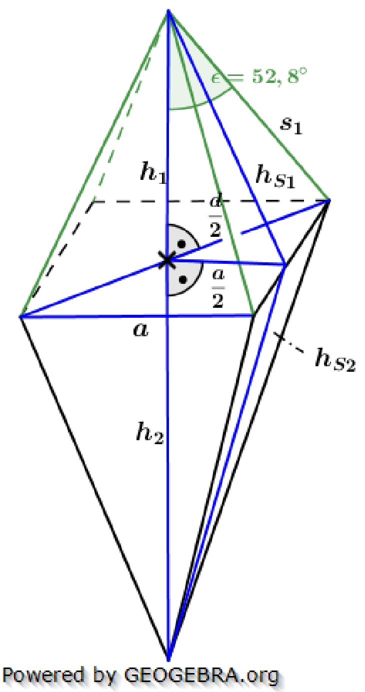
Lösung W1a/2004

Lösungslogik

Zur Beachtung: die Skizze zeigt den Diagonalschnitt, nicht den Parallelschnitt.
Berechnung von $\frac{d}{2}$ über den $sin\epsilon$ und daraus d.
Berechnung von h_1 über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Kantenlänge a der quadratischen Grundfläche über d.
Berechnung von h_{S_1} über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von V_1 über die Volumenformel.
Berechnung von V_2.
Berechnung von h_2 über die Volumenformel.
Berechnung von h_{S_2} über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von M_1 und M_2 sowie $O_{Körper}$.



Klausuraufschrieb

$\frac{d}{2}$: $\quad sin\epsilon = \frac{\frac{d}{2}}{s_1} \quad | \cdot s_1$

$\frac{d}{2} = s_1 \cdot sin\epsilon = 12{,}4 \cdot sin52{,}8° = 9{,}88$

d: $\quad d = 2 \cdot \frac{d}{2} = 2 \cdot 9{,}88 = 19{,}76$

h_1: $\quad h_1 = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}4^2 - 9{,}88^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$h_1 = \sqrt{56{,}1456} = 7{,}5$

a: $\quad d = a \cdot \sqrt{2} \quad | : \sqrt{2}$

$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{19{,}76}{\sqrt{2}} = 13{,}97$

$\frac{a}{2}$: $\quad \frac{a}{2} = 0{,}5 \cdot a = 7{,}0$

h_{S_1}: $\quad h_{S_1} = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}4^2 - 7{,}0^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$h_{S_1} = \sqrt{104{,}76} = 10{,}24$

V_1: $\quad V_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot 13{,}79^2 \cdot 7{,}5 = 487{,}9$

V_2: $\quad V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot 487{,}9 = 975{,}8$

h_2: $\quad V_2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_2 \quad | \cdot 3;\ : a^2$

$h_2 = \frac{3 \cdot V_2}{a^2} = \frac{3 \cdot 975{,}8}{13{,}97^2} = 15{,}0$

h_{S_2}: $\quad h_{S_2} = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15{,}0^2 + 7{,}0^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$h_{S_2} = \sqrt{274} = 16{,}55$

M_1: $\quad M_1 = 2 \cdot a \cdot h_{S_1} = 2 \cdot 13{,}97 \cdot 10{,}24 = 286{,}10$

M_2: $\quad M_2 = 2 \cdot a \cdot h_{S_2} = 2 \cdot 13{,}97 \cdot 16{,}55 = 462{,}40$

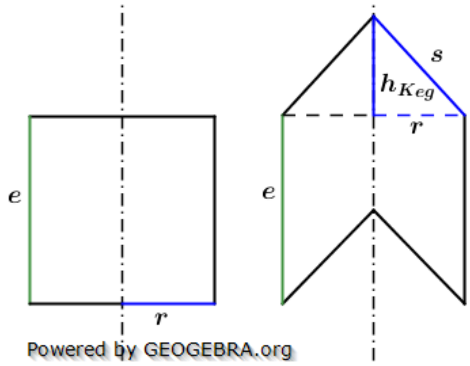
O_{Ges}: $\quad O_{Ges} = M_1 + M_2 = 286{,}10 + 462{,}40 = 748{,}5$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $748{,}5\ cm^2$.

Lösung W3b/2007

Lösungslogik

Berechnung von r.
Berechnung von h_{Keg}.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von O_{Zyl}.
Berechnung von M_{Zyl} und M_{Keg}.
Berechnung von O_{Neu}.
Berechnung der Oberflächendifferenz.



Klausuraufschrieb

r: $r = 0{,}5 \cdot e$

h_{Keg}: $h_{Keg} = 0{,}5 \cdot e$

s: $s = \sqrt{r^2 + h_{keg}^2} = \sqrt{(0{,}5e)^2 + (0{,}5e)^2}$ | Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{0{,}5e^2} = \sqrt{\frac{1}{2}e^2} = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{e \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}e\sqrt{2}$

O_{Zyl}: $O_{Zyl} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}e\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{1}{2}e \cdot e$
$= 2\pi \cdot \frac{1}{4}e^2 + \pi e^2 = \frac{1}{2}\pi e^2 + \pi e^2 = \frac{3}{2}\pi e^2$

M_{Zyl}: $M_{Zyl} = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{1}{2}e \cdot e = \pi e^2$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi rs = \pi \cdot \frac{1}{2}e \cdot \frac{1}{2}e\sqrt{2} = \frac{1}{4}\pi e^2 \cdot \sqrt{2}$

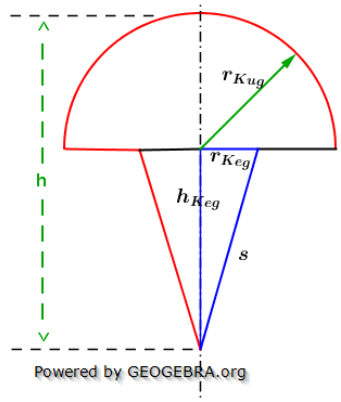
O_{Neu}: $O_{Neu} = M_{zyl} + 2 \cdot M_{Keg} = \pi e^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi e^2\sqrt{2} = \pi e^2(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$

O_{Diff}: $O_{Diff} = O_{Neu} - O_{Zyl} = \pi e^2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{3}{2}\pi e^2$
$= \pi e^2\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{3}{2}\pi e^2 = \frac{1}{2}\pi e^2(2 + \sqrt{2} - 3)$
$= \frac{1}{2}\pi e^2(\sqrt{2} - 1)$ **q.e.d.**

Lösung W2b/2009

Lösungslogik

Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus der Oberfläche der Halbkugel, dem Mantel des Kegels sowie einem Kreisring mit dem äußeren Radius r_{Kug} und dem inneren Radius r_{Keg}.
Die Skizze ist ein „Achsenschnitt", der gegebene Flächeninhalt A_{Ges} ist also die Fläche eines Halbkreises mit dem Radius r_{Kug} und einem Dreieck mit der Grundseite $2 \cdot r_{Keg}$ und der Höhe h_{Keg}.
Berechnung von h_{Keg}.
Berechnung von $A_{Halbkreis}$ mit Radius r_{Kug}.
Berechnung von h_{Keg} aus der Differenz von h und r_{Kug}.
Berechnung von $A_{Dreieck}$.über die Differenz aus A_{Ges} und $A_{Halbkreis}$.
Berechnung von r_{Kug} über die Flächenformel des Dreiecks.
Berechnung von s über den Satz des Pythagoras.



Berechnung der Oberfläche der Halbkugel.
Berechnung der Mantelfläche des Kegels.
Berechnung der Fläche des Kreisrings.
Berechnung der Oberfläche des zusammengesetzten Körpers.

Klausuraufschrieb

A_{HK}: $A_{HK} = \frac{1}{2}\pi r_{Kug}^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 5,4^2 = 45,80$

h_{Keg}: $h_{Keg} = h - r_{Kug} = 13,6 - 5,4 = 8,2$

$A_{Dreieck}$: $A_{Dreieck} = A_{Ges} - A_{HK} = 60 - 45,80 = 14,2$

r_{Keg}: $A_{Dreieck} = r_{Kug} \cdot h_{Kug} \quad | \quad : h_{Kug}$

$r_{Keg} = \frac{A_{Dreieck}}{h_{Keg}} = \frac{14,2}{8,2} = 1,73$

s: $s = \sqrt{h_{Keg}^2 + r_{Keg}^2} = \sqrt{8,2^2 + 1,73^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{70,2329} = 8,38$

O_{HK}: $O_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r_{Kug}^2 = 2\pi \cdot 5,4^2 = 183,22$

M_{Keg}: $M_{Keg} = \pi r_{keg} s = \pi \cdot 1,73 \cdot 8,38 = 45,55$

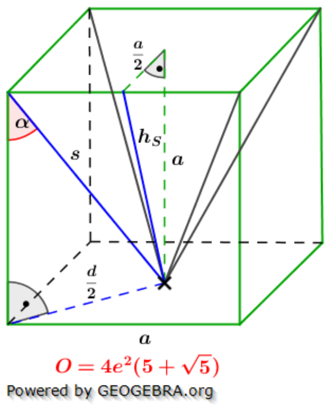
$O_{Kreisring}$: $O_{Kreisring} = \pi\left(r_{kug}^2 - r_{keg}^2\right) = \pi \cdot (5,4^2 - 1,73^2) = 82,21$

$O_{Körper}$: $O_{Körper} = O_{HK} + M_{Keg} + O_{Kreisring} = 183,22 + 45,55 + 82,21 = 310,98$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $311\ cm^2$.

Lösung W4b/2009

Lösungslogik



Die Oberfläche des Körpers setzte sich zusammen aus fünf Seitenflächen des Würfels (die sechste Seitenfläche oben ist offen und damit nicht vorhanden) sowie dem Mantel der „ausgearbeiteten" Pyramide).
Berechnung von h_s über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Mantels der Pyramide.
Berechnung der 5 Seitenflächen des Würfels.
Berechnung der Oberfläche des Körpers.
Berechnung der Diagonalen des Würfelquadrats und daraus $\frac{d}{2}$.
Bestimmung von s über den Satz des Pythagoras.
Bestimmung von $cos\alpha$.

Klausuraufschrieb

h_S: $h_S = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2e)^2 + e^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$h_S = \sqrt{5e^2} = e\sqrt{5}$

M_{Pyr}: $M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 2e \cdot e\sqrt{5} = 4e^2\sqrt{5}$

$O_{Würfel}$: $O_{Würfel} = 5a^2 = 5 \cdot (2e)^2 = 20e^2$

O: $O = O_{Würfel} + M_{Pyr} = 20e^2 + 4e^2\sqrt{5} = 4e^2(5 + \sqrt{5})$ **q.e.d.**

d: $d = a \cdot \sqrt{2} = 2e\sqrt{2} \implies \frac{d}{2} = e\sqrt{2}$

s: $\quad s=\sqrt{a^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\sqrt{(2e)^2+\left(e\sqrt{2}\right)^2}$ | Satz des Pythagoras

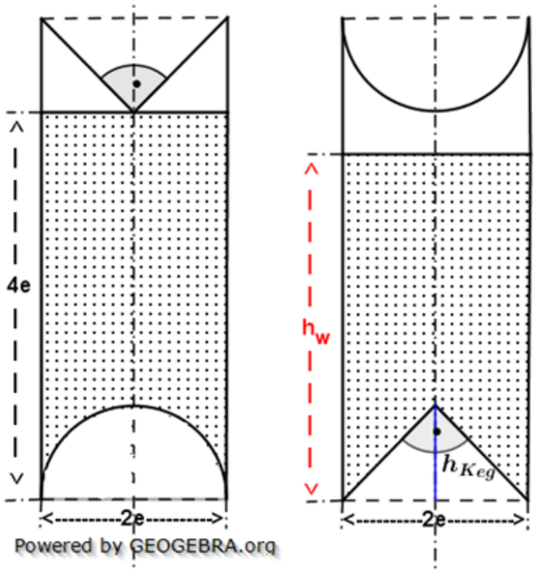
$s=\sqrt{4e^2+2e^2}=\sqrt{6e^2}=e\sqrt{6}$

$cos\alpha$: $\quad cos\alpha=\frac{a}{s}=\frac{2e}{e\sqrt{6}}=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{6}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$ **q.e.d.**

Lösung W2b/2011

Lösungslogik

Benötigt wird zunächst das Volumen des Wassers im nicht gedrehten Zustand. Dieses Volumen ist dann gleichzusetzen mit dem Volumen, welches sich im gedrehten Zustand bei einer Wasserhöhe h_W ergibt.



Für das Volumen des Wassers im nicht gedrehten Zustand berechnen wir:
- Volumen des Zylinders V_{Zyl} bis zur Füllhöhe $4e$.
- Volumen der Halbkugel V_{HK} mit Radius e.
- Volumen des Wassers V_W aus der Differenz von V_{Zyl} und V_{HK}.

Für den gedrehten Zustand berechnen wir:
- Volumen des Zylinders V_{Zyl_g} bis zur Füllhöhe h_W.
- Berechnung von h_{keg}.
- Berechnung des Volumens des Kegels V_{Keg} mit Radius e und Höhe h_{Keg} .
- Berechnung des Volumens des Wassers V_{W_g}.
- Gleichsetzung von V_{W_g} und V_W.
- Berechnung der Höhe des Wasserstandes h_W im gedrehten Zustand.

Klausuraufschrieb

V_{Zyl}: $\quad V_{Zyl}=\pi r^2 h=\pi\cdot e^2\cdot 4e=4\pi e^3$

V_{HK}: $\quad V_{HK}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi\cdot e^3$

V_W: $\quad V_W=V_{Zyl}-V_{HK}=4\pi e^3-\frac{2}{3}\pi e^2=\frac{12}{3}\pi e^3-\frac{2}{32}\pi e^3=\frac{10}{3}\pi e^3$

V_{Zyl_g}: $\quad V_{Zyl_g}=\pi r^2\cdot h_w=\pi e^2 h_w$

h_{Keg}: $\quad h_{Keg}=r_{Keg}=e$ | Wegen $90°$ Spitzenwinkel des Kegels

V_{Keg}: $\quad V_{Keg}=\frac{1}{3}\pi r^2 h_{Keg}=\frac{1}{3}\pi\cdot e\cdot e=\frac{1}{3}\pi e^3$

V_{W_g}: $\quad V_{W_g}=V_W=V_{Zyl_g}-V_{Keg}$

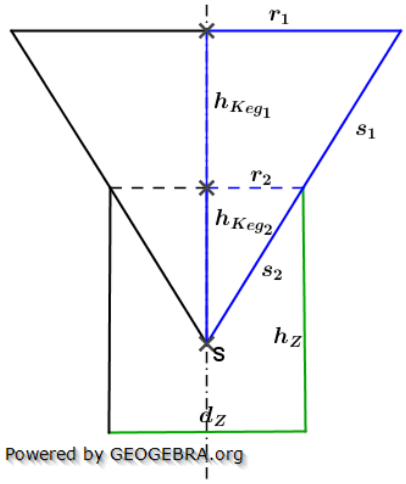
$\frac{10}{3}\pi e^3=\pi e^2 h_w-\frac{1}{3}\pi e^3$ | $+\frac{1}{3}\pi e^3$

$\frac{11}{3}\pi e^3=\pi e^2 h_w$ | $:\pi e^2$

$h_w=\frac{11}{3}e$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2012

Lösungslogik



Durch das Eintauchen der Kegelspitze gehen $210\ cm^3$ Wasser verloren, also muss das Volumen der eingetauchten Kegelspitze gleich groß sein.
Berechnung von r_2.
Berechnung von h_{Keg_2} über die Volumenformel des Kegels.
Berechnung des Abstandes der Kegelspitze a zur Grundfläche aus der Differenz von h_Z und h_{Keg_2}.
Berechnung von s_2 über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Mantels der eingetauchten Kegelspitze über die Mantelformel des Zylinders.
Berechnung von h_{Keg_1}.
Berechnung von r_1 über den 2. Strahlensatz.
Berechnung von s_1 über den 1. Strahlensatz.
Berechnung des Mantels des gesamten Kegels über die Mantelformel des Kegels.
Berechnung des Anteils der Mantelfläche des eingetauchten Kegels zur Gesamtmantelfläche.

Klausuraufschrieb

r_2: $\quad r_2 = \frac{1}{2} \cdot d_Z = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

h_{Keg_2}: $\quad V_{Keg_2} = \frac{1}{3}\pi r_{Keg_2}^2 \cdot h_{Keg_2} \quad | \quad \cdot 3;\ :(\pi \cdot r_{Keg_2}^2)$

$h_{Keg_2} = \frac{3 \cdot V_{Keg_2}}{\pi \cdot r_{Keg_2}^2} = \frac{3 \cdot 210}{\pi \cdot 5^2} = 8{,}0$

a: $\quad a = h_Z - h_{Keg_2} = 12 - 8{,}0 = 4$

Der Abstand der Kegelspitze S zur Grundfläche beträgt $4\ cm$.

s_2: $\quad s_2 = \sqrt{r_2^2 + h_{Keg_2}^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89} \quad | \quad$ Satz des Pythagoras

$s_2 = 9{,}43$

M_{Keg_2}: $\quad M_{Keg_2} = \pi r_{Keg_2} \cdot s_2 = \pi \cdot 5 \cdot 9{,}43 = 148{,}13$

h_{Keg_1}: $\quad h_{Keg_1} = h_{Keg_2} = 8 \quad | \quad$ gemäß Aufgabenstellung

r_1: $\quad \frac{r_1}{h_{Keg_1} + h_{Keg_2}} = \frac{r_2}{h_{Keg_2}} \quad | \quad \cdot (h_{Keg_1} + h_{Keg_2})$

$r_1 = \frac{r_2}{h_{Keg_2}} \cdot (h_{Keg_1} + h_{Keg_2}) = \frac{5}{8} \cdot 16 = 10$

s_1: $\quad \frac{s_1}{h_{Keg_1}} = \frac{s_2}{h_{Keg_2}} \quad | \quad \cdot h_{Keg_1}$

$s_1 = \frac{s_2}{h_{Keg_2}} \cdot h_{Keg_1} = \frac{9{,}43}{8} \cdot 8 = 9{,}43$

M_{Keg}: $\quad M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg_1} \cdot (s_1 + s_2) = \pi \cdot 10 \cdot 18{,}86 = 592{,}50$

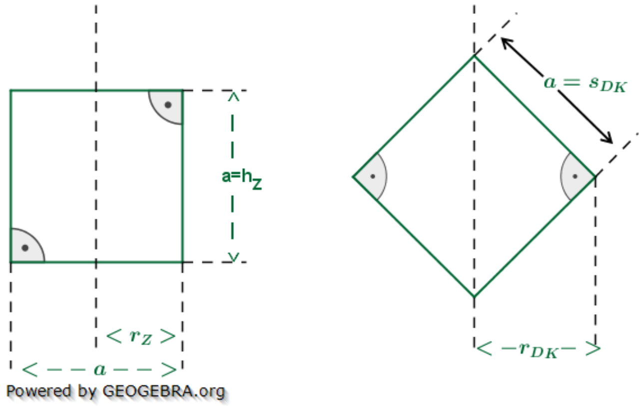
$p\ \%$: $\quad p\ \% = \frac{m_{Keg_2}}{M_{Keg}} \cdot 100 = \frac{148{,}13}{592{,}50} \cdot 100 = 25\ \%$

Der prozentuale Anteil des Mantels im Wasser von der Gesamtmantelfläche des Kegels beträgt $25\ \%$.

Lösung W2b/2013

Lösungslogik

Die nebenstehende Skizze zeigt links den Achsenschnitt durch den Zylinder und rechts den durch den Doppelkegel.
Die Schnittflächen sind nach Aufgabenstellung ein Quadrat mit $36\ cm^2$ Fläche, somit sind alle Kanten der beiden Schnittflächen $6\ cm$ lang.
Die Oberfläche des Zylinders errechnen wir über die Formel $O_{Zyl} = 2\pi r_z^2 + 2\pi \cdot r_z \cdot h_z$.



Die Oberfläche des Doppelkegels entspricht zweimal der Mantelfläche eines Kegels. Die Mantelfläche eines Kegels errechnet sich über $M_{Kegel} = \pi \cdot r_k \cdot s_K$. Hierzu benötigen wir noch r_K, welches über den Satz des Pythagoras errechnet werden kann. Nach Berechnung der beiden Oberflächen bilden wir das prozentuale Verhältnis. Da aus der Aufgabenstellung nicht klar hervorgeht, welche der beiden Oberflächen als Grundwert genommen werden soll, berechnen wir sowohl als auch.

Klausuraufschrieb

a: $A_{Querschnitt} = 36 = a^2 \implies a = 6\ cm$

O_{Zyl}: $O_{Zyl} = 2\pi r_z^2 + 2\pi \cdot r_z \cdot h_z = 2\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$

$O_{Zyl} = \frac{3}{2}\pi \cdot 36 = 169{,}65\ \ cm^2$

M_{DK}: $M_{DK} = 2 \cdot M_{Kegel}$

M_{Kegel}: $M_{Kegel} = \pi \cdot r_k \cdot s_K$

r_k: $a^2 = r_K^2 + r_K^2 = 2r_k^2$

$r_K^2 = \frac{a^2}{2}$

$r_K = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = 4{,}2426$

$M_{Kegel} = \pi \cdot 4{,}2426 \cdot 6 = 79{,}97$

$M_{DK} = 2 \cdot 79{,}97 = 159{,}94\ \ cm^2$

Oberfläche Zylinder als Grundwert:

$p\ \% = \frac{M_{DK}}{O_{Zyl}} = \frac{159{,}94}{169{,}65} \cdot 100 = 94{,}28\ \%$

Die Oberfläche des Doppelkegels ist etwa $5{,}8\ \%$ *kleiner als die des Zylinders.*

Oberfläche Doppelkegel als Grundwert:

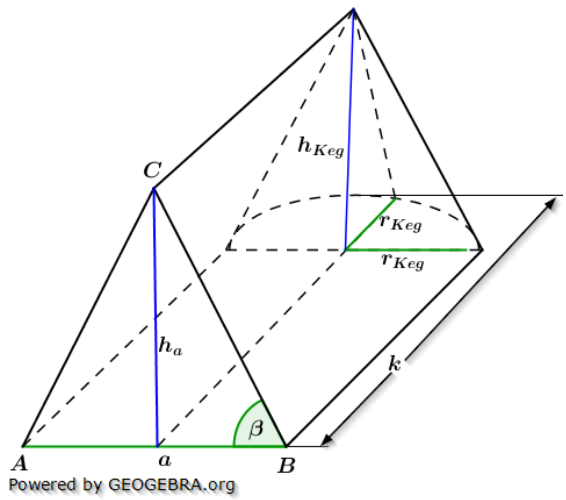
$p\ \% = \frac{O_{Zyl}}{M_{DK}} = \frac{169{,}65}{159{,}94} \cdot 100 = 106{,}1\ \%$

Die Oberfläche des Zylinders ist etwa $6{,}1\ \%$ *größer als die des Doppelkegels.*

Lösung W2b/2015

Lösungslogik

Das gegebene Volumen $V_{Körper} = 1280\ cm^3$ setzt sich zusammen aus dem Volumen des Dreiecksprismas zuzüglich des Volumens des Halbkegels. Der Radius r_{Keg} ist gleich der halben Länge der Kante a.
Die Höhe h_a zur Berechnung des Volumens des Dreiecksprismas ermitteln wir über den $tan\beta$. Die Höhe des Dreiecksprismas ergibt sich aus $k - r_{Keg}$.
Zur Berechnung des Volumens des Halbkegels ist $h_{Keg} = h_a$.
Alle erforderlichen Werte sind nun bekannt, wir stellen die Formel für das Gesamtvolumen auf und lösen die Formel nach k auf.



Klausuraufschrieb

$V_{Körper} = 1280 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a . (k - r_{Keg}) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

r_{Keg}: $\quad r_{Keg} = \frac{a}{2} = 5{,}7$

h_a: $\quad tan\beta = \frac{h_a}{\frac{a}{2}} \qquad | \quad \cdot \frac{a}{2}$

$\quad h_a = \frac{a}{2} \cdot tan\beta = 5{,}7 \cdot tan62° = 10{,}72$

h_{Keg}: $\quad h_{Keg} = h_a$

Alle Unbekannten sind nun bekannt.

k: $\quad \frac{1}{2} \cdot 11{,}4 \cdot 10{,}72 \cdot (k - 5{,}7) + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5{,}7^2 \cdot 10{,}72 = 1280$

$\quad 61{,}104 \cdot (k - 5{,}7) + 182{,}3657 = 1280 \qquad | \quad -182{,}3657$

$\quad 61{,}104 \cdot (k - 5{,}7) = 1097{,}6343 \qquad | \quad : 61{,}104$

$\quad k - 5{,}7 = 17{,}9634 \qquad | \quad +5{,}7$

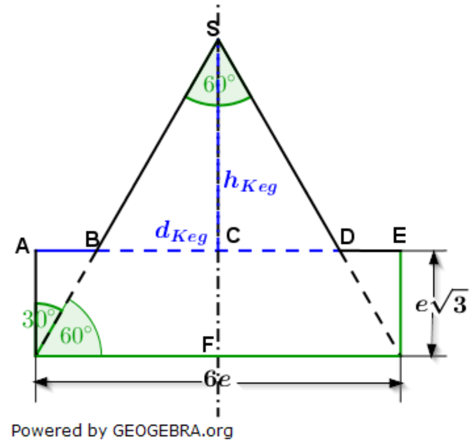
$\quad k = 23{,}66$

Die Gesamtlänge von k beträgt $23{,}66\ cm$.

Lösung W2b/2019

Lösungslogik

Das Volumen des zusammengesetzten Körpers besteht aus dem Volumen eines Zylinders mit Durchmesser $6e$ und der Höhe $e\sqrt{3}$ zuzüglich dem Volumen eines Kegels mit Durchmesser d_{Keg} und Höhe h_{Keg}.



$V_{Zyl} = \frac{\pi d_{Zyl}^2}{4} \cdot h_{Zyl}$; $V_{Keg} = \frac{1}{3}\frac{\pi d_{Keg}^2}{4} \cdot h_{Keg}$

Berechnung von d_{Keg}:

Wir berechnen die Strecke $\overline{AB}$ aus $tan(30\,°) = \frac{\overline{AB}}{e\sqrt{3}}$

$d_{Keg} = 6e - 2 \cdot \overline{AB}$

Berechnung von h_{Keg}:

Zunächst ermitteln wir die Gesamthöhe $\overline{SF}$ des Körpers über $tan(30\,°) = \frac{3e}{\overline{SF}}$.

$h_{Keg} = \overline{SF} - e\sqrt{3}$, alle erforderlichen Werte sind nun bekannt.

Klausuraufschrieb

$V_{ges} = V_{Zyl} + V_{Keg}$

$V_{Zyl} = \pi r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl} = \pi \cdot (3e)^2 \cdot e\sqrt{3} = 9\pi e^3\sqrt{3}$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$

$\overline{AB}$: $\quad tan(30\,°) = \frac{\overline{AB}}{e\sqrt{3}} \quad | \quad \cdot e\sqrt{3}$

$\overline{AB} = e\sqrt{3} \cdot \tan(30°) = e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = e$

r_{Keg}: $\quad r_{Keg} = \frac{6e - 2\cdot\overline{AB}}{2} = 2e$

h_{Keg}: $\quad h_{Keg} = \overline{FS} - e\sqrt{3}$

$\overline{FS}$: $\quad tan(30\,°) = \frac{3e}{\overline{SF}} \quad | \quad \cdot \overline{SF};\ :\tan(30°)$

$\overline{FS} = \frac{3e}{\tan(30\,°)} = \frac{3e}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9e}{\sqrt{3}} = 3e\sqrt{3}$

$h_{Keg} = 3e\sqrt{3} - e\sqrt{3} = 2e\sqrt{3}$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg} = \frac{1}{3}\pi(2e)^2 \cdot 2e\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi e^3\sqrt{3}$

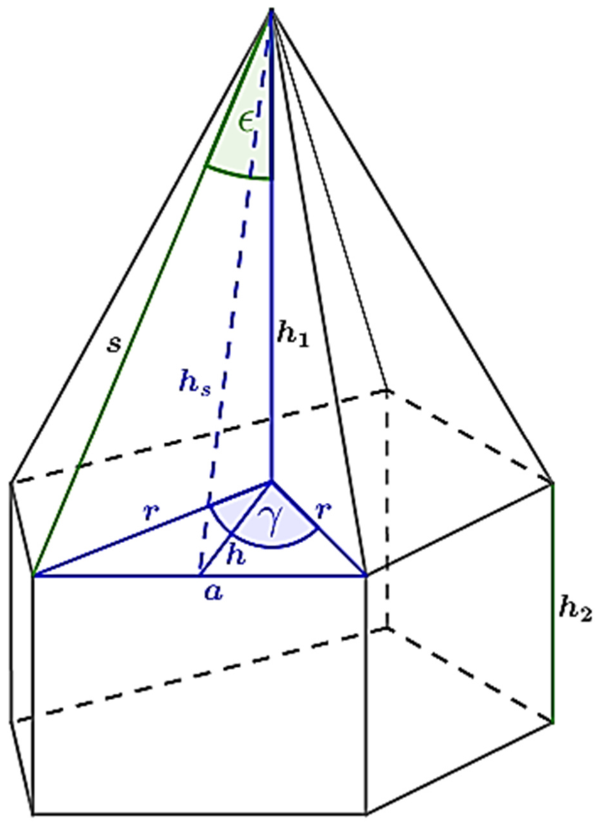
$V_{ges} = 9\pi e^3\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi e^3\sqrt{3} = \pi e^3\sqrt{3} \cdot \left(9 + \frac{8}{3}\right) = \frac{35}{3}\pi e^3\sqrt{3}$

q.e.d.

Lösung B2b/2021

<u>Lösungslogik</u>

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ergibt sich aus der Summe der Fläche der fünfseitigen Grundfläche, dem Mantel des fünfseitigen Prismas sowie dem Mantel der fünfseitigen aufgesetzten Pyramide.
Zur Berechnung der aufgeführten Flächen sind zunächst noch Vorberechnungen zu machen (siehe Grafik rechts).



Powered by GEOGEBRA.org

Winkel γ:
Wegen des regelmäßigen Fünfecks ist $\gamma = \frac{360\,°}{5} = 72\,°$.
Radius r:
Berechnung über den $\sin(\epsilon)$.
Seitenkante a:
Berechnung von $\frac{1}{2}a$ über den $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.
Höhe h Basisdreieck Grundfläche:
Berechnung über den Satz des Pythagoras.
Höhe h_s Seitendreieck Pyramide:
Berechnung über den Satz des Pythagoras.

Größe der Grundfläche (regelmäßiges Fünfeck):
Die Größe der Grundfläche bestimmt sich über 5 Basisdreiecke über
$A_{Fünfeck} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$
Größe der Mantelfläche fünfseitiges Prisma:
$M_{Prisma} = 5 \cdot a \cdot h_2$
Größe der Mantelfläche fünfseitige Pyramide:
$M_{Pyramide} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

Klausuraufschrieb

Vorberechnungen (siehe Grafik oben):

γ: $\gamma = \frac{1}{5} \cdot 360\,° = 72\,°$

r: $\sin(\epsilon) = \frac{r}{s}$

$r = s \cdot \sin(\epsilon) = 12{,}6 \cdot \sin(33\,°) = 6{,}86$

a: $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{r}$

$\frac{a}{2} = r \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$a = 2r \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 6{,}86 \cdot \sin(36\,°) = 8{,}064$

h: $r^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | Satz des Pythagoras

$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6{,}86^2 - 4{,}03^2} = 5{,}55$

h_s: $s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | Satz des Pythagoras

$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12{,}6^2 - 4{,}03^2} = 11{,}94$

Oberfläche zusammengesetzter Körper:

$O_{Körper}$:

$O_{Körper} = A_{Fünfeck} + M_{Prisma} + M_{Pyramide}$

$A_{Fünfeck}$:

$A_{Fünfeck} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8{,}064 \cdot 5{,}55 = 111{,}888$

M_{Prisma}:

$M_{Prisma} = 5 \cdot a \cdot h_2 = 5 \cdot 8{,}064 \cdot 5{,}6 = 225{,}792$

$M_{Paramide}$:

$M_{Pyramide} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8{,}064 \cdot 11{,}94 = 240{,}71$

$O_{Körper} = 111{,}888 + 225{,}762 + 240{,}71 = 578{,}36$

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ist $578{,}4\ cm^2$ *groß.*