Lösung A1

a) $f(x) = -e^{-2x} \cdot sin(e^x)$ $\quad u = -e^{-2x} \quad u' = 2e^{-2x}$

$v = sin(e^x) \quad v' = e^x \cdot cos(e^x)$

$f'(x) = 2e^{-2x} \cdot sin(e^x) - e^{-2x} \cdot e^x \cdot cos(e^x) = e^{-2x} \cdot (2\,sin(e^x) - e^x \cdot cos(e^x))$

b) $f(x) = \frac{cos(2x+4)}{2e^x}$ $\quad u = \cos(2x+4) \quad u' = -2\sin(2x+4)$

$v = 2e^x \quad v' = 2e^x$

$f'(x) = \frac{-4e^x \cdot \sin(2x+4) - 2e^x \cdot \cos(2x+4)}{4e^{2x}} = -\frac{2\,sin(2x+4) + cos(2x+4)}{2e^x}$

c) $f(x) = x^{e^2}$

$f'(x) = e^2 \cdot x^{e^2-1}$

d) $f(x) = x^{e^2} \cdot (x-1)$

$f'(x) = x^{e^2-1}\left((e^2+1) \cdot x - e^2\right)$

e) $f(x) = 5^{2x}$ $\quad f'(x) = 2ln(5) \cdot 5^{2x}$

f) $f_a(x) = 5a^{-x}$ $\quad f_a'(x) = -5 \cdot ln(a) \cdot a^{-x}$

g) $f_a(x) = a^x \cdot e^{2x}$ $\quad u = a^x \quad u' = ln(a) \cdot a^x$

$v = e^{2x} \quad v' = 2e^{2x}$

$f_a{}'(x) = ln(a) \cdot a^x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot a^x = a^x \cdot e^{2x} \cdot (ln(a) + 2)$

h) $f_a(x) = (4a^x + 5) \cdot \frac{1}{x}$ $\quad u = 4a^x + 5 \quad u' = 4ln(a) \cdot a^x$

$v = \frac{1}{x} \quad v' = -\frac{1}{x^2}$

$f_a{}'(x) = \frac{4\,ln(a) \cdot a^x}{x} - \frac{4a^x + 5}{x^2} = \frac{4a^x}{x} \cdot \left(ln(a) - \frac{5}{x}\right)$

Lösung A2

a) $f(x) = e^x \cdot (x+1)$

$f'(x) = e^x \cdot (x+2) \quad f''(x) = e^x \cdot (x+3)$

$f'''(x) = e^x \cdot (x+4) \quad f''''(x) = e^x \cdot (x+5)$

Durch mehrfaches Ableiten zeigt sich, dass die ursprüngliche Konstante 1 in der Klammer mit jeder weiteren Ableitung um 1 zunimmt. Somit ist:
$f^{(n)\prime}(x) = e^x(x+n+1)$

b) $f(x) = e^{-x} \cdot (x-1)$

$f'(x) = -e^{-x} \cdot (x-2) \quad f''(x) = e^{-x} \cdot (x-3)$

$f'''(x) = -e^{-x} \cdot (x-4) \quad f''''(x) = e^{-x} \cdot (x-5)$

Durch mehrfaches Ableiten zeigt sich, dass die ursprüngliche Konstante 1 in der Klammer mit jeder weiteren Ableitung um 1 abnimmt. Weiterhin wechselt das Vorzeichen von Ableitung zu Ableitung von „+" nach „−" und umgekehrt. Die jeweilige Ableitung ist negativ für ungerade n und positiv für gerade n. Dies ist in der Ableitung berücksichtigt durch den Faktor $(-1)^n$. Somit ist:
$f^{(n)\prime}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}\left(x - (n+1)\right)$

Lösung A3

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot e^{2x}$ $\quad u = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \quad u' = \frac{6}{5}x^2 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)$

$v = e^{2x} \quad v' = 2e^{2x}$

$$f'(x) = \frac{6}{5}x^2 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right) \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 = \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400)$$

$u = \frac{2e^{2x}}{25} \quad u' = \frac{4e^{2x}}{25}$

$v = x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400 \quad v' = 6x^5 + 15x^4 + 120x^2 + 12x$

$$f''(x) = \frac{4e^{2x}}{25} \cdot (x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400) + \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (6x^5 + 15x^4 + 120x^2 + 12x)$$
$$= \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (2x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 80x^3 + 132x^2 + 12x + 800)$$

b) $f(x) = (3x + e^{-x})^2$

$$f'(x) = 2 \cdot (3x + e^{-x}) \cdot (3 - e^{-x}) = 18x - 6xe^{-x} + 6e^{-x} - 2e^{-2x}$$
$$= 6x(3 - e^{-x}) + 2e^{-x}(3 - e^{-x}) = (3 - e^{-x})(6x + 2e^{-x})$$

$u = 3 - e^{-x} \quad u' = e^{-x}$

$v = 6x + 2e^{-x} \quad v' = 6 - 2e^{-x}$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (6x + 2e^{-x}) + (6 - 2e^{-x}) \cdot (3 - e^{-x})$$
$$= 6xe^{-x} + 2e^{-2x} + 18 - 6e^{-x} - 6e^{-x} + 2e^{-2x}$$
$$= 6xe^{-x} + 4e^{-2x} - 12e^{-x} + 18$$

c) $f(x) = 4(x^3 + \frac{1}{e^{(x-1)^2}})^2 = 4\left(e^{-(x-1)^2} + x^3\right)^2$

$$f'(x) = 8\left(e^{-(x-1)^2} + x^3\right) \cdot \left(3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2}\right)$$

$u = e^{-(x-1)^2} + x^3 \quad u' = 3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2}$

$v = 3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2} \quad v' = 6x + 4(x-1)^2 \cdot e^{-(x-1)^2} - 2e^{-(x-1)^2}$

$$f''(x) = 8\left(3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2}\right)^2 + 8\left(e^{-(x-1)^2} + x^3\right) \cdot \left(6x + 4(x-1)^2 \cdot e^{-(x-1)^2} - 2e^{-(x-1)^2}\right)$$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^{3x+3} \quad u = x^2 - 4 \quad u' = 2x$

$v = e^{3x+3} \quad v' = 3 \cdot e^{3x+3}$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{3x+3} + 3e^{3x+3} \cdot (x^2 - 4) = e^{3x+3} \cdot (2x + 3x^2 - 12)$$

$u = e^{3x+3} \quad u' = 3 \cdot e^{3x+3}$

$v = 2x + 3x^2 - 12 \quad v' = 2 + 6x$

$$f''(x) = 3 \cdot e^{3x+3} \cdot (2x + 3x^2 - 12) + e^{3x+3} \cdot (2 + 6x) = e^{3x+3}(6x + 9x^2 - 36 + 2 + 6x)$$
$$= e^{3x+3}(9x^2 + 12x - 34)$$

e) $f(x) = \left(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}\right)^2 \quad u = e^x \quad u' = e^x$

$v = \frac{1}{2^x} \quad v' = -\frac{ln(2)}{2^x}$

$$f'(x) = 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \cdot \left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot ln(2)}{2^x}\right)$$

$u = 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \quad u' = 2\left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot \ln(2)}{2^x}\right)$

$v = 2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot ln(2)}{2^x} \quad v' = \frac{-e^x(\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1)}{2^x}$

$$'(x) = 2\left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot \ln(2)}{2^x}\right)^2 + 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \cdot \frac{-e^x(\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1)}{2^x}$$
$$= 2^{2-2x}(2^{2x+1} + (\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1) \cdot e^{2x}$$
$$+((-ln^2(2) + 2\ln(2) - 1)x + 2\ln(2) - 2)2^x\, e^x)$$