Die Kettenregel

Inhaltsverzeichnis zur Kettenregel

Kapitel mit 124 Aufgaben

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Bisher haben wir die einfachsten Ableitungsregeln kennengelernt. Jetzt gibt es aber auch Funktionen, die aus unterschiedlichen Funktionstypen miteinander verkettet sind. Bevor wir auf die Kettenregel eingehen, befassen wir uns deshalb zunächst einmal mit dem Begriff *Verkettung*.

Verkettung

Zum einen kennen wir bereits die unterschiedlichen Funktionsarten wie:

- Lineare Funktionen
- Potenzfunktionen
- Ganzrationale Funktionen / gebrochen rationale Funktionen
- Trigonometrische Funktionen
- Exponentialfunktionen

Zum anderen haben wir bestimmt schon einmal eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = (2x+1)^3$ gesehen. Eine solche Funktion bezeichnet man als eine Verkettungsfunktion.
Verkettungsfunktionen bestehen aus einer äußeren und einer inneren Funktion.

Das Beispiel $f(x) = (2x+1)^3$ ist wie folgt zu verstehen:

Wir haben eine Funktion $u(x) = x^3$ und eine weitere Funktion $v(x) = 2x+1$. Unschwer erkennen wir, dass $f(x) = (2x+1)^3$ wohl aus $u(x)$ und $v(x)$ zusammengesetzt wurde. u ist eine Potenzfunktion dritten Grades. Die Variable x dieser Potenzfunktion wurde durch die Funktion v, die eine lineare Funktion ist, ersetzt. Somit ist u mit v verkettet und wir schreiben die Funktion f als $f(u(v))$. Die Funktionsgleichung der Funktion f hat die Form $f(x) = u\big(v(x)\big)$.

Hinweis: Für die Kennzeichnung einer Verkettung gibt es eine zweite Notation, nämlich $f(x) = u(x) \circ v(x)$ (lies $u(x)$ verkettet mit $v(x)$), wobei $u(x)$ für die äußere Funktionsgleichung und $v(x)$ für die innere Funktionsgleichung steht.
In diesem Portal verwenden wir die Schreibweise $u\big(v(x)\big)$, da hier wesentlich einfacher die äußere und innere Funktionsgleichung kenntlich gemacht werden kann.

Weitere Beispiele:

$f(x) = sin(x^2)$ ist eine verkettete Funktion mit $u(x) = sin(x)$ und $v(x) = x^2$.

$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right)$ ist eine verkettete Funktion mit $u(x) = cos(x)$ und $v(x) = \frac{\pi}{4}(x-2)$.

$f(x) = e^{-2x+5}$ ist eine verkettete Funktion mit $u(x) = e^x$ und $v(x) = -2x+5$.

Aus den Beispielen heraus erkennen wir, dass die Variable x der äußeren Funktion durch die komplette Funktionsgleichung der inneren Funktion ersetzt wird.

Merksatz

*Bei einer Verkettung wird **jede** Variable x der äußeren Funktion durch die komplette Funktionsgleichung der inneren Funktion ersetzt.*
Wir schreiben:

$$f(x) = u(v(x))$$

Beispiel 1:

Gegeben sind die Funktionsgleichungen $s(x) = x^2$; $t(x) = x^3 + x^2$; $u(x) = 3x - 2$; $v(x) = sin(x) + 1$; $w(x) = e^x - 5x$.

Bilde die Funktionsgleichungen der Funktionen $f(s(t))$, $f(t(s))$, $f(u(v))$, $f(v(u))$, $f(w(v))$, $f(v(w))$ und $f(s(u(v))$.

Lösung 1:

$f(s(t))$: Wir ersetzen jedes x von $s(x)$ durch das komplette $t(x)$.
$f(x) = (x^3 + x^2)^2$

$f(t(s))$: Wir ersetzen jedes x von $t(x)$ durch das komplette $s(x)$.
$f(x) = (x^2)^3 + (x^2)^2$

$f(u(v))$: Wir ersetzen jedes x von $u(x)$ durch das komplette $v(x)$.
$f(x) = 3\,sin(x) - 2$

$f(v(u))$: Wir ersetzen jedes x von $v(x)$ durch das komplette $u(x)$.
$f(x) = sin(3x - 2) + 1$

$f(w(v))$: Wir ersetzen jedes x von $w(x)$ durch das komplette $v(x)$.
$f(x) = e^{sin(x)+1} - 5(sin(x) + 1)$

$f(v(w))$: Wir ersetzen jedes x von $v(x)$ durch das komplette $w(x)$.
$f(x) = sin(e^x - 5x) + 1$

$f(s(u(v))$): Wir ersetzen zunächst jedes x von $u(x)$ durch das komplette $v(x)$.
$f(u(v(x)) = 3\,sin(x) - 2$
Danach ersetzen wir jedes x von $s(x)$ durch das komplette $f(u(v(x))$.
$f\left(s(u(v(x))\right) = (3\,sin(x) - 2)^2$

Beispiel 2:

Gegeben sind die Funktionsgleichungen $u(x) = x^2$ und $v(x) = sin(x)$.

Bilde die Funktionsgleichungen der Funktionen $f(u(v))$ sowie $f(v(u))$.

Lösung 2:

$f(u(v))$: Wir ersetzen jedes x von $u(x)$ durch das komplette $v(x)$.
$f(x) = sin^2(x)$

$f(u(v))$: Wir ersetzen jedes x von $v(x)$ durch das komplette $u(x)$.
$f(x) = sin(x^2)$

Die Kettenregel

Zwei Funktionen u und v können verkettet werden. Mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = 2x + 1$ erhalten wir f mit $f(u(v(x))) = (2x + 1)^2$

Während Summen von Funktionen gliedweise abgeleitet werden, gilt das für verkettete Funktionen nicht. So hat unser Beispiel $f(x) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ die Ableitung $f'(x) = 8x + 4$.

Würden wir nun $f(u(v(x)))$ nur nach der Potenzregel ableiten, erhielten wir $f'\big(u(v(x))\big) = 2(2x + 1) = 4x + 2$ ein ganz anderes (***falsches***) Ergebnis.

Wollen wir die Ableitung von f bestimmen, so müssen wir den Differenzenquotienten von f untersuchen.

$$(*)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(2(x_0 + h) + 1)^2 - (2x_0 + 1)^2}{h}$$

Zunächst kennen wir die Differenzenquotienten der äußeren Funktion u mit $u(x) = x^2$ und der inneren Funktion v mit $v(x) = 2x + 1$.

Es ist: $\frac{u(v_0+k)-u(v_0)}{k} = \frac{(v_0+k)^2-v_0^2}{k}$ bzw. $\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h} = \frac{2(x_0+h)+1-(2x_0+1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$

Wenn wir diese beiden Differenzenquotienten bei der Untersuchung von $(*)$ verwenden wollen, müssen wir den Differenzenquotienten f in $(*)$ geschickt umformen, um ihn auf die Differenzenquotienten der äußeren und inneren Funktion zurückzuführen. In unserem Falle gelingt dies, wenn wir $(*)$ mit 2 erweitern und anschließend geeigenet umformen.

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{(2(x_0+h)+1)^2-(2x_0+1)^2}{h}\\ &= \frac{(2x_0+2h+1)^2-(2x_0+1)^2}{h}\cdot\frac{2}{2} = \frac{(2x_0+2h+1)^2-(2x_0+1)^2}{2h}\cdot 2\\ &= \frac{(v_0+k)^2-v_0^2}{k}\cdot 2 \quad \text{mit } v_0 = 2x_0 + 1 \text{ und } k = 2h\end{aligned}$$

Nun geht für $h \longrightarrow 0$ auch $k \longrightarrow 0$ und wir erhalten:

$$f'(x_0) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(2(x_0+h)+1)^2-(2x_0+1)^2}{h} = \lim_{k\longrightarrow 0}\frac{(v_0+k)^2-v_0^2}{k}\cdot 2 = 2v_0\cdot 2$$
$$= u'(v_0)\cdot v'(x_0)$$

Die Ableitung der Verkettung f ist also gleich der Ableitung der äußeren Funktion u an der Stelle v_0, multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion v an der Stelle x_0.

Dieser Zusammenhang gilt allgemein, auch wenn die innere Funktion keine lineare Funktion ist.

Merksatz Kettenregel

Die Kettenregel lautet:
Ist $f(u(v))$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v mit $f(x) = u(v(x))$, so ist auch f differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$$

Diese doch wohl sehr theoretischen Betrachtungen sollen dich aber nicht erschrecken. Es gibt eine sehr sehr einfache Lösungsmöglichkeit für Ableitungen mit der Kettenregel, wie du in nachfolgenden Beispielen erfährst.

Beispiel 3:
Leite ab und vereinfache das Ergebnis.

a) $f(x) = (5-3x)^4$ b) $f(x) = \frac{3}{2x^2-1}$ c) $f(x) = 3\,sin(3x^2)$

Lösung 3:
Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = (5-3x)^4$

In diesem Beispiel ist die äußere Funktion eine Potenzfunktion, erkenntlich an $)^4$. Also leitest du erst einmal ganz einfach nach der Potenzregel ab und schreibst $f'(x) = 4(5-3x)^3$.

Jetzt kommt wegen der Kettenregel die innere Funktion dran, das ist der Ausdruck in der Klammer mit $5-3x$. Dieser Ausdruck abgeleitet ergibt -3. Nun musst du die abgeleitete Potenzfunktion nur noch mit der Ableitung -3 der inneren Funktion multiplizieren und hast das endgültige Ergebnis:

$f'(x) = 4(5-3x)^3 \cdot (-3) = -12(5-3x)^3$

b) $f(x) = \frac{3}{2x^2-1} = 3 \cdot (2x^2-1)^{-1}$

In diesem Beispiel ist die 3 ein Faktor, der nach der Faktorregel erhalten bleibt.

Der Ausdruck $(2x^2-1)^{-1}$ ist die Verkettung einer Potenzfunktion als äußerer Funktion mit einer quadratischen Funktion als innerer Funktion. Gemäß Kettenregel gilt:

$f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot (2x^2-1)^{-2} \cdot 4x = -12x \cdot (2x^2-1)^{-2} = -\frac{12x}{(2x^2-1)^2}$

c) $f(x) = 3sin(3x^2)$

In diesem Beispiel ist die äußere und innere 3 ein Faktor, der nach der Faktorregel erhalten bleibt.

Der Ausdruck $sin(3x^2)$ ist die Verkettung einer Sinusfunktion als äußerer Funktion mit einer quadratischen Funktion als innerer Funktion. Gemäß Kettenregel gilt:

$f'(x) = 3 \cdot \cos(3x^2) \cdot 2 \cdot 3x = 18xcos(3x^2)$

Hinweis: Bei den trigonometrischen Funktionen sin, cos und tan ändert sich beim Ableiten das Argument der Funktion (das Argument ist der Ausdruck, der bei sin, cos und tan in der Klammer steht) NIE !!!
Bei Exponentialfunktionen (z. B. $f(x) = a^{3x-2}$) ändert sich beim Ableiten der Exponent NIE !!!

Aufgabe A1

Bilde die verkettete Funktionsgleichung $f(x) = u(v(x))$ sowie $g(x) = v(u(x))$ aus den gegebenen Funktionsgleichungen $u(x)$ und $v(x)$.

$u(x) = x^2$ $v(x) = 3x - 2$	$f(x) =$	$g(x) =$
$u(x) = x^3$ $v(x) = 3 - x^2$	$f(x) =$	$g(x) =$
$u(x) = x^2$ $v(x) = x - 1$	$f(x) =$	$g(x) =$
$u(x) = x^3$ $v(x) = 2x^3 - 2x$	$f(x) =$	$g(x) =$
$u(x) = x^3$ $v(x) = 5x^2 - 3$	$f(x) =$	$g(x) =$
$u(x) = x^2$ $v(x) = x^2 - 3x$	$f(x) =$	$g(x) =$
$u(x) = x^5$ $v(x) = x^2 - 2x$	$f(x) =$	$g(x) =$
$u(x) = x^8$ $v(x) = x^2 - x + 2$	$f(x) =$	$g(x) =$
$u(x) = x^5$ $v(x) = 3x^3 + 4$	$f(x) =$	$g(x) =$

Aufgabe A2

Gib zur gegebenen verketteten Funktionsgleichung $f(x) = u(v(x))$ die äußere und innere Funktionsgleichung $u(x)$ und $v(x)$ an.

$f(x) = (4x^2 - 3x)^3$	$u(x) =$	$v(x) =$
$f(x) = (x^2 - 2x)^k$	$u(x) =$	$v(x) =$
$f(x) = (5x^3 + x^2 - 4x)^3$	$u(x) =$	$v(x) =$
$f(x) = (5x^4 - 4x^3 - 2x + 5)^4$	$u(x) =$	$v(x) =$
$f(x) = -2(2x^3 + 3x^2 + x)^5$	$u(x) =$	$v(x) =$
$f(x) = (4 - x^7)^{-6}$	$u(x) =$	$v(x) =$
$f(x) = \pi cos(2(x - 3)) + 1$	$u(x) =$	$v(x) =$
$f(x) = \frac{1}{sin(0{,}5x - 1)}$	$u(x) =$	$v(x) =$
$f(x) = 0{,}5\sqrt[3]{(4x^2 - 3x)^2}$	$u(x) =$	$v(x) =$

Aufgabe A3

Bilde die verkettete Funktionsgleichung $f(x) = g(h(x))$ bzw. $k(x) = h(g(x))$.

a) $g(x) = x^2;\ h(x) = x + 3$

$f(x) =$ _____ $k(x) =$ _____

b) $g(x) = x + 1;\ h(x) = 7x^2$

$f(x) =$ _____ $k(x) =$ _____

c) $g(x) = \sqrt{x};\ h(x) = 4x + 3$

$f(x) =$ _____ $k(x) =$ _____

d) $g(x) = (2x + 1)^2;\ h(x) = 3x$

$f(x) =$ _____ $k(x) =$ _____

e) $g(x) = 4x^{-1};\ h(x) = 3x - 2$

$f(x) =$ _____ $k(x) =$ _____

f) $g(x) = sin(3x);\ h(x) = 2x^2$

$f(x) =$ _____ $k(x) =$ _____

g) $g(x) = e^{2x};\ h(x) = (1 - x)^2$

$f(x) =$ _____ $k(x) =$ _____

h) $g(x) = x \cdot \cos(x);\ h(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) =$ _____ $k(x) =$ _____

Lösung A1

$u(x) = x^2$ $v(x) = 3x - 2$	$f(x) = (3x-2)^2$	$g(x) = 3x^2 - 2$
$u(x) = x^3$ $v(x) = 3 - x^2$	$f(x) = (3-x^2)^3$	$g(x) = 3 - x^6$
$u(x) = x^2$ $v(x) = x - 1$	$f(x) = (x-1)^2$	$g(x) = x^2 - 1$
$u(x) = x^3$ $v(x) = 2x^3 - 2x$	$f(x) = (2x^3-2x)^3$	$g(x) = 2x^6 - 2x^3$
$u(x) = x^3$ $v(x) = 5x^2 - 3$	$f(x) = (5x^2-3)^3$	$g(x) = 5x^6 - 3$
$u(x) = x^2$ $v(x) = x^2 - 3x$	$f(x) = (x^2-3x)^2$	$g(x) = x^4 - 3x^2$
$u(x) = x^5$ $v(x) = x^2 - 2x$	$f(x) = (x^2-2x)^5$	$g(x) = x^{10} - 2x^5$
$u(x) = x^8$ $v(x) = x^2 - x + 2$	$f(x) = (x^2-x+2)^8$	$g(x) = x^{16} - x^8 + 2$
$u(x) = x^5$ $v(x) = 3x^3 + 4$	$f(x) = (3x^3+4)^5$	$g(x) = 3x^{15} + 4$

Lösung A2

$f(x) = (4x^2-3x)^3$	$u(x) = x^3$	$v(x) = 4x^2 - 3x$
$f(x) = (x^2-2x)^k$	$u(x) = x^k$	$v(x) = x^2 - 2x$
$f(x) = (5x^2+x^2-4x)^3$	$u(x) = x^3$	$v(x) = 5x^3 + x^2 - 4x$
$f(x) = (5x^4-4x^3-2x+5)^4$	$u(x) = x^4$	$v(x) = 5x^4 + 4x^3 - 2x + 5$
$f(x) = -2(2x^3+3x^2+x)^5$	$u(x) = -2x^5$	$v(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$
$f(x) = (4-x^7)^{-6}$	$u(x) = x^{-6}$	$v(x) = 4 - x^7$
$f(x) = \pi cos(2(x-3)) + 1$	$u(x) = \pi\, cos(x) + 1$	$v(x) = 2(x-3)$
$f(x) = \frac{1}{sin(0{,}5x-1)}$	$u(x) = sin^{-1}(x)$	$v(x) = 0{,}5x - 1$
$f(x) = 0{,}5\sqrt[3]{(4x^2-3x)^2}$	$u(x) = 0{,}5\sqrt[3]{x}$	$v(x) = (4x^2-3x)^2$

Lösung A3

a) $g(x) = x^2;\ \ h(x) = x + 3$

$f(x) = (x+3)^2$ $\qquad k(x) = x^2 + 3$

b) $g(x) = x + 1;\ \ h(x) = 7x^2$

$f(x) = 7x^2 + 1$ $\qquad k(x) = 7(x+1)^2$

c) $g(x) = \sqrt{x};\ \ h(x) = 4x + 3$

$f(x) = \sqrt{4x+3}$ $\qquad k(x) = 4\sqrt{x} + 3$

d) $g(x) = (2x+1)^2;\ \ h(x) = 3x$

$f(x) = (6x+1)^2$ $\qquad k(x) = 3 \cdot (2x+1)^2$

e) $g(x) = 4x^{-1};\ \ h(x) = 3x - 2$

$f(x) = 4(3x-2)^{-1}$ $\qquad k(x) = 12x^{-1} - 2$

f) $g(x) = sin(3x);\ \ h(x) = 2x^2$

$f(x) = sin(6x^2)$ $\qquad k(x) = 2 \cdot sin^2(3x)$

g) $g(x) = e^{2x};\ \ h(x) = (1-x)^2$

$f(x) = e^{2(1-x)^2} = e^{4(1-x)}$ $\qquad k(x) = (1 - e^{2x})^2$

h) $g(x) = x \cdot \cos(x);\ \ h(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x} cos\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad k(x) = \frac{1}{x \cdot cos(x)}$

Aufgabe A1

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen $f_n(x)$.

$f_1(x) = (3x-2)^2$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = (3-x^2)^3$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = (x-1)^2$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = (2x^3-2x)^3$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = (5x^2-3)^3$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = (x^2-3x)^2$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = (x^2-2x)^5$	$f_7'(x) =$
$f_8(x) = (x^2-x+2)^8$	$f_8'(x) =$
$f_9(x) = (3x^3+4)^5$	$f_9'(x) =$

Aufgabe A2

Ordne den gegebenen Ableitungsfunktionen $f_n'(x)$ ihre ursprüngliche Ausgangsfunktion $f_n(x)$ zu.

$f_1'(x) = \frac{8x-3}{3\cdot\sqrt[3]{4x^2-3x}}$	$f_{10}(x) = (4x^2-3x)^3$
$f_2'(x) = -\frac{0{,}5\cdot cos(0{,}5x-1)}{sin^2(0{,}5x-1)}$	$f_{11}(x) = (x^2-2x)^k$
$f_3'(x) = -2\pi\cdot\cos(2(x-3))$	$f_{12}(x) = (5x^3+x^2-4x)^3$
$f_4'(x) = 42x^6\cdot(4-x^7)^{-7}$	$f_{13}(x) = (5x^4-4x^3-2x+5)^4$
$f_5'(x) = -10\cdot(2x^3+3x^2+x)^4\cdot(6x^2+6x+1)$	$f_{14}(x) = -2(2x^3+3x^2+x)^5$
$f_6'(x) = 4\cdot(5x^4-4x^3-2x+5)^3\cdot(20x^3-12x^2-2)$	$f_{15}(x) = (4-x^7)^{-6}$
$f_7'(x) = 3\cdot(5x^3+x^2-4x)^2\cdot(15x^2-2x-4)$	$f_{16}(x) = \pi cos(2(x-3))+1$
$f_8'(x) = 2k\cdot(x^2-2x)^{k-1}\cdot(x-1)$	$f_{17}(x) = \frac{1}{sin(0{,}5x-1)}$
$f_9'(x) = 3\cdot(4x^2-3x)^2\cdot(8x-3)$	$f_{18}(x) = 0{,}5\sqrt[3]{(4x^2-3x)^2}$

Aufgabe A3

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen $f_n(x)$.

$f_1(x) = (4x^2 - 2x)^3$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = (x^3 - 2x)^m$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = (x^5 - x^4)^5$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = (3x^3 + 5x)^6$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = (2x + 1)^7$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = (2x^{-2} + 3x^2)^8$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = (27x - 35)^9$	$f_7'(x) =$
$f_8(x) = (2x^2 - 4x)^{-2}$	$f_8'(x) =$
$f_9(x) = (sin(x))^3$	$f_9'(x) =$
$f_{10}(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2$	$f_{10}'(x) =$
$f_{11}(x) = (7x + 5)^{-3}$	$f_{11}'(x) =$
$f_{12}(x) = (1{,}9x^2 + 0{,}9x)^4$	$f_{12}'(x) =$
$f_{13}(x) = \frac{1}{x-3}$	$f_{13}'(x) =$
$f_{14}(x) = \frac{3}{(x^2-1)^2}$	$f_{14}'(x) =$
$f_{15}(x) = \sqrt{x^3}$	$f_{15}'(x) =$
$f_{16}(x) = \sqrt[3]{3 - 2x}$	$f_{16}'(x) =$

Lösung A1

$f_1(x) = (3x-2)^2$	$f_1'(x) = 2\cdot(3x-2)\cdot 3 = 6\cdot(3x-2)$
$f_2(x) = (3-x^2)^3$	$f_2'(x) = 3\cdot(3-x^2)^2\cdot(-2x) = -6x\cdot(3-x^2)^2$
$f_3(x) = (x-1)^2$	$f_3'(x) = 2\cdot(x-1)$
$f_4(x) = (2x^3-2x)^3$	$f_4'(x) = 3\cdot(2x^3-2x)^2\cdot(6x^2-2) = 6\cdot(3x^2-1)(2x^3-2x)^2$
$f_5(x) = (5x^2-3)^3$	$f_5'(x) = 3\cdot(5x^2-3)^2\cdot 10x = 30x\cdot(5x^2-3)^2$
$f_6(x) = (x^2-3x)^2$	$f_6'(x) = 2\cdot(x^2-3x)\cdot(2x-3)$
$f_7(x) = (x^2-2x)^5$	$f_7'(x) = 5\cdot(x^2-x+2)^4\cdot(2x-2) = 10(x-1)(x^2-x+2)^4$
$f_8(x) = (x^2-x+2)^8$	$f_8'(x) = 8\cdot(x^2-x+2)^7\cdot(2x-1)$
$f_9(x) = (3x^3+4)^5$	$f_9'(x) = 5\cdot(3x^3+4)^4\cdot 9x^2 = 45x^2\cdot(3x^3+4)^4$

Lösung A2

$f_1'(x) = \frac{8x-3}{3\cdot\sqrt[3]{4x^2-3x}}$	$f_{18}(x) = 0{,}5\sqrt[3]{(4x^2-3x)^2}$
$f_2'(x) = -\frac{0{,}5\cdot cos(0{,}5x-1)}{sin^2(0{,}5x-1)}$	$f_{17}(x) = \frac{1}{sin(0{,}5x-1)}$
$f_3'(x) = -2\pi\cdot\cos(2(x-3))$	$f_{16}(x) = \pi cos(2(x-3))+1$
$f_4'(x) = 42x^6\cdot(4-x^7)^{-7}$	$f_{15}(x) = (4-x^7)^{-6}$
$f_5'(x) = -10\cdot(2x^3+3x^2+x)^4\cdot(6x^2+6x+1)$	$f_{14}(x) = -2(2x^3+3x^2+x)^5$
$f_6'(x) = 4\cdot(5x^4-4x^3-2x+5)^3\cdot(20x^3-12x^2-2)$	$f_{13}(x) = (5x^4-4x^3-2x+5)^4$
$f_7'(x) = 3\cdot(5x^3+x^2-4x)^2\cdot(15x^2-2x-4)$	$f_{12}(x) = (5x^3+x^2-4x)^3$
$f_8'(x) = 2k\cdot(x^2-2x)^{k-1}\cdot(x-1)$	$f_{11}(x) = (x^2-2x)^k$
$f_9'(x) = 3\cdot(4x^2-3x)^2\cdot(8x-3)$	$f_{10}(x) = (4x^2-3x)^3$

Lösung A3

$f_1(x) = (4x^2 - 2x)^3$	$f_1'(x) = 3 \cdot (4x^2 - 2x)^2 \cdot (8x - 2) = 6 \cdot (4x - 1)(4x^2 - 2x)^2$
$f_2(x) = (x^3 - 2x)^m$	$f_2'(x) = m \cdot (x^3 - 2x)^{m-1} \cdot (3x^2 - 2)$
$f_3(x) = (x^5 - x^4)^5$	$f_3'(x) = 5 \cdot (x^5 - x^4)^4 \cdot (5x^4 - 4x^3)$
$f_4(x) = (3x^3 + 5x)^6$	$f_4'(x) = 6 \cdot (3x^3 + 5x)^5 \cdot (9x^2 + 5)$
$f_5(x) = (2x + 1)^7$	$f_5'(x) = 7 \cdot (2x + 1)^6 \cdot 2 = 14 \cdot (2x + 1)^6$
$f_6(x) = (2x^{-2} + 3x^2)^8$	$f_6'(x) = 8 \cdot (2x^{-2} + 3x^2)^7 \cdot (-4x^{-3} + 6x)$
$f_7(x) = (27x - 35)^9$	$f_7'(x) = 9 \cdot (27x - 35)^8 \cdot 27 = 243 \cdot (27x - 35)^8$
$f_8(x) = (2x^2 - 4x)^{-2}$	$f_8'(x) = -2(2x^2 - 4x)^{-3} \cdot (4x - 4) = -8 \cdot (x - 1) \cdot (2x^2 - 4x)^{-3}$
$f_9(x) = (sin(x))^3$	$f_9'(x) = 3 \cdot (sin(x))^2 \cdot cos(x)$
$f_{10}(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2$	$f_{10}'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) \cdot (2x + 3x^2)$
$f_{11}(x) = (7x + 5)^{-3}$	$f_{11}'(x) = -3(7x + 5)^{-4} \cdot 7 = -21(7x + 5)^{-4}$
$f_{12}(x) = (1{,}9x^2 + 0{,}9x)^4$	$f_{12}'(x) = 4 \cdot (1{,}9x^2 + 0{,}9x)^3 \cdot (3{,}8x + 0{,}9)$
$f_{13}(x) = \frac{1}{x-3}$	$f_{13}'(x) = -(x - 3)^{-2} = -\frac{1}{(x-3)^2}$
$f_{14}(x) = \frac{3}{(x^2-1)^2}$	$f_{14}'(x) = 3 \cdot (-2) \cdot (x^2 - 1)^{-3} \cdot 2x = -\frac{12x}{(x^2-1)^3}$
$f_{15}(x) = \sqrt{x^3}$	$f_{15}'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
$f_{16}(x) = \sqrt[3]{3 - 2x}$	$f_{16}'(x) = \frac{1}{3} \cdot (3 - 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot -2 = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(3-2x)^2}}$

Aufgabe A1

Bilde die erste Ableitung $f'(x)$ der nachfolgend gegebenen, verketteten Funktionen und vereinfache soweit wie möglich.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)^2$

b) $f(x) = (6x-5)^{-4}$

c) $f(x) = (0{,}9x^3 + 1{,}7x^2)^3$

d) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

e) $f(x) = (x^2 - x)^{-2}$

f) $f(x) = \frac{4}{(x^3-2)^2}$

g) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

h) $f(x) = \sqrt{5-3x}$

Aufgabe A2

Berechne die Steigung des Graphen der Funktionen f an der gegebenen Stelle x_0.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x};\ x_0 = 2$

b) $f(x) = ln(2x^2);\ x_0 = 4$

c) $f(x) = sin(x^2);\ x_0 = \sqrt{\pi}$

d) $f(x) = sin^2(x);\ x_0 = 0$

e) $f(x) = -cos(sin(x));\ x_0 = -\pi$

f) $f(x) = 3(x - 2{,}5x^2)^2;\ x_0 = 3$

g) $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)^4};\ x_0 = 1$

h) $f(x) = (2{,}5x^3 + 0{,}75)^3;\ x_0 = -1$

Aufgabe A3

An welchen Stellen verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel?

a) $f(x) = (2x+4)^2;\quad g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 25x$

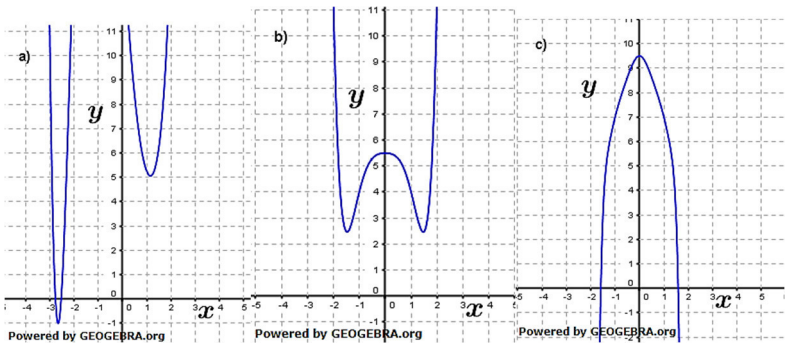
b) $f(x) = \frac{1}{x-1};\quad g(x) = \frac{x}{x-2}$

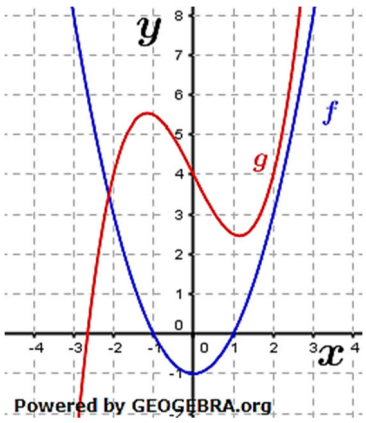
c) $f(x) = sin^2(x);\quad g(x) = cos(x);\ 0 \le x \le 2\pi;$

Aufgabe A4

Die Grafik zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = x^2 - 1$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 4$.

Gib an, welcher der nachfolgend abgebildeten Graphen der Graph der Funktion $f(g(x))$ ist.





Lösung A1

a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)^2$

$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2x^2\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^5\right)$

$= 2\left(\frac{4}{3}x^5 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{1}{8}x^3\right)$

b) $f(x) = (6x-5)^{-4}$

$f'(x) = -4 \cdot (6x-5)^{-5} \cdot (6) = -24(6x-5)^{-5}$

c) $f(x) = (0{,}9x^3 + 1{,}7x^2)^3$

$f'(x) = 3 \cdot (0{,}9x^3 + 1{,}7x^2)^2 \cdot (2{,}7x^2 + 3{,}4x) = 3 \cdot (2{,}43x^5 + 3{,}06x^4 + 4{,}59x^4 + 5{,}78x^3)$

$= 3 \cdot (2{,}43x^5 + 7{,}65x^4 + 5{,}78x^3)$

d) $f(x) = \frac{1}{x-4} = (x-4)^{-1}$

$f'(x) = -(x-4)^{-2} = -\frac{1}{(x-4)^2}$

e) $f(x) = (x^2 - x)^{-2}$

$f'(x) = -2(x^2-x)^{-3} \cdot (2x-1) = -\frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^3}$

f) $f(x) = \frac{4}{(x^3-2)^2} = 4 \cdot (x^3-2)^{-2}$

$f'(x) = -8(x^3-2)^{-3} \cdot (3x^2) = -\frac{24x^2}{(x^3-2)^3}$

g) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

h) $f(x) = \sqrt{5-3x} = (5-3x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(5-3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3) = -\frac{3}{2 \cdot \sqrt{5-3x}}$

Lösung A2

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad f'(2) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt[3]{4}$

b) $f(x) = ln(2x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{2x^2} \cdot 4x = \frac{2}{x}$ $\qquad f'(4) = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = sin(x^2)$

$f'(x) = 2x \cdot cos(x^2)$ $\qquad f'(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi} \cdot cos(\pi) = -2\sqrt{\pi}$

d) $f(x) = sin^2(x)$

$f'(x) = 2sin(x) \cdot cos(x)$ $\qquad f'(0) = 2sin(0) \cdot cos(0) = 0$

e) $f(x) = -cos(sin(x))$

$f'(x) = sin(sin(x)) \cdot cos(x)$ $\qquad f'(-\pi) = sin(sin(-\pi)) \cdot cos(-\pi) = 0$

f) $f(x) = 3(x - 2{,}5x^2)^2$

$f'(x) = 6(x - 2{,}5x^2) \cdot (1 - 5x)$ $\qquad f'(3) = 6(3 - 22{,}5) \cdot (1 - 15) = 1638$

g) $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)^4} = 2 \cdot (x^2+1)^{-4}$

$f'(x) = -8(x^2+1)^{-5} \cdot 2x$ $\qquad f'(1) = \frac{-16}{2^5} = -\frac{1}{2}$

h) $f(x) = (2{,}5x^3 + 0{,}75)^3$

$f'(x) = 3(2{,}5x^3 + 0{,}75)^2 \cdot (7{,}5x^2)$ $\qquad f'(-1) = 22{,}5 \cdot 3{,}0625 = 69{,}9065$

Lösung A3

a) $f(x) = (2x+4)^2$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 25x$

$f'(x) = 4(2x+4)$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 25$

$f'(x) \cap g'(x)$

$8x + 16 = \frac{3}{4}x^2 + 25 \quad | \quad -8x;\ -16$

$\frac{3}{4}x^2 - 8x + 9 = 0 \quad | \quad \cdot\frac{4}{3}$

$x^2 - \frac{24}{3}x + 12 = 0$

$x_{1,2} = \frac{12}{3} \pm \sqrt{\frac{144}{9} - \frac{108}{9}} = \frac{12}{3} \pm \frac{6}{3} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = 6;\quad x_2 = 2$

An den Stellen $x_1 = 6$ und $x_2 = 2$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{x}{x-2}$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $g'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$

$(x-2)^2 - (x-1)^2 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 = 0$

$-2x + 3 = 0$

$x_1 = 1{,}5$

An der Stelle $x_1 = 1{,}5$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = sin^2(x)$ $\qquad$ $g(x) = cos(x)$

$f'(x) = 2cos(x) \cdot sin(x)$ $\qquad$ $g'(x) = -sin(x)$

$f'(x) \cap g'(x)$

$2cos(x) \cdot sin(x) = -sin(x)$

$2cos(x) = -1$

$cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi;\quad x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{4}{3}\pi$

An den Stellen $x_1 = \frac{2}{3}\pi$ und $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

Abbildung a) zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(g(x))$, denn: $f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x + 4\right)^2 - 1$. Durch Ausnultiplizieren erhält man im letzten Glied $4^2 = 16$. Wegen $16 - 1 = 15$ muss der Graph die y-Achse bei $y_0 = 15$ schneiden, dies ist nur in Abbildung a) der Fall.

Aufgabe A1

Bilde die erste Ableitung $f'(x)$ der nachfolgend gegebenen, verketteten Funktionen und vereinfache soweit wie möglich.

a) $f(x) = sin(4x)$ b) $f(x) = cos(x^2)$

c) $f(x) = 3sin(2x)$ d) $f(x) = \frac{1}{3}(3x^4 - x^2)^3$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x)^{-3}$ f) $f(x) = cos(5x + 2)$

g) $f(x) = cos^2(x)$ h) $f(x) = 4sin(1 - 3x^2)$

Aufgabe A2

Berechne die Stellen x_0 des Graphen an der die Funktionen f die Steigung m haben.

a) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}};\ m = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $f(x) = sin(0{,}5x^2 + 1);\ m = 0; 0 \le x \le 2\pi$

c) $f(x) = sin(4x);\ x_0 = -4$ d) $f(x) = ln(x^2);\ m = 4$

e) $f(x) = -cos(sin(x));\ m = 0; 0 \le x \le 5$

f) $f(x) = 3(x - 2{,}5x^2)^2;\ m = 1638$ g) $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)^4};\ m = -\frac{1}{2}$

h) $f(x) = (2{,}5x^3 + 0{,}75)^3;\ m = 69{,}9065$

Aufgabe A3

An welchen Stellen verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel?

a) $f(x) = sin(5x + 1);\ \ g(x) = 5x;\ \ 0 \le x \le 2\pi$

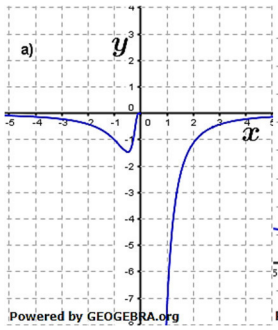
b) $f(x) = e^{3x^2-12};\ \ g(x) = 3x^2 + 5$

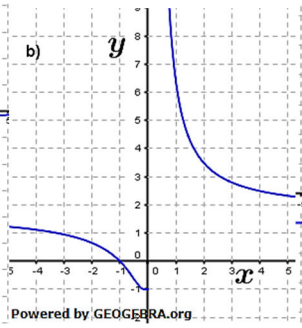
c) $f(x) = cos^2(x);\ \ g(x) = sin(x);\ \ 0 \le x \le 2\pi;$

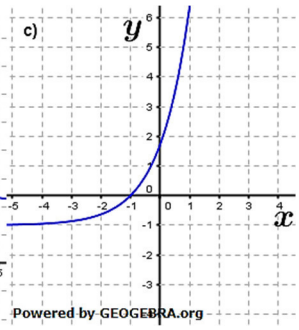
Aufgabe A4

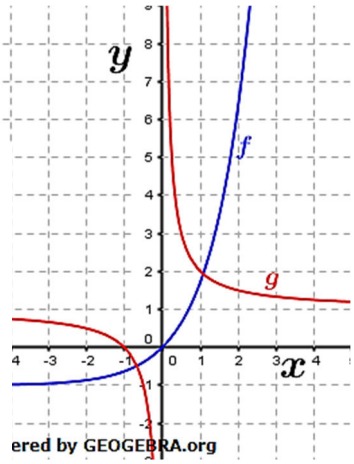
Die Grafik zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = e^x - 1$, und g mit $g(x) = \frac{1}{x} + 1$.

Gib an, welcher der nachfolgend abgebildeten Graphen der Graph der Funktion $f(g(x))$ ist, welcher die Ableitungsfunktion ist und welcher Graph zu keinem von beiden passt.









Lösung A1

a) $f(x) = sin(4x)$
$f'(x) = 4cos(4x)$

b) $f(x) = cos(x^2)$
$f'(x) = -2xsin(x^2)$

c) $f(x) = 3sin(2x)$
$f'(x) = 6cos(2x)$

d) $f(x) = \frac{1}{3}(3x^4 - x^2)^3$
$f'(x) = (3x^4 - x^2)^2 \cdot (12x^3 - 2x)$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x)^{-3}$
$f'(x) = 6 \cdot (2 - 4x)^{-4}$

f) $f(x) = cos(5x + 2)$
$f'(x) = -5sin(5x + 2)$

g) $f(x) = cos^2(x)$
$f'(x) = -2cos(x) \cdot sin(x)$

h) $f(x) = 4sin(1 - 3x^2)$
$f'(x) = -24xcos(1 - 3x^2)$

Lösung A2

a) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} = \left(x + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \implies \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x} + 1$

$\sqrt{2x \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x} + 1 \quad | \quad ^2$

$2x(\sqrt{x} + 1) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 \quad | \quad : (\sqrt{x} + 1)$

$2x = \sqrt{x} + 1 \quad | \quad -1$

$\sqrt{x} = 2x - 1 \quad | \quad ^2$

$x = 4x^2 - 4x + 1$

$4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad | \quad : 4$

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0$

$x_{1,2} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - \frac{16}{64}} = \frac{5}{8} \pm \frac{3}{8} \implies x_1 = 1;\ x_2 = \frac{1}{4}$

Probe $x_1 = 1$:
$\frac{\sqrt{1}+1}{2\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1}}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Probe $x_2 = \frac{1}{4}$:
$\frac{\sqrt{0{,}25}+1}{2\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{1+\sqrt{0{,}25}}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1{,}5}{1\cdot\sqrt{1{,}5}} = \sqrt{1{,}5} \neq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

f hat an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung $f'(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $f(x) = sin(0{,}5x^2 + 1)$
$f'(x) = x \cdot \cos(0{,}5x^2 + 1)$
$x \cdot \cos(0{,}5x^2 + 1) = 0 \quad |$ Satz vom Nullprodukt
$x_0 = 0$

$0{,}5x^2 + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$
$x^2 = \pi - 2$
$x_2 = \sqrt{\pi - 2}$

$0{,}5x^2 + 1 - \frac{3\pi}{2} = 0$
$x^2 = 3\pi - 2$
$x_3 = \sqrt{3\pi - 2}$

f hat an der Stelle $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\pi - 2}$ und $x_2 = \sqrt{3\pi - 2}$ die Steigung $m = 0$.

c) $f(x) = sin(4x)$
$f'(x) = 4 \cdot cos(4x)$
$4 \cdot cos(4x) = -4$
$cos(4x) = -1$
$\pi = 4x \implies x_0 = \frac{\pi}{4}$
f hat an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$ die Steigung $m = -4$.

d) $f(x) = ln(x^2)$
$f'(x) = \frac{2}{x}$
$\frac{2}{x} = 4 \implies x_0 = \frac{1}{2}$
f hat an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ die Steigung $m = 4$.

e) $f(x) = -cos(sin(x))$
$f'(x) = sin(sin(x)) \cdot cos(x)$
$sin(sin(x)) \cdot cos(x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$cos(x) = 0 \implies x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}\pi$
$sin(sin(x)) = 0 \implies x_3 = 0;\ x_4 = \pi$
f hat an den Stellen $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$, $x_3 = 0$ sowie $x_4 = \pi$ die Steigung $m = 0$.

f) $f(x) = 3(x - 2{,}5x^2)^2$
$f'^{(x)} = 6(x - 2{,}5x^2) \cdot (1 - 5x) = 6x - 30x^2 - 15x^2 + 75x^3$
$75x^3 - 45x^2 + 6x = 1638 \implies x_0 = 3$
f hat an der Stelle $x_0 = 3$ die Steigung $m = 1638$.

g) $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)^4} = 2 \cdot (x^2 + 1)^{-4}$
$f'(x) = -8(x^2 + 1)^{-5} \cdot 2x = -\frac{16x}{(x^2+1)^5}$
$-\frac{16x}{(x^2+1)^5} = -\frac{1}{2}$
$32x = (x^2 + 1)^5 \implies x_0 = 2$
f hat an der Stelle $x_0 = 2$ die Steigung $m = -\frac{1}{2}$.

h) $f(x) = (2{,}5x^3 + 0{,}75)^3$
$f'(x) = 3(2{,}5x^3 + 0{,}75)^2 \cdot (7{,}5x^2) = 17{,}5x^2 \cdot (2{,}5x^3 + 0{,}75)^2$
$17{,}5x^2 \cdot (2{,}5x^3 + 0{,}75)^2 = 69{,}9065 \implies x_0 = -1$
f hat an der Stelle $x_0 = -1$ die Steigung $m = 69{,}9065$.

Lösung A3

a) $f(x) = \sin(5x + 1)$ $\qquad g(x) = 5x$
$f'(x) = 5\cos(5x + 1)$ $\qquad g'(x) = 5$
$f'(x) \cap g'(x)$
$5\cos(5x + 1) = 5$
$\cos(5x + 1) = 1 \implies 5x + 1 = 0 \vee 5x + 1 = 2\pi$
$x_1 = -\frac{1}{5};\ x_2 = \frac{2\pi-1}{5}$
An den Stellen $x_1 = -\frac{1}{5}$ und $x_2 = \frac{2\pi-1}{5}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{x}{x-2}$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $g'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$

$(x-2)^2 - (x-1)^2 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 = 0$

$-2x + 3 = 0$

$x_1 = 1{,}5$

An der Stelle $x_1 = 1{,}5$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = sin^2(x)$ $\qquad$ $g(x) = cos(x)$

$f'(x) = 2cos(x) \cdot sin(x)$ $\qquad$ $g'(x) = -sin(x)$

$f'(x) \cap g'(x)$

$2cos(x) \cdot sin(x) = -sin(x)$

$2co\,s(x) = -1$

$cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi; \quad x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{4}{3}\pi$

An den Stellen $x_1 = \frac{2}{3}\pi$ und $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

Abbildung b) zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(g(x))$, denn:

$f(g(x)) = e^{\frac{1}{x}+1} - 1$. Für $x \longrightarrow 0$ gilt $e^{\frac{1}{x}+1} \longrightarrow \infty$ und für $x \longrightarrow \infty$ gilt $e^{\frac{1}{x}+1} \longrightarrow e$, dies ist nur in Abbildung b) der Fall.

Abbildung a) zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f', denn:

f hat für $0 < x < \infty$ negative Steigung, also muss f' in diesem Bereich unterhalb der x-Achse verlaufen.

Abbildung c) passt zu keinem der beiden Aussagen.

Aufgabe A1

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = (x-1)^2$, g mit $g(x) = x^2 - 3$ und h mit $h(x) = e^x$. Bilde die Verkettungen und berechne jeweils deren 1. und 2. Ableitung.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(h(x))$ d) $h(f(x))$
d) $g(h(x))$ e) $h(g(x))$

a) ist als Beispielaufgabe wie folgt vorgegeben:

$f(g(x)) = (x^2-4)^2$

$f'(g(x)) = 2x(x^2-4)$ $f''(g(x)) = 6x^2 - 8$

Tipp: In manchen Fällen benötigst du für die 2. Ableitung zusätzlich die Produktregel.

Aufgabe A2

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{x-1}$, g mit $g(x) = (x^2-3)^2$ und h mit $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Bilde die Verkettungen und berechne jeweils deren 1. und 2. Ableitung.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(h(x))$ d) $h(f(x))$
d) $g(h(x))$ e) $h(g(x))$

Aufgabe A3

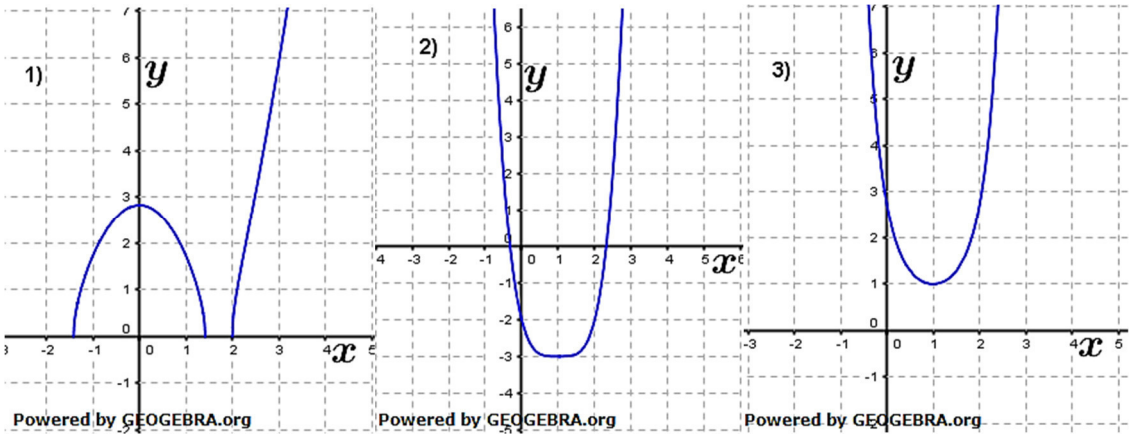
Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sin(\pi(x+2)^2)$, g mit $g(x) = 2(x-1)$ und h mit $h(x) = \frac{1}{x}$. Bilde die Verkettungen und berechne jeweils deren 1. und 2. Ableitung.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(h(x))$ d) $h(f(x))$
d) $g(h(x))$ e) $h(g(x))$

Aufgabe A4

Gegeben sind die verketteten Funktionen f, g und h. Ordne den verschiedenen Graphen jeweils ihre Funktionsgleichung zu und begründe deine Entscheidung.

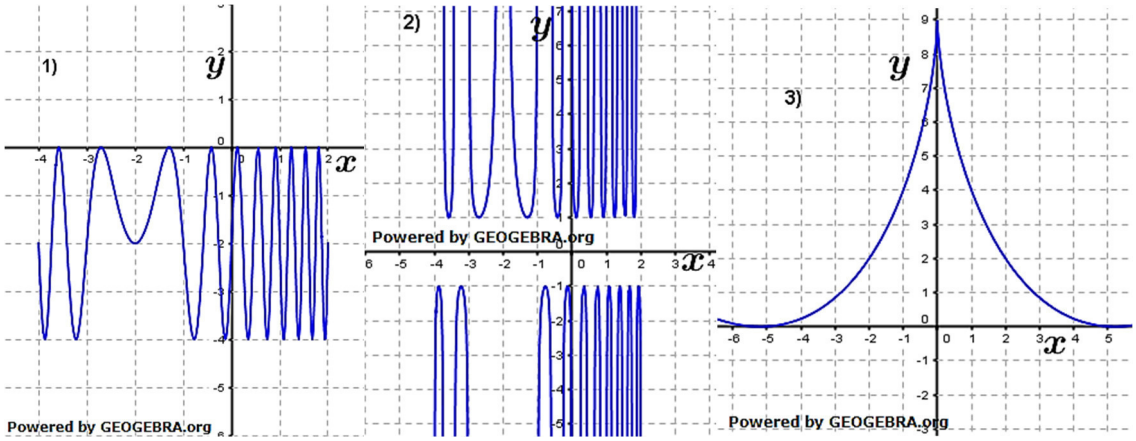
a) $f(x) = (x-1)^4 - 3$ b) $g(x) = e^{(x-1)^2}$ c) $h(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$



Aufgabe A5

Gegeben sind die verketteten Funktionen f, g und h. Ordne den verschiedenen Graphen jeweils ihre Funktionsgleichung zu und begründe deine Entscheidung.

a) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 3\right)^2$ b) $g(x) = 2sin(\pi(x+2)^2) - 2$ c) $h(x) = \frac{1}{sin(\pi(x+2)^2)}$



Lösung A1

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = x^2 - 3$ $h(x) = e^x$.

b) $g(f(x)) = (x-1)^4 - 3$

$g'(f(x)) = 4(x-1)^3$ $\qquad g''(f(x)) = 12(x-1)^2$

c) $f(h(x)) = (e^x - 1)^2$

$f'(h(x)) = 2e^x(e^x - 1)$ $\qquad f''(h(x)) = 2e^x(2e^x - 1)$

d) $h(f(x)) = e^{(x-1)^2} = e^{x^2-2x+1}$

$h'(f(x)) = (2x-2)e^{x^2-2x+1}$ $\qquad h''(f(x)) = (2x-2)^2 e^{x^2-2x+1}$

e) $g(h(x)) = e^{x^2} - 3 = e^{2x} - 3$

$g'(h(x)) = 2e^{2x}$ $\qquad g''(h(x)) = 4e^{2x}$

f) $h(g(x)) = e^{x^2-3} = \frac{e^{2x}}{e^3}$

$h'(g(x)) = \frac{2e^{2x}}{e^3}$ $\qquad h''(g(x)) = \frac{4e^{2x}}{e^3}$

Lösung A2

$f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = (x^2-3)^2$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

a) $f(g(x)) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$

$f'(g(x)) = \frac{2x^3-6x}{\sqrt{x^4-6x^2+8}}$ $\qquad f''(g(x)) = \frac{2(x^6-9x^4+24x^2-24}{(x^4-6x^2+8)\cdot\sqrt{x^4-6x^2+8}}$

b) $g(f(x)) = (x-4)^2$

$f'(g(x)) = 2(x-4)$ $\qquad f''(g(x)) = 2$

c) $f(h(x)) = \sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}$

$f'(h(x)) = \frac{1}{6\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}$ $\qquad f''(g(x)) = -\frac{5\sqrt[3]{x}+4}{36x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot(\sqrt[3]{x}-1)\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}$

d) $h(f(x)) = \sqrt[6]{x-1}$

$h'(f(x)) = \frac{1}{6\cdot\sqrt[6]{(x-1)^5}}$ $\qquad h''(f(x)) = -\frac{5}{36\cdot(x-1)\cdot\sqrt[6]{(x-1)^5}}$

e) $g(h(x)) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 3\right)^2$

$g'(f(x)) = \frac{4\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-3\right)}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$ $\qquad g''(f(x)) = \frac{4\cdot(\sqrt[3]{x^2}+3)}{9x\cdot\sqrt[3]{x}}$

f) $h(g(x)) = \sqrt[3]{(x^2-3)^2}$

$h'(f(x)) = \frac{4\cdot x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-3}}$ $\qquad h''(f(x)) = \frac{4\cdot(x^2-9)}{9(x^2-3)\cdot\sqrt[3]{x^2-3}}$

Lösung A3

$f(x) = sin(\pi(x+2)^2)$, $g(x) = 2(x-1)$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

a) $f(g(x)) = sin(\pi(2(x-1)+2)^2) = sin(\pi(2x)^2) = sin(4\pi x^2)$

$f'(g(x)) = 8\pi x \cdot \cos(4\pi x^2)$ $\qquad f''(g(x)) = -64\pi^2 x^2 sin(4\pi x^2)$

b) $g(f(x)) = 2(sin(\pi(x+2)^2) - 1) = 2sin(\pi(x+2)^2) - 2 = 2sin(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

$g'(f(x)) = 2(2\pi x + 4\pi) \cdot cos(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

$= 4\pi(x+2) \cdot cos(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

$f''(g(x)) = -4\pi(x+2) \cdot (2\pi x + 4\pi) \cdot sin(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

$= -8\pi^2(x+2)^2 \cdot sin(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

Level 3 – Expert – Blatt 1

c) $f(h(x)) = sin\left(\pi\left(\frac{1}{x}+2\right)^2\right) = sin\left(\pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4\right)\right)$

$f'(h(x)) = -2\pi(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}) \cdot cos\left(\pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4\right)\right)$

$f''(h(x)) = 2\pi(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}) \cdot 2\pi(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}) \cdot sin\left(\pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4\right)\right)$

$= 4\pi^2(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2})^2 \cdot sin\left(\pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4\right)\right)$

d) $h(f(x)) = \frac{1}{sin(\pi(x+2)^2)} = (sin(\pi(x+2)^2))^{-1} = (sin(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi))^{-1}$

$h'(f(x)) = -\frac{2\pi(x+2)}{(cos(\pi x^2+4\pi x+4\pi))^2} = -2\pi(x+2) \cdot (cos(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi))^{-2}$

$h''(f(x)) = \frac{2 \cdot 2\pi(x+2) \cdot 2\pi(x+2)}{(cos(\pi x^2+4\pi x+4\pi))^3} = \frac{8\pi^2(x+2)^2}{(cos(\pi x^2+4\pi x+4\pi))^3}$

Lösung A4

a) $f(x) = (x-1)^4 - 3$ gehört zur Grafik 2).
Es handelt sich um eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die in x-Richtung um eine Einheit nach rechts geschoben wurde und die y-Achse bei $y_0 = -2$ schneidet.

b) $g(x) = e^{(x-1)^2}$ gehört zur Grafik 3).
Es handelt sich um eine Exponentialfunktion mit $g(0) = e^2$ und $g(1) = 1$.

c) $h(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$ gehört zur Grafik 1).
Es handelt sich um eine Wurzelfunktion mit verschiedenen Definitionslücken, berechenbar über $x^4 - 6x^2 + 8 < 0$.

Lösung A5

a) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 3\right)^2$ gehört zur Grafik 3).
Die beiden anderen Funktionen sind periodische Funktionen, der Schnittpunkt mit der y-Achse bei $f(0) = 9$.

b) $g(x) = 2sin(\pi(x+2)^2) - 2$ gehört zur Grafik 1).
Es handelt sich um eine periodische Funktion mit einer Amplitude von $a = 2$, die um 2 Einheiten nach unten verschoben ist und deshalb die x-Achse in ihren Hochpunkten von unten berührt.

c) $h(x) = \frac{1}{sin(\pi(x+2)^2)}$ gehört zur Grafik 2).
Es handelt sich um eine periodische gebrochene Funktion, die für jedes $\pi(x+2)^2 = n \cdot \pi;\ n\ \ \mathbb{Z}$ Definitionslücken aufweist.

e) $g(h(x)) = 2\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

$g'(h(x)) = -\frac{2}{x^2}$ $\qquad$ $g''(h(x)) = \frac{4}{x^3}$

f) $h(g(x)) = \frac{1}{2(x-1)}$

$h'(g(x)) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$ $\qquad$ $h''(g(x)) = \frac{1}{(x-1)^3}$