Einführung

Grafisches Differenzieren (auch grafische Ableitung genannt) gibt uns zum einen die Möglichkeit, die Steigung des Graphen einer Funktion f in einem bestimmten Punkt $P(x_0|y_0)$ zu ermitteln, ohne dass wir die Funktionsgleichung f(x) des Graphen von f kennen, zum anderen können wir damit auch den Verlauf des Graphen der Ableitung f' skizzieren. Umgekehrt gilt dies auch für das Skizzieren des Graphen einer Funktion f aus dem Verlauf des Ableitungsgraphen f'. Letzteres wird dann nicht mehr "Grafisches



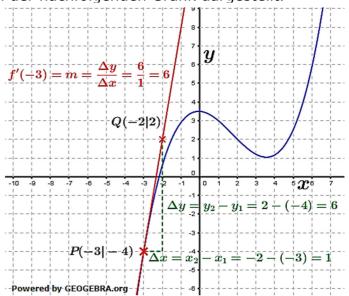
<u>Steigung in einem bestimmten Punkt</u>

Differenzieren" genannt, sondern "Grafisches Integrieren".

Hierzu müssen wir in dem bestimmten Punkt zeichnerisch eine Tangente an die zu untersuchende Kurve legen, wie in der nachfolgenden Grafik dargestellt.

Wir wollen die Steigung der Kurve, deren Funktionsgleichung wir nicht kennen, an der Stelle $x_0 = -3$ bestimmen. Wir tragen den Punkt P ein und stellen fest, dass der zugehörige y-Wert gleich -4 ist.

Jetzt zeichnen wir eine Tangente an die Kurve im Punkt P(-3|-4). Als nächstes suchen wir auf der eingezeichneten Tangente einen weiteren, gut ablesbaren Punkt und stellen fest, dass dieser Punkt bei Q(-2|2) liegt.



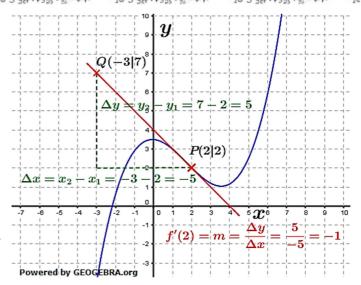
Wir tragen an die Tangente ein Steigungsdreieck ein (in obiger Grafik grün gezeichnet) und erhalten damit die Differenz Δx der x-Koordinaten und Δy der γ -Koordinaten von P und Q.

Zum Schluss berechnen wir die Steigung, indem wir $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bilden. Im Beispiel erhalten wir den Wert 6. Also ist die Steigung m der Tangente gleich 6 und damit die Steigung f'(-3) der Kurve ebenfalls 6.

H. Zowlap Zum grafischen Differenzieren

Die seitliche Grafik stellt den gleichen Zusammenhang für den Ausgangspunkt P(2|2) der Kurve dar.

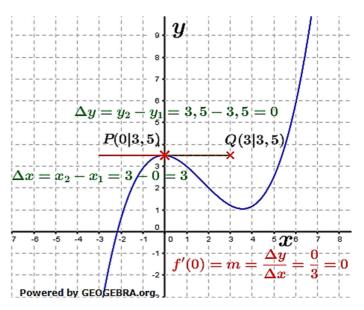
Die Suche nach einem zweiten, gut ablesbaren Punkt auf der Tangente durch den Punkt P(2|2) führt uns zu Q(-3|7). Wir bilden wieder die Differenzen Δx und Δy , stellen den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ auf und erhalten damit die Steigung der Tangente mit m=-1 sowie die Steigung der Kurve in P(2|2) ebenfalls mit f'(2)=-1.



Als letztes interessiert uns noch ein besonderer Punkt, nämlich der Punkt der Kurve bei $x_0=0$. Wie wir sehen, erhalten wir für die Differenz Δy der y-Werte den Wert 0.

Dies bedeutet, dass dort die Tangente an die Kurve als auch die Kurve selbst keine Steigung haben, bzw. f'(0) = m = 0 ist.

Solche Stellen, in denen offenbar eine positive Steigung in eine negative Steigung übergeht, bezeichnen wir als Extremstellen einer Kurve. Wechselt in einer Extremstelle die Steigung von



positiv nach negativ, sprechen wir von einem Hochpunkt. Wechselt die Steigung hingegen von negativ nach positiv, so haben wir es mit einem Tiefpunkt zu tun.

O by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium www.fit-in-mathe-online.de

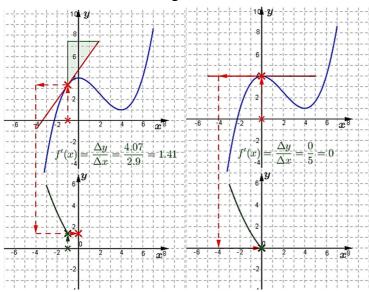
Graphen der Ableitungsfunktion skizzieren

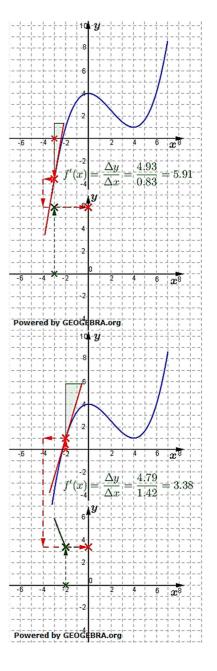
Da wir nun wissen, wie wir Steigungen in bestimmten Punkten des Graphen einer Funktion f grafisch feststellen können, können wir auch mithilfe dieses Verfahrens den Verlauf des Ableitungsgraphen näherungsweise bestimmen. Hierzu müssen wir lediglich in mehreren Punkten des Ursprungsgraphen die einzelnen Steigungen bestimmen, die dann als Punkte in ein gesondertes Koordinatensystem eingezeichnet werden und skizzenmäßig miteinander verbunden werden. Das sieht dann wie folgt aus: Wir beginnen am linken Rand unserer Grafik, z. B. bei

Wir beginnen am linken Rand unserer Grafik, z. B. bei $x_0=-2.9$. Über das eingezeichnete Steigungs-dreieck erhalten wir eine Steigung f'(-2.9)=5.63. Im darunterliegenden Koordinatensystem zeichnen wir den zugehörigen Punkt der Ableitungskurve bei P(-2.9|5.63) ein.

Nun wiederholen wir diesen Vorgang für z.B. $x_0 = -2$. Wie aus nebenstehender Grafik ersichtlich, erhalten wir den neuen Punkt P(-2|3,38) im unteren Koordinatensystem (Die Zwischenpunkte für $-2,9 < x_0 < -2$ wurden in der Grafik schon zu einer Kurve verbunden).

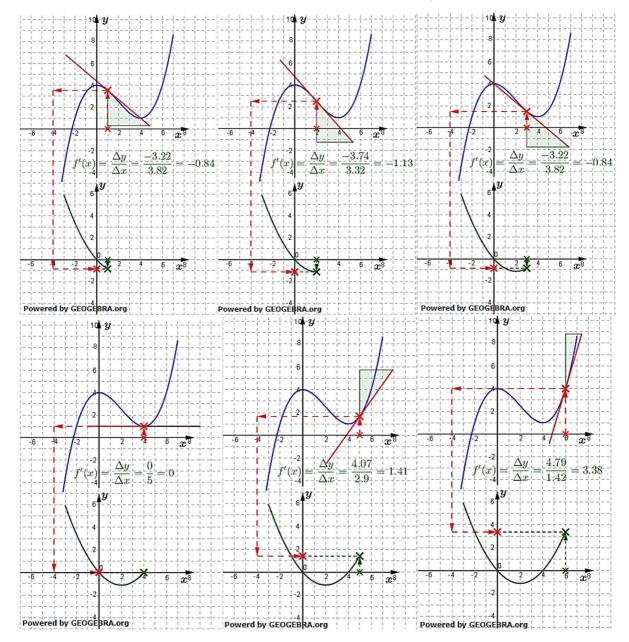
Die unteren Grafiken zeigen zwei weitere Positionen.





In der oberen rechten Grafik haben wir einen interessanten Punkt erreicht. Unsere Ausgangs-Kurve hat bei $x_0=0$ eine waagrechte Tangente. Die Ableitungskurve hat dort eine Nullstelle.

Nachfolgend sind weitere Grafiken mit fortschreitenden x_0 -Werten dargestellt.



Wie wir sehen, ein aufwändiges Verfahren. Um so etwas jedoch schneller bewerkstelligen zu können, bedienen wir uns lediglich einiger markanter Punkte unserer Ausgangskurve.

Markante Punkte

Betrachte dir hierzu die nebenstehende Grafik und die einzelnen Erläuterungen hierzu.

Als markante Punkte wählen wir die folgenden Stellen:

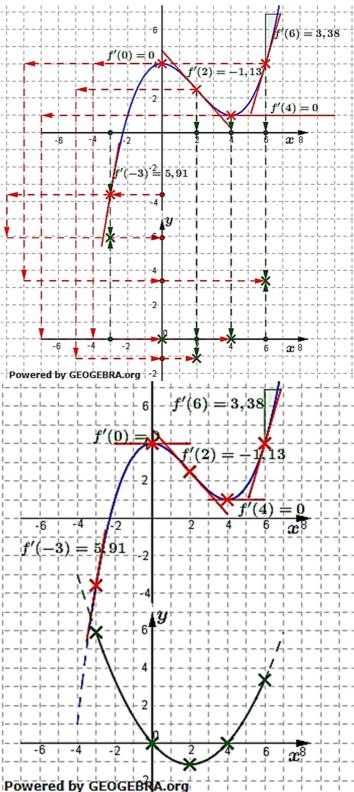
- 1. Am linken und rechten Rand des Systems die Stellen $x_0 = -3$ und $x_0 = 6$.
- 2. Die beiden Extremstellen, den Hochpunkt bei $x_0 = 0$ und den Tiefpunkt bei $x_0 = 4$.
- 3. Die Wendestelle bei $x_0 = 2$.

Beginnen wir mit den beiden Extremstellen. Dort hat unsere Kurve ja die Steigung 0. Somit müssen wir im Koordinaten-System der Ableitungskurve die Punkte A(0|0) und B(4|0) markieren.

Als nächstes wählen wir die Stelle $x_0=2$. Über die eingezeichnete Tangente ermitteln wir eine Steigung von etwa -1,1. Somit müssen wir den Punkt $\mathcal{C}(2|-1,1)$ im Koordinatensystem für die Ableitungskurve markieren.

Zum Schluss bestimmen wir noch die Steigung in $x_0 = -3$ und $x_0 = 6$ mithilfe einer eingezeichneten Tangente, erhalten für $x_0 = -3$ eine Steigung von etwa 5,9 und für $x_0 = 6$ eine Steigung von etwa 3,4. Wir markieren im Koordinatensystem der Ableitungskurve noch die Punkte D(-3|5,9) und E(6|3,4).

Damit haben wir genügend Punkte eingetragen, die wir dann skizzenmäßig verbinden und haben damit den Graphen der Ableitung gezeichnet.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500,000 Aufgaben für Schüle und Studium www.fit-in-mathe-online.de

Dr.-Ing. Melnoff Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Graphen der Stammfunktion skizzieren

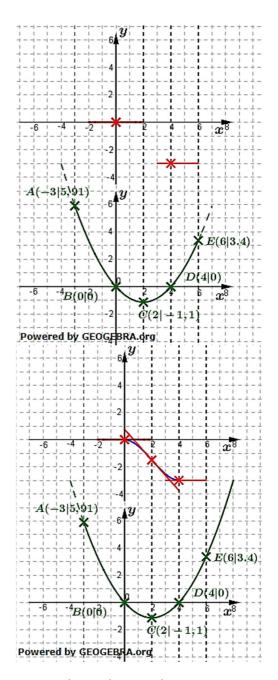
Jetzt kommt es aber auch vor, dass wir den Graphen der Ableitungsfunktion vorgegeben haben und wollen wissen, wie wohl der Graph der Ursprungsfunktion aussieht. Für diese Ursprungsfunktion hat der Mathematiker wieder einen neuen Begriff geschaffen und nennt diese Funktion die "Stammfunktion".

Wir betrachten uns nun dasselbe Beispiel wie gehen dabei aber von (un)bekannten Ableitungsfunktion aus. Wir verwenden wieder dieselben markanten Punkte A bis E. Zum weiteren Verständnis muss bewusst sein, dass uns y-Koordinaten dieser Punkte der Steigung der Stammfunktion an der jeweiligen Stelle x_0 entsprechen.

Als erstes zeichnen wir nun ein paar senkrechte Linien durch die Punkte. Irgendwo auf diesen Linien muss der entsprechende Punkt der Stammfunktion liegen und dort die Steigung gemäß dem *y*-Wert der Punkte haben.

Am einfachsten sind wohl die Punkte B und D, denn dort ist die Steigung ja 0, die Stammfunktion muss dort eine Extremstelle besitzen. Betrachten wir zunächst die Stelle $x_0=0$. In dieser Nullstelle wechselt das Vorzeichen der Ableitungsfunktion von "+" nach "-". Dies bedeutet, dass in $x_0=0$ die Stammfunktion einen Hochpunkt besitzt. Da wir aber nicht mehr genau wissen, in welcher Höhe dieser Hochpunkt liegt, tragen wir die waagrechte Tangente einfach auf der x-Achse liegend ein.

Bezüglich der Nullstelle bei $x_0=4$ liegt ein Vorzwuchenwechsel von "—" nach "+" vor, d.h., die Stammfunktion muss dort einen Tiefpunkt haben. Da bei $x_0=0$ ein Hochpunkt ist, muss der Kurvenpunkt bei $x_0=4$ unterhalb der x-Achse liegen. Wir zeichnen also eine waagrechte Tangente (bei etwa y=-3, siehe Grafik) ein.



Nun betrachten wir die Stelle bei $x_0=2$. Uber die y-Koordiate des Punktes C wissen wir, dass die Stammfunktion bei $x_0=2$ eine Steigung von -1,1 haben muss. Wir tragen eine Tangente mit der Steigung m=-1,1 etwa in halber y-Höhe zwischen $x_0=0$ und $x_0=4$ ein.

Jetzt können wir die Stammfunktion zwischen $x_0 = 0$ und $x_0 = 4$ schon skizzieren.

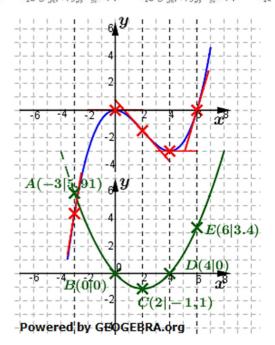
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500,000 Aufgaben für Schule und Studium www.fit-in-mathe-online.de

Es verbleiben jetzt lediglich noch die Stellen bei $x_0=-3$ und $x_0=6$. Die y-Koordinate der Punkte A und D sagt aus, dass die Stammfunktion dort positive Steigung haben muss, nämlich m=5,9 bei $x_0=-3$ und m=3,4 bei $x_0=6$.

Wegen des Hochpunktes bei $x_0=0$ und der positiven Steigung m=5.9 muss die y-Koordinate bei $x_0=-3$ somit unterhalb der x-Achse liegen.

Wegen des Tiefpunktes bei $x_0=4$ und der positiven Steigung m=3,4 muss die y-Koordinate bei $x_0=6$ somit oberhalb der y-Koordinate des Tiefpunktes bei $x_0=4$ liegen.

Wir zeichnen die beiden Tangenten an den entsprechenden Stellen ein (siehe Grafik) und verbinden dann lediglich das bereits eingezeichnete Teilstück zwischen $x_0=0$ und $x_0=6$ mit den seitlichen Punkten. Die Grafik unserer Stammfunktion ist somit skizziert.



Wie wir nun aber erkennen können, liegt unsere Stammfunktion tiefer, als bei der graphischen Ermittlung der Ableitungsfunktion im ersten Teil unserer Betrachtung. Dies rührt daher, als durch die Ableitung eine wesentliche Information der Stammfunktion verloren geht, nämlich die Information, um wie viele Einheiten die Stammfunktion in y-Richtung verschoben ist.

Die "N E W - Regel"

Die sogenannte "NEW-Regel" ist eine der wichtigsten Regeln für grafisches differenzieren und integrieren. Die Abkürzung "NEW" hat dabei nichts mit dem englischen Wort "new" = neu zu tun. In der Abkürzung "NEW" bedeutet:

N = Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel)

E = Extremstelle

W = Wendepunkt

Mit der NEW-Regel kannst du $90\,\%$ und mehr solcher Aufgaben ohne große Schwierigkeiten lösen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500,000 Aufgeben für Schüle und Studium www.fit-in-mathe-online.de

Merksatz

NEW -Regel							
Differenzieren	F(x) $f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$	N_{VZW}	E N _{VZW}	W E N_{VZW} $\neq 0$	W E N _{VZW}	W E	Integrieren

 N_{VZW} = Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, E = Extremstelle, W = Wendestelle F(x)=Stammfunktion, f(x)=1. Ableitung von F, f'(x)=2. Ableitung von F, f''(x)=3. Ableitung von F

Weiterhin gilt:

- Verläuft f oberhalb der x-Achse, so ist F streng monoton steigend.
- Verläuft f unterhalb der x-Achse, so ist F streng monoton fallend.
- Ist f' negativ, so ist F rechtsgekrümmt.
- Ist f' positiv, so ist F linksgekrümmt.
- Ist f'' im Wendepunkt > 0, so wechselt die Krümmung von rechts nach links.
- Ist f'' im Wendepunkt < 0, so wechselt die Krümmung von links nach rechts.

Die NEW-Regel liest sich wie folgt:

Beim grafischen Differenzieren:

Hat die Ausgangsfunktion F eine Nullstelle (mit VZW) kann bezüglich der weiteren Ableitungen keine Aussage getroffen werden.

Hat die Ausgangsfunktion F eine Extremstelle (Hoch- bzw. Tiefpunkt), so hat ihre erste Ableitung eine Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel), über weitere Ableitungen kann keine Aussage getroffen werden.

Hat die Ausgangsfunktion F eine Wendestelle, so hat ihre erste Ableitung eine Extremstelle (Hoch- bzw. Tiefpunkt), die zweite Ableitung eine Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel) und die dritte Ableitung ist ungleich 0. Ist die dritte Ableitung > 0, so wechselt der Graph der Funktion F von rechtsdrehend auf linksdrehend. Ist die dritte Ableitung < 0, so wechselt der Graph der Funktion F von linksdrehend auf rechtsdrehend.

Beim grafischen Integrieren:

Hat die Ableitungsfunktion f einen Wendepunkt, kann bezüglich der Stammfunktion F keine Aussage getroffen werden.

Hat die Ableitungsfunktion f eine Extremstelle (Hoch- bzw. Tiefpunkt), so hat die Stammfunktion F eine Wendestelle.

Hat die Ableitungsfunktion f eine Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel), so hat die Stammfunktion F einen Extrempunkt. Wechselt das Vorzeichen in der Nullstelle von "+" nach "-", so ist diese Extremstelle ein Hochpunkt.

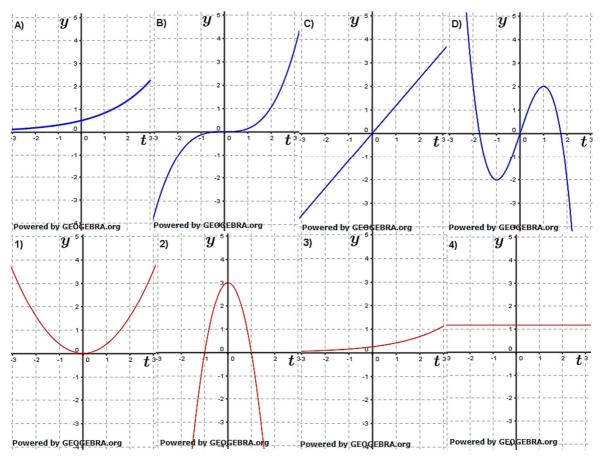
We chselt das Vorzeichen in der Nullstelle von "-" nach "+", so ist diese Extremstelle ein Tiefpunkt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500,000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Beispiel 1:

Ordne den Graphen A), B), C) und D) die Graphen der dazugehörigen Ableitungsfunktionen 1), 2), 3) und 4) zu.



Lösung 1:

Zum Graphen A) gehört Ableitungsgraph 3).

Graph A) hat weder Extremstellen noch Wendepunkte. Er ist in $x \in \mathbb{R}$ streng monoton steigend, deshalb muss sein Ableitungsgraph in $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der x-Achse verlaufen.

Zum Graphen B) gehört Ableitungsgraph 1)

Graph B) hat in $x_0=0$ eine Wendestelle, die im Ableitungsgraphen zu einer Extremstelle wird. Graph B) ist in $x\in\mathbb{R}$ streng monoton steigend, deshalb muss sein Ableitungsgraph in $x\in\mathbb{R}$ oberhalb der x-Achse verlaufen.

Zum Graphen C) gehört Ableitungsgraph 4).

Graph C) hat weder Extremstellen noch Wendepunkte. Seine Steigung ist in $x \in \mathbb{R}$ gleich (lineare Funktion) und m>0, deshalb muss sein Ableitungsgraph parallel zur x-Achse im Abstand der Steigung von C) verlaufen.

Zum Graphen D) gehört Ableitungsgraph 2).

Graph D) hat zwei Extremstellen, die im Ableitungsgraphen zu Nullstellen mit Vorzeichenwechsel führe. Graph D) hat einen Wendepunkt, der im Ableitungsgraph zu einer Extremstelle führt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schüle und Studium
www.fit-in-mathe-online.de

Dr. Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

H Zowy Zum grafischen Differenzieren

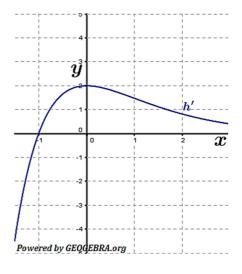
Beispiel 2:

h ist eine für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Nebenstehend ist für $-1.5 \le x \le 3$ das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion h' dargestellt.

Entscheide, ob die folgenden Aussagen über die Funktion h richtig, falsch oder unentscheidbar sind.

Begründe deine Entscheidung.

- (1) An der Stelle x = -1 hat das Schaubild von h einen Tiefpunkt.
- (2) h(x) > 0 für $0 \le x \le 3$.
- (3) An der Stelle x = 0 hat das Schaubild von h eine Tangente, die parallel ist zur Geraden mit der Gleichung y = 2x 7.
- (4) h ist streng monoton wachsend für $-1.5 \le x \le 0$.



Lösung 2:

- (1) Die Aussage ist wahr. h' hat an der Stelle x = -1 eine Nullstelle mit VZW von nach +.
- (2) Die Aussage ist unentscheidbar, da jede Funktion f mit f(x) = h(x) + C eine Stammfunktion von h' ist.
- (3) Die Aussage ist wahr. h'(0) = 2 (siehe Grafik). Somit hat h an der Stelle x = 0 die Steigung 2.
- (4) Die Aussage ist falsch. h' verläuft im Intervall $-1.5 \le x < -1$ unterhalb der x-Achse, somit ist h in diesem Intervall monoton fallend.

Weiterführende Informationen zu diesem Thema findest du im Kapitel "Analysis/Differenzialrechnung/Grafisches Differenzieren und Integrieren".

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de

Dr. Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de