

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu zusammengesetzten Körpern

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Wahlteil) ab 2003
8 Aufgaben im Dokument



Aufgabe W1a/2004

Ein Körper besteht aus zwei quadratischen Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche. Die Skizze zeigt den Diagonalschnitt des Körpers. Gegeben sind:

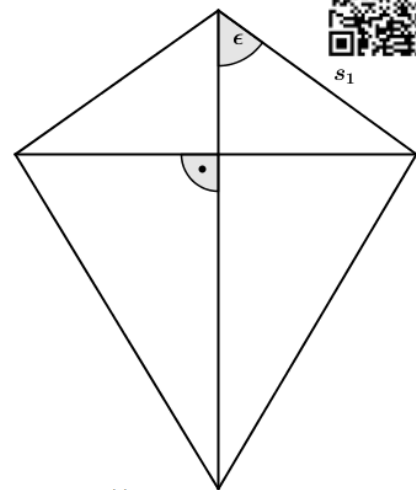
$$s_1 = 12,4 \text{ cm}$$

$$\epsilon = 52,8^\circ$$

Das Volumen der unteren Pyramide ist doppelt so groß wie das der oberen.

Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers.

Lösung: $O = 748,5 \text{ cm}^2$



Powered by GEOGEBRA.org

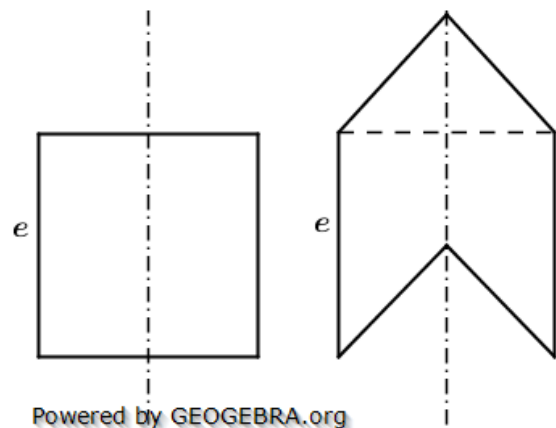
Aufgabe W3b/2007

Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Quadrat mit der Seitenlänge e . Aus dem Zylinder wird ein Kegel mit halber Zylinderhöhe herausgearbeitet und oben aufgesetzt.

Weisen Sie nach, dass die Oberfläche des neu entstandenen Körpers um

$$\frac{\pi e^2}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

größer ist als die des Zylinders.



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W2b/2009

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einer Halbkugel und einem Kegel.

Es gilt:

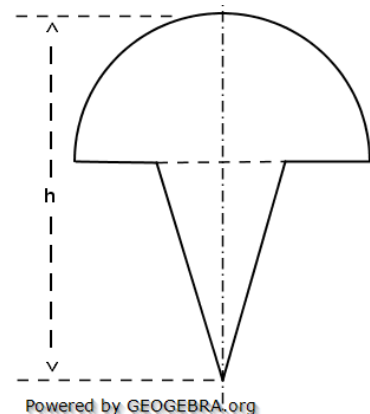
$$A_{Ges} = 60,0 \text{ cm}^2 \quad (\text{Flächeninhalt der gesamten Achsenschnittfläche})$$

$$r = 5,4 \text{ cm} \quad (\text{Radius der Halbkugel})$$

$$h = 13,6 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Lösung: $O = 311,0 \text{ cm}^2$



Powered by GEOGEBRA.org

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu zusammengesetzten Körpern

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Wahlteil) ab 2003

Aufgabe W4b/2009

Aus einem Würfel wurde eine quadratische Pyramide herausgearbeitet.

Es gilt:

$$a = 2e$$

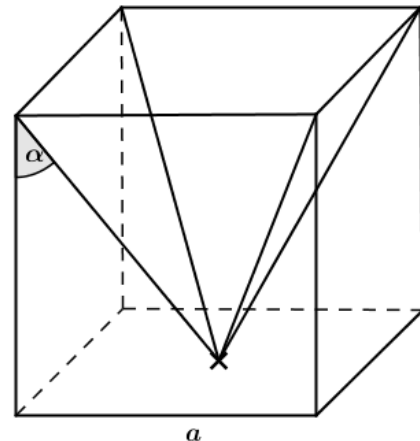
Zeigen Sie, dass die Oberfläche des Restkörpers mit der Formel

$$O = 4e^2(5 + \sqrt{5})$$

berechnet werden kann.

Weisen Sie nach, dass gilt:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W2b/2011

Ein zylinderförmiges Gefäß hat eine kegelförmige und eine halbkugelförmige Vertiefung.

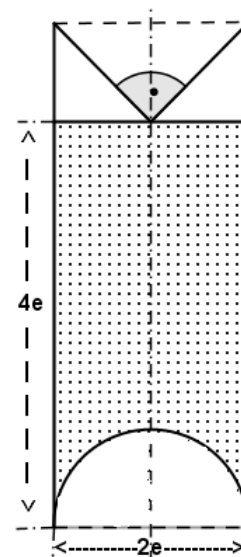
Das Wasser reicht genau bis zur Spitze der kegelförmigen Vertiefung (siehe Achsenschnitt).

Das Gefäß wird gedreht und auf die kegelförmige Vertiefung gestellt.

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass die Höhe des Wasserspiegels danach

$$h_W = \frac{11}{3}e.$$

beträgt.



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W2a/2012

Ein oben offener Zylinder ist bis zum Rande mit Wasser gefüllt.

Ein Kegel wird in das Wasser getaucht.

Er steckt dann bis zu seiner halben Höhe im Zylinder (siehe Achsenschnitt).

Bei diesem Vorgang laufen 210 cm^3 Wasser aus.

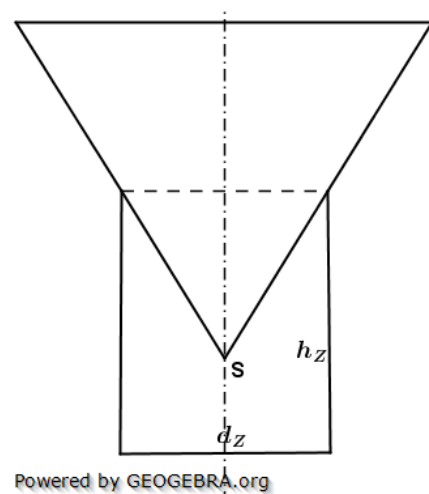
Es gilt:

$$d_Z = 10,0 \text{ cm} \quad (\text{Innendurchmesser des Zylinders})$$

$$h_Z = 12 \text{ cm} \quad (\text{Höhe des Zylinders})$$

Berechnen Sie den Abstand der Kegelspitze S zur Grundfläche des Zylinders.

Wie viel Prozent des Kegelmantels stehen im Wasser?



Powered by GEOGEBRA.org

Lösung: Abstand $a = 4,0 \text{ cm}$

Prozentualer Anteil des Mantels im Wasser: $p\% = 25,0\%$

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu zusammengesetzten Körpern

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Wahlteil) ab 2003

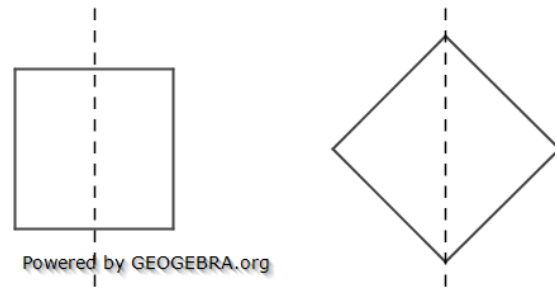
Aufgabe W2b/2013

Die Skizze zeigt die Achsenschnitte eines Zylinders und eines Doppelkegels (zwei gleich große Kegel mit gemeinsamer Grundfläche).

Die Schnittflächen der beiden Körper sind gleich große Quadrate mit einem Flächeninhalt von jeweils $36,0 \text{ cm}^2$.

Um wie viel Prozent unterscheiden sich die Oberflächen der beiden Körper?

Lösung: $p\% = 5,8\%$ (6,1%)



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W2b/2015

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem gleichschenkligen Dreiecksprisma und einem halben Kegel (siehe Grafik rechts).

Es gilt:

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

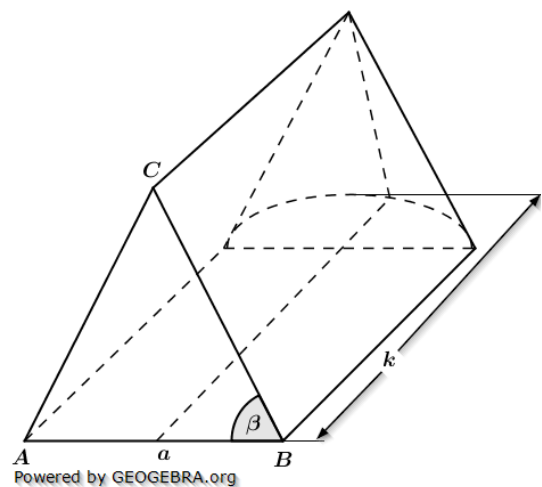
$$\overline{AB} = 11,4 \text{ cm}$$

$$\beta = 62^\circ$$

$$V_{ges} = 1280 \text{ cm}^3 \text{ (Volumen des zusammengesetzten Körpers)}$$

Berechnen Sie die Gesamtlänge k des zusammengesetzten Körpers.

Lösung: $k = 23,66 \text{ cm}$



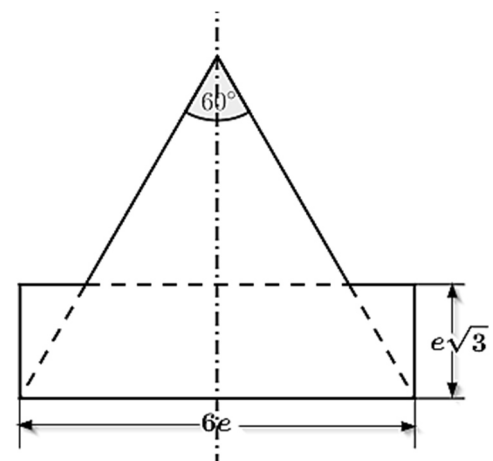
Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe W2b/2019

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Zylinder mit aufgesetztem Kegel (siehe Achsenschnitt rechts).

Zeigen Sie, dass für das Volumen des zusammengesetzten Körpers gilt:

$$V_{ges} = \frac{35}{3} \cdot \pi \cdot e^3 \sqrt{3}$$



Powered by GEOGEBRA.org

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu zusammengesetzten Körpern

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Wahlteil) ab 2003

Aufgabe B2b/2022

Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem regelmäßigen Fünfeckprisma mit aufgesetzter regelmäßiger fünfseitiger Pyramide.

Es gilt:

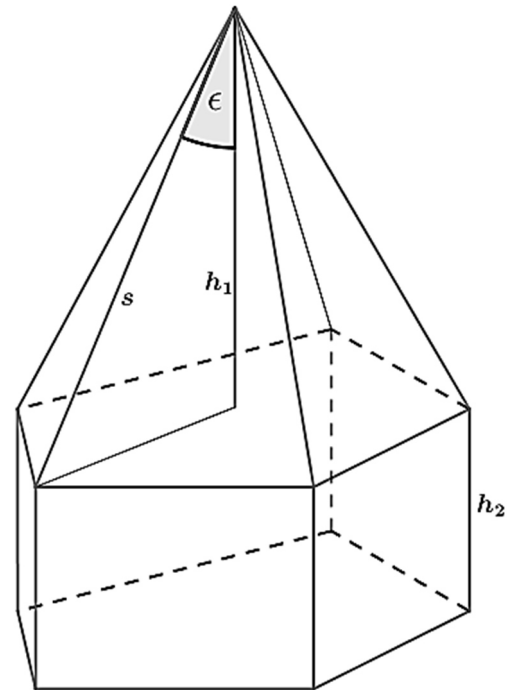
$$s = 12,6 \text{ cm}$$

$$\epsilon = 33^\circ$$

$$h_2 = 5,6 \text{ (Höhe Prisma)}$$

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers.

$$\text{Lösung: } O_{\text{Körper}} = 578,4 \text{ cm}^2$$

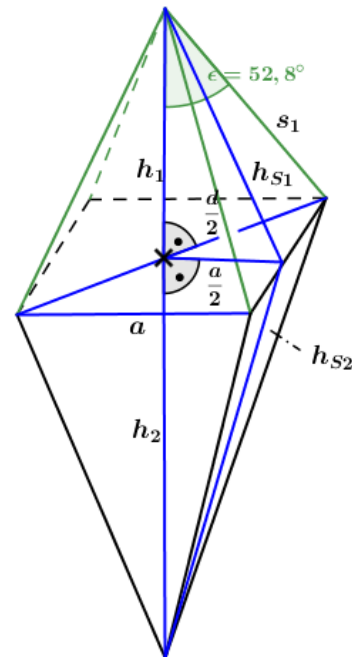


Powered by GEOGEBRA.org

Lösung W1a/2004

Lösungslogik

Zur Beachtung: die Skizze zeigt den Diagonalschnitt, nicht den Parallelschnitt.
 Berechnung von $\frac{d}{2}$ über den $\sin\epsilon$ und daraus d .
 Berechnung von h_1 über den Satz des Pythagoras.
 Berechnung der Kantenlänge a der quadratischen Grundfläche über d .
 Berechnung von h_{S_1} über den Satz des Pythagoras.
 Berechnung von V_1 über die Volumenformel.
 Berechnung von V_2 .
 Berechnung von h_2 über die Volumenformel.
 Berechnung von h_{S_2} über den Satz des Pythagoras.
 Berechnung von M_1 und M_2 sowie $O_{\text{Körper}}$.



Klausuraufschrieb

$\frac{d}{2}$:	$\sin\epsilon = \frac{\frac{d}{2}}{s_1}$		$\cdot s_1$ Powered by GEOGEBRA.org
	$\frac{d}{2} = s_1 \cdot \sin\epsilon = 12,4 \cdot \sin 52,8^\circ = 9,88$		
d :	$d = 2 \cdot \frac{d}{2} = 2 \cdot 9,88 = 19,76$		
h_1 :	$h_1 = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{12,4^2 - 9,88^2}$		Satz des Pythagoras
	$h_1 = \sqrt{56,1456} = 7,5$		
a :	$d = a \cdot \sqrt{2}$		$:\sqrt{2}$
	$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{19,76}{\sqrt{2}} = 13,97$		
$\frac{a}{2}$:	$\frac{a}{2} = 0,5 \cdot a = 7,0$		
h_{S_1} :	$h_{S_1} = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12,4^2 - 7,0^2}$		Satz des Pythagoras
	$h_{S_1} = \sqrt{104,76} = 10,24$		
V_1 :	$V_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot 13,97^2 \cdot 7,5 = 487,9$		
V_2 :	$V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot 487,9 = 975,8$		
h_2 :	$V_2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_2$		$\cdot 3; : a^2$
	$h_2 = \frac{3 \cdot V_2}{a^2} = \frac{3 \cdot 975,8}{13,97^2} = 15,0$		
h_{S_2} :	$h_{S_2} = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15,0^2 + 7,0^2}$		Satz des Pythagoras
	$h_{S_2} = \sqrt{274} = 16,55$		
M_1 :	$M_1 = 2 \cdot a \cdot h_{S_1} = 2 \cdot 13,97 \cdot 10,24 = 286,10$		
M_2 :	$M_2 = 2 \cdot a \cdot h_{S_2} = 2 \cdot 13,97 \cdot 16,55 = 462,40$		
O_{Ges} :	$O_{\text{Ges}} = M_1 + M_2 = 286,10 + 462,40 = 748,5$		
	<i>Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt 748,5 cm².</i>		

Lösung W3b/2007

Lösungslogik

Berechnung von r .

Berechnung von h_{Keg} .

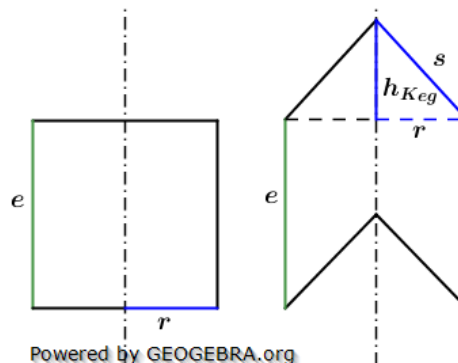
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.

Berechnung von O_{Zyl} .

Berechnung von M_{Zyl} und M_{Keg} .

Berechnung von O_{Neu} .

Berechnung der Oberflächendifferenz.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$r: \quad r = 0,5 \cdot e$$

$$h_{Keg}: \quad h_{Keg} = 0,5 \cdot e$$

$$s: \quad s = \sqrt{r^2 + h_{Keg}^2} = \sqrt{(0,5e)^2 + (0,5e)^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s = \sqrt{0,5e^2} = \sqrt{\frac{1}{2}e^2} = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{e \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}e\sqrt{2}$$

$$O_{Zyl}: \quad O_{Zyl} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}e\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{1}{2}e \cdot e \\ = 2\pi \cdot \frac{1}{4}e^2 + \pi e^2 = \frac{1}{2}\pi e^2 + \pi e^2 = \frac{3}{2}\pi e^2$$

$$M_{Zyl}: \quad M_{Zyl} = 2\pi r h = 2\pi \cdot \frac{1}{2}e \cdot e = \pi e^2$$

$$M_{Keg}: \quad M_{Keg} = \pi r s = \pi \cdot \frac{1}{2}e \cdot \frac{1}{2}e\sqrt{2} = \frac{1}{4}\pi e^2 \cdot \sqrt{2}$$

$$O_{Neu}: \quad O_{Neu} = M_{Zyl} + 2 \cdot M_{Keg} = \pi e^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi e^2 \sqrt{2} = \pi e^2 \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$O_{Diff}: \quad O_{Diff} = O_{Neu} - O_{Zyl} = \pi e^2 \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{3}{2}\pi e^2 \\ = \pi e^2 \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{3}{2}\pi e^2 = \frac{1}{2}\pi e^2 (2 + \sqrt{2} - 3) \\ = \frac{1}{2}\pi e^2 (\sqrt{2} - 1) \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Lösung W2b/2009

Lösungslogik

Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus der Oberfläche der Halbkugel, dem Mantel des Kegels sowie einem Kreisring mit dem äußeren Radius r_{Kug} und dem inneren Radius r_{Keg} .

Die Skizze ist ein „Achsenschnitt“, der gegebene Flächeninhalt A_{Ges} ist also die Fläche eines Halbkreises mit dem Radius r_{Kug} und einem Dreieck mit der Grundseite $2 \cdot r_{Keg}$ und der Höhe h_{Keg} .

Berechnung von h_{Keg} .

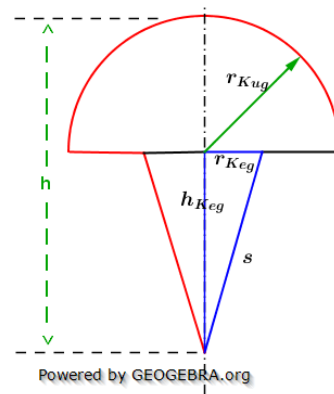
Berechnung von $A_{Halbkreis}$ mit Radius r_{Kug} .

Berechnung von h_{Keg} aus der Differenz von h und r_{Kug} .

Berechnung von $A_{Dreieck}$ über die Differenz aus A_{Ges} und $A_{Halbkreis}$.

Berechnung von r_{Kug} über die Flächenformel des Dreiecks.

Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.



Powered by GEOGEBRA.org

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu zusammengesetzten Körpern

Lösungen

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Wahlteil) 2003-2019

Berechnung der Oberfläche der Halbkugel.

Berechnung der Mantelfläche des Kegels.

Berechnung der Fläche des Kreisrings.

Berechnung der Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Klausuraufschrieb

$$A_{HK}: A_{HK} = \frac{1}{2} \pi r_{Kug}^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 5,4^2 = 45,80$$

$$h_{Keg}: h_{Keg} = h - r_{Kug} = 13,6 - 5,4 = 8,2$$

$$A_{Dreieck}: A_{Dreieck} = A_{Ges} - A_{HK} = 60 - 45,80 = 14,2$$

$$r_{Keg}: A_{Dreieck} = r_{Kug} \cdot h_{Kug} \quad | \quad : h_{Kug}$$

$$r_{Keg} = \frac{A_{Dreieck}}{h_{Keg}} = \frac{14,2}{8,2} = 1,73$$

$$s: s = \sqrt{h_{Keg}^2 + r_{Keg}^2} = \sqrt{8,2^2 + 1,73^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s = \sqrt{70,2329} = 8,38$$

$$O_{HK}: O_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r_{Kug}^2 = 2\pi \cdot 5,4^2 = 183,22$$

$$M_{Keg}: M_{Keg} = \pi r_{Keg} s = \pi \cdot 1,73 \cdot 8,38 = 45,55$$

$$O_{Kreisring}: O_{Kreisring} = \pi(r_{Kug}^2 - r_{Keg}^2) = \pi \cdot (5,4^2 - 1,73^2) = 82,21$$

$$O_{Körper}: O_{Körper} = O_{HK} + M_{Keg} + O_{Kreisring} = 183,22 + 45,55 + 82,21 = 310,98$$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt 311 cm².

Lösung W4b/2009

Lösungslogik

Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus fünf Seitenflächen des Würfels (die sechste Seitenfläche oben ist offen und damit nicht vorhanden) sowie dem Mantel der „ausgearbeiteten“ Pyramide).

Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Mantels der Pyramide.

Berechnung der 5 Seitenflächen des Würfels.

Berechnung der Oberfläche des Körpers.

Berechnung der Diagonalen des Würfelquadrats und daraus $\frac{d}{2}$.

Bestimmung von s über den Satz des Pythagoras.

Bestimmung von $\cos \alpha$.

Klausuraufschrieb

$$h_s: h_s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e)^2 + e^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_s = \sqrt{5e^2} = e\sqrt{5}$$

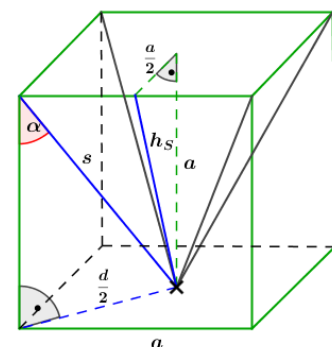
$$M_{Pyr}: M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 2e \cdot e\sqrt{5} = 4e^2\sqrt{5}$$

$$O_{Würfel}: O_{Würfel} = 5a^2 = 5 \cdot (2e)^2 = 20e^2$$

$$O: O = O_{Würfel} + M_{Pyr} = 20e^2 + 4e^2\sqrt{5} = 4e^2(5 + \sqrt{5})$$

q.e.d.

$$d: d = a \cdot \sqrt{2} = 2e\sqrt{2} \Rightarrow \frac{d}{2} = e\sqrt{2}$$



$$O = 4e^2(5 + \sqrt{5})$$

Powered by GEOGEBRA.org

RS-Abschlussaufgaben Wahlteil zu zusammengesetzten Körpern

Lösungen

Realschulabschluss Zusammengesetzte Körper (Wahlteil) 2003-2019

$$s: \quad s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e)^2 + (e\sqrt{2})^2} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s = \sqrt{4e^2 + 2e^2} = \sqrt{6e^2} = e\sqrt{6}$$

$$\cos\alpha: \quad \cos\alpha = \frac{a}{s} = \frac{2e}{e\sqrt{6}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Lösung W2b/2011

Lösungslogik

Benötigt wird zunächst das Volumen des Wassers im nicht gedrehten Zustand. Dieses Volumen ist dann gleichzusetzen mit dem Volumen, welches sich im gedrehten Zustand bei einer Wasserhöhe h_w ergibt.

Für das Volumen des Wassers im nicht gedrehten Zustand berechnen wir:

Volumen des Zylinders V_{Zyl} bis zur Füllhöhe $4e$.

Volumen der Halbkugel V_{HK} mit Radius e .

Volumen des Wassers V_W aus der Differenz von V_{Zyl} und V_{HK} .

Für den gedrehten Zustand berechnen wir:

Volumen des Zylinders V_{Zylg} bis zur Füllhöhe h_w .

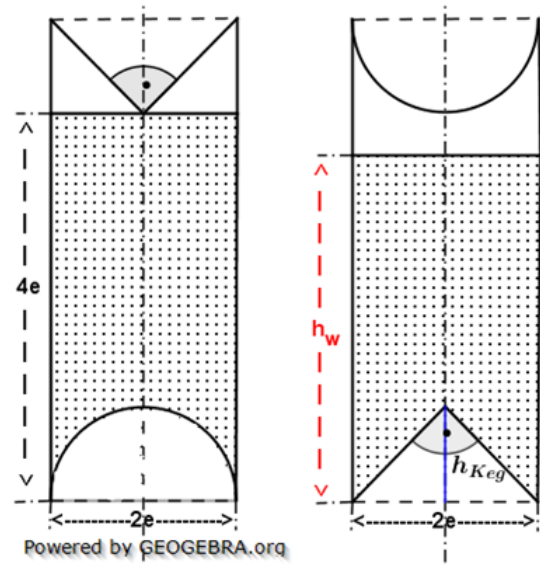
Berechnung von h_{Keg} .

Berechnung des Volumens des Kegels V_{Keg} mit Radius e und Höhe h_{Keg} .

Berechnung des Volumens des Wassers V_{Wg} .

Gleichsetzung von V_{Wg} und V_W .

Berechnung der Höhe des Wasserstandes h_w im gedrehten Zustand.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$V_{Zyl}: \quad V_{Zyl} = \pi r^2 h = \pi \cdot e^2 \cdot 4e = 4\pi e^3$$

$$V_{HK}: \quad V_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot e^3$$

$$V_W: \quad V_W = V_{Zyl} - V_{HK} = 4\pi e^3 - \frac{2}{3} \pi e^3 = \frac{12}{3} \pi e^3 - \frac{2}{32} \pi e^3 = \frac{10}{3} \pi e^3$$

$$V_{Zylg}: \quad V_{Zylg} = \pi r^2 \cdot h_w = \pi e^2 h_w$$

$$h_{Keg}: \quad h_{Keg} = r_{Keg} = e$$

| Wegen 90° Spitzenwinkel des Kegels

$$V_{Keg}: \quad V_{Keg} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{Keg} = \frac{1}{3} \pi \cdot e \cdot e = \frac{1}{3} \pi e^3$$

$$V_{Wg}: \quad V_{Wg} = V_W = V_{Zylg} - V_{Keg}$$

$$\frac{10}{3} \pi e^3 = \pi e^2 h_w - \frac{1}{3} \pi e^3$$

| $+\frac{1}{3} \pi e^3$

$$\frac{11}{3} \pi e^3 = \pi e^2 h_w$$

| $:\pi e^2$

$$h_w = \frac{11}{3} e$$

q.e.d.

Lösung W2a/2012

Lösungslogik

Durch das Eintauchen der Kegelspitze gehen 210 cm^3 Wasser verloren, also muss das Volumen der eingetauchten Kegelspitze gleich groß sein.

Berechnung von r_2 .

Berechnung von h_{Keg_2} über die Volumenformel des Kegels.

Berechnung des Abstandes der Kegelspitze a zur Grundfläche aus der Differenz von h_Z und h_{Keg_2} .

Berechnung von s_2 über den Satz des Pythagoras.

Berechnung des Mantels der eingetauchten Kegelspitze über die Mantelformel des Zylinders.

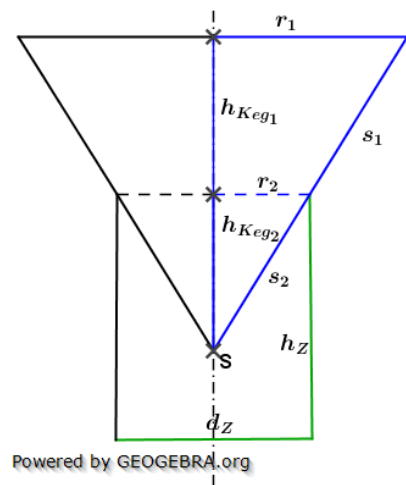
Berechnung von h_{Keg_1} .

Berechnung von r_1 über den 2. Strahlensatz.

Berechnung von s_1 über den 1. Strahlensatz.

Berechnung des Mantels des gesamten Kegels über die Mantelformel des Kegels.

Berechnung des Anteils der Mantelfläche des eingetauchten Kegels zur Gesamtmantelfläche.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

$$r_2: \quad r_2 = \frac{1}{2} \cdot d_Z = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$h_{Keg_2}: \quad V_{Keg_2} = \frac{1}{3} \pi r_{Keg_2}^2 \cdot h_{Keg_2} \quad | \quad \cdot 3; \quad : (\pi \cdot r_{Keg_2}^2)$$

$$h_{Keg_2} = \frac{3 \cdot V_{Keg_2}}{\pi \cdot r_{Keg_2}^2} = \frac{3 \cdot 210}{\pi \cdot 5^2} = 8,0$$

$$a: \quad a = h_Z - h_{Keg_2} = 12 - 8,0 = 4$$

Der Abstand der Kegelspitze S zur Grundfläche beträgt 4 cm .

$$s_2: \quad s_2 = \sqrt{r_2^2 + h_{Keg_2}^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89} \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$s_2 = 9,43$$

$$M_{Keg_2}: \quad M_{Keg_2} = \pi r_{Keg_2} \cdot s_2 = \pi \cdot 5 \cdot 9,43 = 148,13$$

$$h_{Keg_1}: \quad h_{Keg_1} = h_{Keg_2} = 8 \quad | \quad \text{gemäß Aufgabenstellung}$$

$$r_1: \quad \frac{r_1}{h_{Keg_1} + h_{Keg_2}} = \frac{r_2}{h_{Keg_2}} \quad | \quad \cdot (h_{Keg_1} + h_{Keg_2})$$

$$r_1 = \frac{r_2}{h_{Keg_2}} \cdot (h_{Keg_1} + h_{Keg_2}) = \frac{5}{8} \cdot 16 = 10$$

$$s_1: \quad \frac{s_1}{h_{Keg_1}} = \frac{s_2}{h_{Keg_2}} \quad | \quad \cdot h_{Keg_1}$$

$$s_1 = \frac{s_2}{h_{Keg_2}} \cdot h_{Keg_1} = \frac{9,43}{8} \cdot 8 = 9,43$$

$$M_{Keg}: \quad M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg_1} \cdot (s_1 + s_2) = \pi \cdot 10 \cdot 18,86 = 592,50$$

$$p\%: \quad p\% = \frac{m_{Keg_2}}{M_{Keg}} \cdot 100 = \frac{148,13}{592,50} \cdot 100 = 25\%$$

Der prozentuale Anteil des Mantels im Wasser von der Gesamtmantelfläche des Kegels beträgt 25% .

Lösung W2b/2013

Lösungslogik

Die nebenstehende Skizze zeigt links den Achsenschnitt durch den Zylinder und rechts den durch den Doppelkegel.

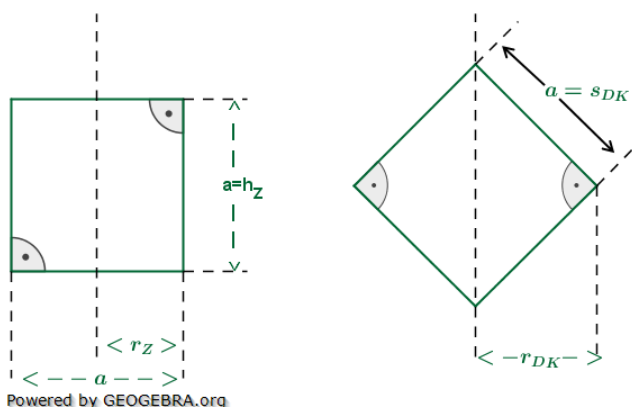
Die Schnittflächen sind nach Aufgabenstellung ein Quadrat mit 36 cm^2 Fläche, somit sind alle Kanten der beiden Schnittflächen 6 cm lang.

Die Oberfläche des Zylinders errechnen wir über die Formel

$$O_{\text{Zyl}} = 2\pi r_z^2 + 2\pi \cdot r_z \cdot h_z.$$

Die Oberfläche des Doppelkegels entspricht zweimal der Mantelfläche eines Kegels. Die Mantelfläche eines Kegels errechnet sich über $M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r_k \cdot s_K$.

Hierzu benötigen wir noch r_k , welches über den Satz des Pythagoras errechnet werden kann. Nach Berechnung der beiden Oberflächen bilden wir das prozentuale Verhältnis. Da aus der Aufgabenstellung nicht klar hervorgeht, welche der beiden Oberflächen als Grundwert genommen werden soll, berechnen wir sowohl als auch.



Klausuraufschrieb

$$a: \quad A_{\text{Querschnitt}} = 36 = a^2 \Rightarrow a = 6 \text{ cm}$$

$$O_{\text{Zyl}}: \quad O_{\text{Zyl}} = 2\pi r_z^2 + 2\pi \cdot r_z \cdot h_z = 2\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$$

$$O_{\text{Zyl}} = \frac{3}{2}\pi \cdot 36 = 169,65 \text{ cm}^2$$

$$M_{\text{DK}}: \quad M_{\text{DK}} = 2 \cdot M_{\text{Kegel}}$$

$$M_{\text{Kegel}}: \quad M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r_k \cdot s_K$$

$$r_k: \quad a^2 = r_k^2 + r_k^2 = 2r_k^2$$

$$r_k^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$r_k = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = 4,2426$$

$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot 4,2426 \cdot 6 = 79,97$$

$$M_{\text{DK}} = 2 \cdot 79,97 = 159,94 \text{ cm}^2$$

Oberfläche Zylinder als Grundwert:

$$p \% = \frac{M_{\text{DK}}}{O_{\text{Zyl}}} = \frac{159,94}{169,65} \cdot 100 = 94,28 \%$$

Die Oberfläche des Doppelkegels ist etwa 5,8 % kleiner als die des Zylinders.

Oberfläche Doppelkegel als Grundwert:

$$p \% = \frac{O_{\text{Zyl}}}{M_{\text{DK}}} = \frac{169,65}{159,94} \cdot 100 = 106,1 \%$$

Die Oberfläche des Zylinders ist etwa 6,1 % größer als die des Doppelkegels.

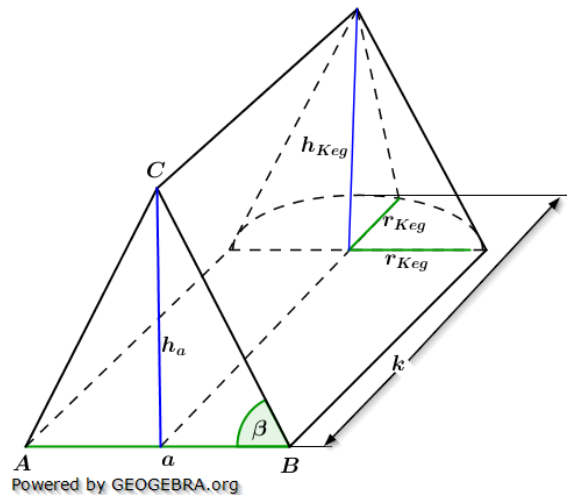
Lösung W2b/2015

Lösungslogik

Das gegebene Volumen $V_{\text{Körper}} = 1280 \text{ cm}^3$ setzt sich zusammen aus dem Volumen des Dreiecksprismas zuzüglich des Volumens des Halbkegels. Der Radius r_{Keg} ist gleich der halben Länge der Kante a . Die Höhe h_a zur Berechnung des Volumens des Dreiecksprismas ermitteln wir über den $\tan\beta$. Die Höhe des Dreiecksprismas ergibt sich aus $k - r_{\text{Keg}}$.

Zur Berechnung des Volumens des Halbkegels ist $h_{\text{Keg}} = h_a$.

Alle erforderlichen Werte sind nun bekannt, wir stellen die Formel für das Gesamtvolumen auf und lösen die Formel nach k auf.



Klausuraufschrieb

$$V_{\text{Körper}} = 1280 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \cdot (k - r_{\text{Keg}}) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r_{\text{Keg}}^2 \cdot h_{\text{Keg}}$$

$$r_{\text{Keg}}: \quad r_{\text{Keg}} = \frac{a}{2} = 5,7$$

$$h_a: \quad \tan\beta = \frac{h_a}{\frac{a}{2}} \quad \Bigg| \quad \cdot \frac{a}{2}$$

$$h_a = \frac{a}{2} \cdot \tan\beta = 5,7 \cdot \tan 62^\circ = 10,72$$

$$h_{\text{Keg}}: \quad h_{\text{Keg}} = h_a$$

Alle Unbekannten sind nun bekannt.

$$\begin{array}{l} k: \quad \frac{1}{2} \cdot 11,4 \cdot 10,72 \cdot (k - 5,7) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5,7^2 \cdot 10,72 = 1280 \\ \quad 61,104 \cdot (k - 5,7) + 182,3657 = 1280 \quad \Bigg| \quad -182,3657 \\ \quad 61,104 \cdot (k - 5,7) = 1097,6343 \quad \Bigg| \quad :61,104 \\ \quad k - 5,7 = 17,9634 \quad \Bigg| \quad +5,7 \\ \quad k = 23,66 \end{array}$$

Die Gesamtlänge von k beträgt 23,66 cm.

Lösung W2b/2019

Lösungslogik

Das Volumen des zusammengesetzten Körpers besteht aus dem Volumen eines Zylinders mit Durchmesser $6e$ und der Höhe $e\sqrt{3}$ zuzüglich dem Volumen eines Kegels mit Durchmesser d_{Keg} und Höhe h_{Keg} .

$$V_{Zyl} = \frac{\pi d_{Zyl}^2}{4} \cdot h_{Zyl}; \quad V_{Keg} = \frac{1}{3} \frac{\pi d_{Keg}^2}{4} \cdot h_{Keg}$$

Berechnung von d_{Keg} :

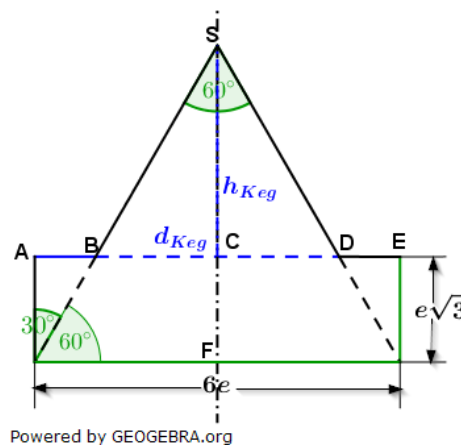
Wir berechnen die Strecke \overline{AB} aus $\tan(30^\circ) = \frac{\overline{AB}}{e\sqrt{3}}$

$$d_{Keg} = 6e - 2 \cdot \overline{AB}$$

Berechnung von h_{Keg} :

Zunächst ermitteln wir die Gesamthöhe \overline{SF} des Körpers über $\tan(30^\circ) = \frac{3e}{\overline{SF}}$,

$h_{Keg} = \overline{SF} - e\sqrt{3}$, alle erforderlichen Werte sind nun bekannt.



Klausuraufschrieb

$$V_{ges} = V_{Zyl} + V_{Keg}$$

$$V_{Zyl} = \pi r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl} = \pi \cdot (3e)^2 \cdot e\sqrt{3} = 9\pi e^3 \sqrt{3}$$

$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \pi r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$$

$$\overline{AB}: \quad \tan(30^\circ) = \frac{\overline{AB}}{e\sqrt{3}} \quad | \quad \cdot e\sqrt{3}$$

$$\overline{AB} = e\sqrt{3} \cdot \tan(30^\circ) = e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = e$$

$$r_{Keg}: \quad r_{Keg} = \frac{6e - 2 \cdot \overline{AB}}{2} = 2e$$

$$h_{Keg}: \quad h_{Keg} = \overline{FS} - e\sqrt{3}$$

$$\overline{FS}: \quad \tan(30^\circ) = \frac{3e}{\overline{SF}} \quad | \quad \cdot \overline{SF}; : \tan(30^\circ)$$

$$\overline{FS} = \frac{3e}{\tan(30^\circ)} = \frac{3e}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9e}{\sqrt{3}} = 3e\sqrt{3}$$

$$h_{Keg} = 3e\sqrt{3} - e\sqrt{3} = 2e\sqrt{3}$$

$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \pi r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg} = \frac{1}{3} \pi (2e)^2 \cdot 2e\sqrt{3} = \frac{8}{3} \pi e^3 \sqrt{3}$$

$$V_{ges} = 9\pi e^3 \sqrt{3} + \frac{8}{3} \pi e^3 \sqrt{3} = \pi e^3 \sqrt{3} \cdot \left(9 + \frac{8}{3}\right) = \frac{35}{3} \pi e^3 \sqrt{3}$$

q.e.d.

Lösung B2b/2021

Lösungslogik

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ergibt sich aus der Summe der Fläche der fünfseitigen Grundfläche, dem Mantel des fünfseitigen Prismas sowie dem Mantel der fünfseitigen aufgesetzten Pyramide.

Zur Berechnung der aufgeführten Flächen sind zunächst noch Vorberechnungen zu machen (siehe Grafik rechts).

Winkel γ :

Wegen des regelmäßigen Fünfecks ist $\gamma = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Radius r :

Berechnung über den $\sin(\epsilon)$.

Seitenkante a :

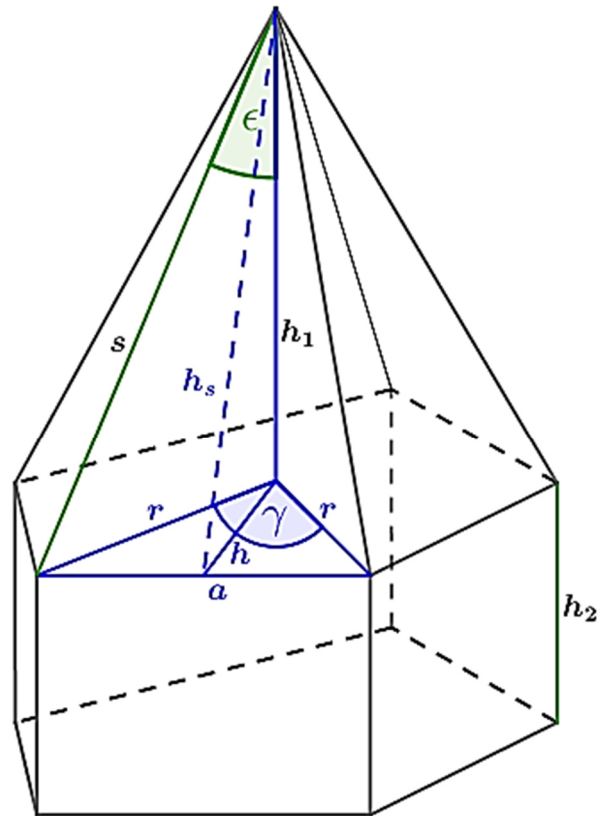
Berechnung von $\frac{1}{2}a$ über den $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

Höhe h Basisdreieck Grundfläche:

Berechnung über den Satz des Pythagoras.

Höhe h_s Seitendreieck Pyramide:

Berechnung über den Satz des Pythagoras.



Powered by GEOGEBRA.org

Größe der Grundfläche (regelmäßiges Fünfeck):

Die Größe der Grundfläche bestimmt sich über 5 Basisdreiecke über

$$A_{\text{Fünfeck}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Größe der Mantelfläche fünfseitiges Prisma:

$$M_{\text{Prisma}} = 5 \cdot a \cdot h_2$$

Größe der Mantelfläche fünfseitige Pyramide:

$$M_{\text{Pyramide}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

Klausuraufschrieb

Vorberechnungen (siehe Grafik oben):

$$\gamma: \quad \gamma = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

$$r: \quad \sin(\epsilon) = \frac{r}{s}$$

$$r = s \cdot \sin(\epsilon) = 12,6 \cdot \sin(33^\circ) = 6,86$$

$$a: \quad \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{r}$$

$$\frac{a}{2} = r \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$a = 2r \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 6,86 \cdot \sin(36^\circ) = 8,064$$

$$h: \quad r^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6,86^2 - 4,03^2} = 5,55$$

$$h_s: \quad s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12,6^2 - 4,03^2} = 11,94$$

Oberfläche zusammengesetzter Körper:

$O_{\text{Körper}}$:

$$O_{\text{Körper}} = A_{\text{Fünfeck}} + M_{\text{Prisma}} + M_{\text{Pyramide}}$$

$A_{\text{Fünfeck}}$:

$$A_{\text{Fünfeck}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,064 \cdot 5,55 = 111,888$$

M_{Prisma} :

$$M_{\text{Prisma}} = 5 \cdot a \cdot h_2 = 5 \cdot 8,064 \cdot 5,6 = 225,792$$

M_{Pyramide} :

$$M_{\text{Pyramide}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,064 \cdot 11,94 = 240,71$$

$$O_{\text{Körper}} = 111,888 + 225,792 + 240,71 = 578,39$$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ist 578,4 cm² groß.