WIKI Ableitungen zur Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Einführung

Die beiden Begriffe „Differenzierbarkeit" und „Stetigkeit" sind wesentliche Begriffe der Analysis. In diesem Kapitel lernen wir die beiden Begriffe kennen und wie wir damit umgehen müssen.

Stetigkeit

Zunächst einmal eine ganz anschauliche Erläuterung:
Eine Funktion f heißt dann in einem Intervall $I = [a; b]$ stetig, wenn man den dazugehörigen Graphen vom linken Intervallpunkt bis zum rechten Intervallpunkt zeichnen kann, ohne dabei den Zeichenstift absetzen zu müssen.

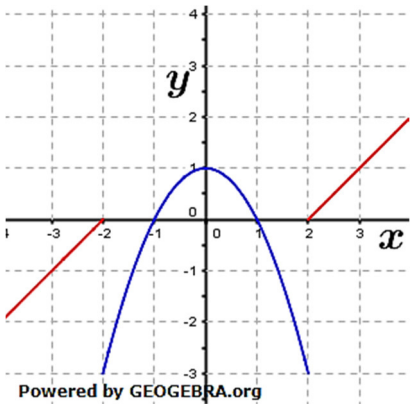
Anders ausgedrückt: Wenn sich alle Punkte des Graphen eine Funktion f innerhalb des Intervalls $I = [a; b]$ nahtlos aneinanderfügen, ohne dass sich irgendwelche Sprünge ergeben, dann ist die Funktion f im Intervall $I = [a; b]$ stetig.

Beispiel 1:

Wir betrachten die abschnittsweise definierte Funktion f mit

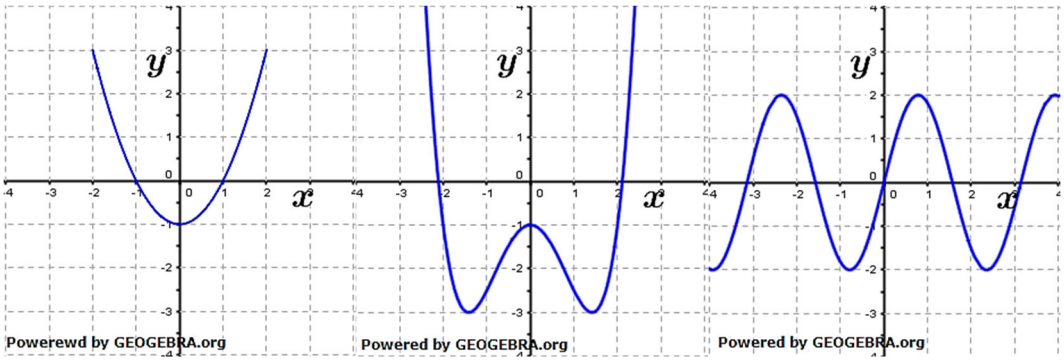
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } -\infty < x < -2 \\ -x^2+1 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ x-2 & \text{für } 2 < x < \infty \end{cases}$$

An den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ weist der Graph von f Sprünge auf.
An diesen Stellen ist f ***unstetig.***



Beispiel 2:

Betrachten wir die uns bekannten Funktionen, wie z. B. die Potenzfunktionen, die ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen usw. usw., stellen wir fest, dass diese innerhalb ihres Definitionsbereiches $\mathbb{D}_f$ alle stetig sind, da sie an keiner Stelle x_0 einen Sprung aufweisen.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Merksatz

Stetigkeit:
Die Definitionsmenge einer Funktion f sei $\mathbb{D}_f$ und deren Wertemenge sei $\mathbb{W}_f$.
Eine Funktion f heißt an der Stelle $x = x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{D}_f$ *genau dann stetig*, wenn

☞ der Funktionswert $f(x_0)$ existiert, d. h. $f(x_0) \in \mathbb{W}_f$,

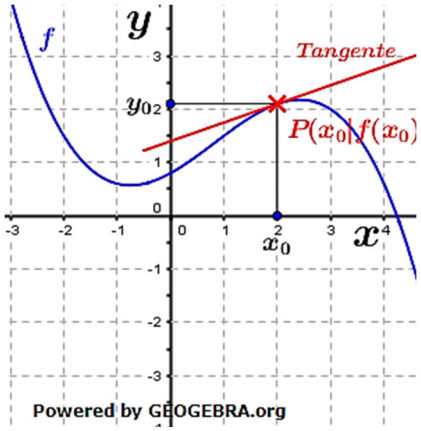
☞ der Grenzwert von f für $x = x_0$ existiert und gleich einer bestimmten Zahl $g \in \mathbb{R}$ ist und wenn

☞ $f(x_0) = g$ gilt.

Ist nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, dann ist die Funktion f an der Stelle $x = x_0$ *unstetig.*

Differenzierbarkeit

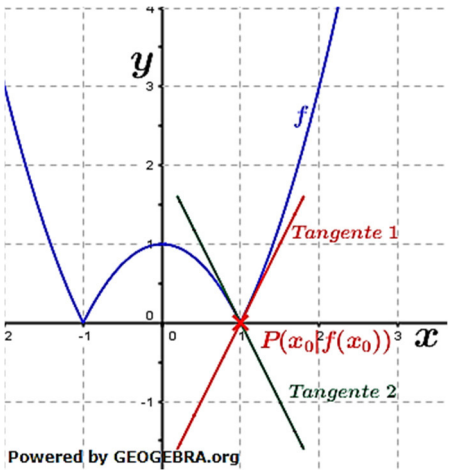
Im Kapitel „Vom Differenzenquotienten zur Ableitung" haben wir kennengelernt, dass die Begriffe Differenzialquotient und Ableitung denselben Umstand beschreiben, nämlich die Steigung der Tangente in einem bestimmten Punkt des Graphen einer Funktion f.
Demzufolge ist eine Funktion f an der Stelle x_0 nur dann differenzierbar, wenn eine eindeutige Steigung existiert.
Eine wesentliche Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 ist (folgerichtig aus der Stetigkeit hergeleitet):



Die Funktion muss an der Stelle x_0 stetig sein.

Diese Forderung alleine reicht aber nicht aus, wie folgendes Beispiel zeigt:
Beispiel 3:

Wir betrachten die Betragsfunktion f mit $f(x) = |x^2 - 1|$.
Im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ existiert keine eindeutige Tangente, denn:
$t_1(x) = m_1x + c_1$ und $t_2(x) = m_2x + c_2$.
Der Graph der Funktion hat in x_0 keinen Sprung, ist also stetig, weist aber in x_0 zwei Tangenten auf. Das bedeutet, die Ableitungsfunktion ist an der Stelle x_0 nicht eindeutig, die Funktion ist in dieser Stelle nicht differenzierbar.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Formulieren wir diese Erkenntnis anschaulich:
Stellen des Graphen einer Funktion f, die Spitzen, die Knicke besitzen, sind an dieser Stelle nicht differenzierbar.

Umgekehrt bedeutet das für die Stetigkeit:
Ist eine Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist sie dort auch stetig.

Merksatz

Linksseitiger Differenzialqotient
$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x < x_0$

Rechtsseitiger Differenzialquotient
$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x > x_0$

Sind die Werte des linksseitigen Differenzialquotienten und des rechtsseitigen Differenzialquotienten in x_0 gleich groß, so ist die Funktion f mit $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar.
Die Ableitung der Funktion $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ bestimmt für $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.