_2 = 5,6 \text{ (Höhe Prisma)}$$

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers.

$$\text{Lösung: } O_{\text{Körper}} = 578,4 \text{ cm}^2$$



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe B2b/2023

Aus einem Kegel wird eine regelmäßige fünfseitige Pyramide ausgearbeitet (siehe Abbildung).

Die Eckpunkte der Grundfläche der fünfseitigen Pyramide liegen auf der Kreislinie der Grundfläche des Kegels.

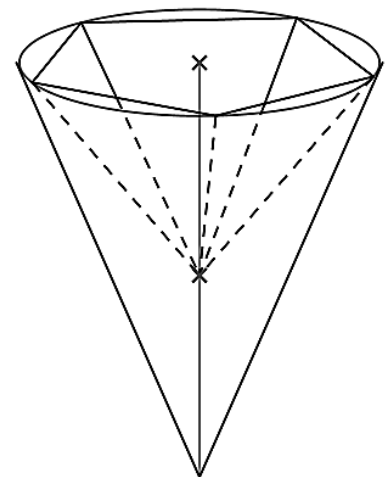
Es gilt:

$$a = 8,6 \text{ cm (Grundkante Pyramide)}$$

$$h_K = 15,2 \text{ cm (Körperhöhe Kegel)}$$

$$h_P = 7,6 \text{ cm (Körperhöhe Pyramide)}$$

Um wie viele cm^2 unterscheiden sich die Inhalte der Mantelfläche des Kegels und der Pyramide?



Powered by GEOGEBRA.org

$$\text{Lösung: Kegelmantel } M_K = 387,95 \text{ cm}^2$$

$$\text{Pyramidenmantel } M_P = 207,05 \text{ cm}^2$$

$$\text{Unterschied } M_K - M_P = 180,9 \text{ cm}^2$$

Lösung B2b/2022

Lösungslogik

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ergibt sich aus der Summe der Fläche der fünfseitigen Grundfläche, dem Mantel des fünfseitigen Prismas sowie dem Mantel der fünfseitigen aufgesetzten Pyramide.

Zur Berechnung der aufgeführten Flächen sind zunächst noch Vorberechnungen zu machen (siehe Grafik rechts).

Winkel γ :

Wegen des regelmäßigen Fünfecks ist $\gamma = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Radius r :

Berechnung über den $\sin(\epsilon)$.

Seitenkante a :

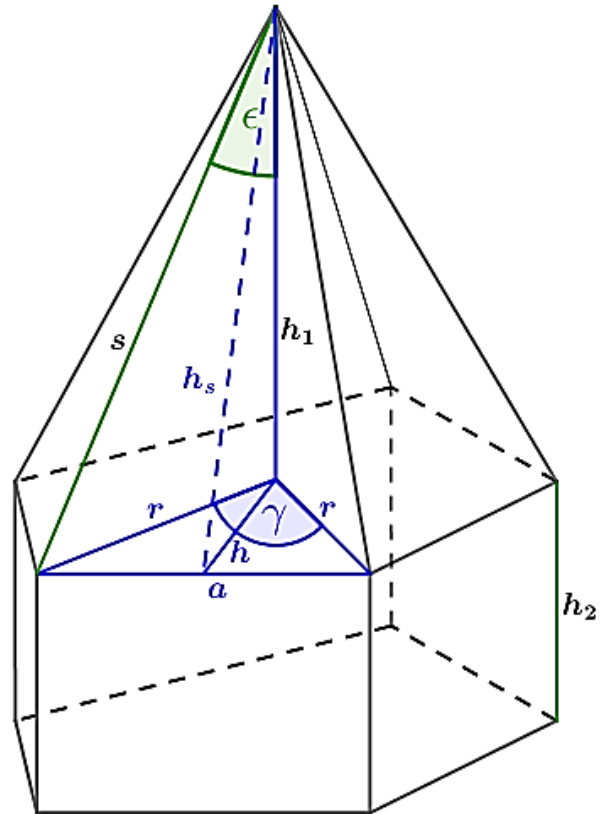
Berechnung von $\frac{1}{2}a$ über den $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

Höhe h Basisdreieck Grundfläche:

Berechnung über den Satz des Pythagoras.

Höhe h_s Seitendreieck Pyramide:

Berechnung über den Satz des Pythagoras.



Powered by GEOGEBRA.org

Größe der Grundfläche (regelmäßiges Fünfeck):

Die Größe der Grundfläche bestimmt sich über 5 Basisdreiecke über

$$A_{\text{Fünfeck}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Größe der Mantelfläche fünfseitiges Prisma:

$$M_{\text{Prisma}} = 5 \cdot a \cdot h_2$$

Größe der Mantelfläche fünfseitige Pyramide:

$$M_{\text{Pyramide}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

Klausuraufschrieb

Vorberechnungen (siehe Grafik oben):

$$\gamma: \quad \gamma = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

$$r: \quad \sin(\epsilon) = \frac{r}{s}$$

$$r = s \cdot \sin(\epsilon) = 12,6 \cdot \sin(33^\circ) = 6,86$$

$$a: \quad \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{r}$$

$$\frac{a}{2} = r \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$a = 2r \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 6,86 \cdot \sin(36^\circ) = 8,064$$

$$h: \quad r^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6,86^2 - 4,03^2} = 5,55$$

$$h_s: \quad s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12,6^2 - 4,03^2} = 11,94$$

Oberfläche zusammengesetzter Körper:

$O_{\text{Körper}}:$

$$O_{\text{Körper}} = A_{\text{Fünfeck}} + M_{\text{Prisma}} + M_{\text{Pyramide}}$$

$A_{\text{Fünfeck}}:$

$$A_{\text{Fünfeck}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,064 \cdot 5,55 = 111,888$$

$M_{\text{Prisma}}:$

$$M_{\text{Prisma}} = 5 \cdot a \cdot h_2 = 5 \cdot 8,064 \cdot 5,6 = 225,792$$

$M_{\text{Pyramide}}:$

$$M_{\text{Pyramide}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,064 \cdot 11,94 = 240,71$$

$$O_{\text{Körper}} = 111,888 + 225,762 + 240,71 = 578,36$$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ist 578,4 cm² groß.

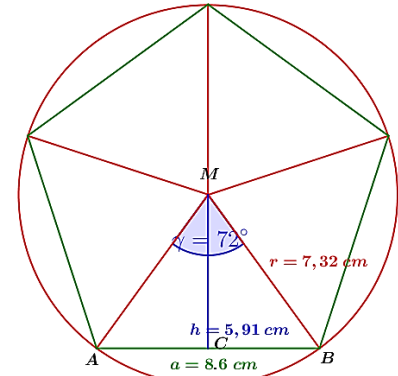
Lösung B2b/2023

Lösungslogik

Flächeninhalt des Kegelmantels:

$$M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$$

Wir benötigen zunächst den Radius des Kegels, welcher gleichzeitig der Umkreisradius der Grundfläche der Pyramide ist. Die Seitenkante des Kegels ergibt sich danach aus dem Satz des Pythagoras.



Powered by GEOGEBRA.org

Flächeninhalt des

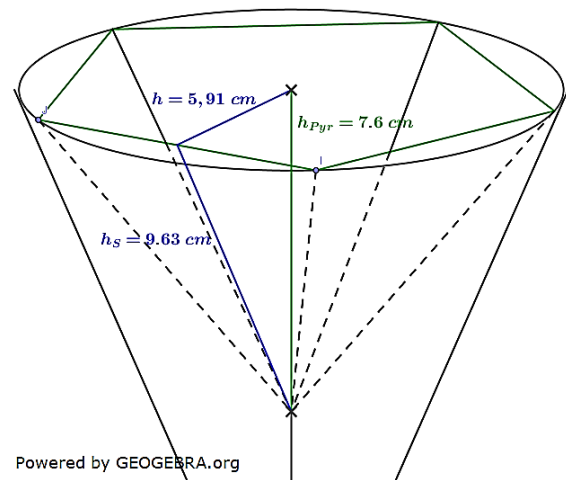
Pyramidenmantels:

Der Mantel der fünfseitigen Pyramide besteht aus 5 Dreiecken mit der Grundseite $a = 8,6 \text{ cm}$ und der Höhe h_s .

Die Höhe h eines Teildreiecks der Grundfläche der Pyramide errechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.

Ebenfalls über den Satz des Pythagoras kann jetzt die Höhe h_s der Dreiecke des Pyramidenmantels bestimmt werden.

Damit kann der Pyramidenmantel berechnet werden.



Powered by GEOGEBRA.org

Flächenunterschied zwischen Kegelmantel und Pyramidenmantel:

Der Unterschied bestimmt sich aus der Differenz von Kegelmantel und Pyramidenmantel.

Klausuraufschrieb

Flächeninhalt des Kegelmantels:

Vorberechnungen (siehe Grafik oben):

$$\gamma: \quad \gamma = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

$$M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$$

$$r_{Keg}: \quad \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{r_{Keg}} \quad | \quad \cdot r_{Keg}; \quad : \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$r_{Keg} = \frac{\frac{a}{2}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{8,6}{2 \cdot \sin(36)} = 7,32 \text{ cm}$$

$$s: \quad s^2 = r^2 + h_{Keg}^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s = \sqrt{r^2 + h_{Keg}^2} = \sqrt{7,32^2 + 15,2^2} = 16,87 \text{ cm}$$

$$M_{Keg} = \pi \cdot 7,32 \cdot 16,87 = 387,95 \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt des Pyramidenmantels:

$$M_{Pyr} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

$$h: \quad r_{Keg}^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h = \sqrt{r_{Keg}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7,32^2 - 4,3^2} = 5,91 \text{ cm}$$

$$h_s: \quad h_s^2 = h^2 + h_{Pyr}^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_s = \sqrt{h^2 + h_{Pyr}^2} = \sqrt{5,91^2 + 7,6^2} = 9,63$$

$$M_{Pyr} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 2,5 \cdot 8,6 \cdot 9,63 = 207,05 \text{ cm}^2$$

Flächenunterschied zwischen Kegelmantel und Pyramidenmantel:

$$\Delta M = M_{Keg} - M_{Pyr} = 387,95 - 207,05 \text{ cm}^2 = 180,9$$

Der Flächenunterschied zwischen Kegelmantel und Pyramidenmantel beträgt $180,9 \text{ cm}^2$