



Aufgabe A1

Bestimme die erste Ableitung und vereinfache so weit wie möglich.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $f(x) = -e^{-2x} \cdot \sin(e^x)$ | b) $f(x) = \frac{\cos(2x+4)}{2e^x}$ |
| c) $f(x) = x^{e^2}$ | d) $f(x) = x^{e^2} \cdot (x-1)$ |
| e) $f(x) = 5^{2x}$ | f) $f_a(x) = 5a^{-x}$ |
| g) $f_a(x) = a^x \cdot e^{2x}$ | h) $f_a(x) = (4a^x + 5) \cdot \frac{1}{x}$ |

Aufgabe A2

- a) Zeige, dass die n -te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (x+1)$ lautet:
 $f^{(n)'}(x) = e^x(x+n+1)$
- b) Zeige, dass die n -te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{-x} \cdot (x-1)$ lautet:
 $f^{(n)'}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}(x-(n+1))$

Aufgabe A3

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionsgleichungen:

- | | |
|--|--------------------------------------|
| a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot e^{2x}$ | b) $f(x) = (3x + e^{-x})^2$ |
| c) $f(x) = 4(x^3 + \frac{1}{e^{(x-1)^2}})^2$ | d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^{3x+3}$ |
| e) $f(x) = \left(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}\right)^2$ | |

Lösung A1

a) $f(x) = -e^{-2x} \cdot \sin(e^x)$

$$u = -e^{-2x}$$

$$u' = 2e^{-2x}$$

$$v = \sin(e^x)$$

$$v' = e^x \cdot \cos(e^x)$$

$$f'(x) = 2e^{-2x} \cdot \sin(e^x) - e^{-2x} \cdot e^x \cdot \cos(e^x) = e^{-2x} \cdot (2 \sin(e^x) - e^x \cdot \cos(e^x))$$

b) $f(x) = \frac{\cos(2x+4)}{2e^x}$

$$u = \cos(2x+4)$$

$$u' = -2 \sin(2x+4)$$

$$v = 2e^x$$

$$v' = 2e^x$$

$$f'(x) = \frac{-4e^x \cdot \sin(2x+4) - 2e^x \cdot \cos(2x+4)}{4e^{2x}} = -\frac{2 \sin(2x+4) + \cos(2x+4)}{2e^x}$$

c) $f(x) = x^{e^2}$

$$f'(x) = e^2 \cdot x^{e^2-1}$$

d) $f(x) = x^{e^2} \cdot (x-1)$

$$f'(x) = x^{e^2-1}((e^2+1) \cdot x - e^2)$$

e) $f(x) = 5^{2x}$

$$f'(x) = 2 \ln(5) \cdot 5^{2x}$$

f) $f_a(x) = 5a^{-x}$

$$f'_a(x) = -5 \cdot \ln(a) \cdot a^{-x}$$

g) $f_a(x) = a^x \cdot e^{2x}$

$$u = a^x$$

$$u' = \ln(a) \cdot a^x$$

$$v = e^{2x}$$

$$v' = 2e^{2x}$$

$$f'_a(x) = \ln(a) \cdot a^x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot a^x = a^x \cdot e^{2x} \cdot (\ln(a) + 2)$$

h) $f_a(x) = (4a^x + 5) \cdot \frac{1}{x}$

$$u = 4a^x + 5$$

$$u' = 4 \ln(a) \cdot a^x$$

$$v = \frac{1}{x}$$

$$v' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{4 \ln(a) \cdot a^x}{x} - \frac{4a^x + 5}{x^2} = \frac{4a^x}{x} \cdot \left(\ln(a) - \frac{5}{x} \right)$$

Lösung A2

a) $f(x) = e^x \cdot (x+1)$

$$f'(x) = e^x \cdot (x+2)$$

$$f''(x) = e^x \cdot (x+3)$$

$$f'''(x) = e^x \cdot (x+4)$$

$$f''(x) = e^x \cdot (x+3)$$

$$f'''(x) = e^x \cdot (x+5)$$

Durch mehrfaches Ableiten zeigt sich, dass die ursprüngliche Konstante 1 in der Klammer mit jeder weiteren Ableitung um 1 zunimmt. Somit ist:

$$f^{(n)'}(x) = e^x(x+n+1)$$

b) $f(x) = e^{-x} \cdot (x-1)$

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot (x-2)$$

$$f''(x) = -e^{-x} \cdot (x-3)$$

$$f'''(x) = -e^{-x} \cdot (x-4)$$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (x-3)$$

$$f'''(x) = e^{-x} \cdot (x-5)$$

Durch mehrfaches Ableiten zeigt sich, dass die ursprüngliche Konstante 1 in der Klammer mit jeder weiteren Ableitung um 1 abnimmt. Weiterhin wechselt das Vorzeichen von Ableitung zu Ableitung von „+“ nach „-“ und umgekehrt. Die jeweilige Ableitung ist negativ für ungerade n und positiv für gerade n . Dies ist in der Ableitung berücksichtigt durch den Faktor $(-1)^n$. Somit ist:

$$f^{(n)'}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}(x-(n+1))$$

Dr.-Ing. Meinhof Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de