

Aufgabenblatt Ableitungen

Differenzialrechnung

zur Kettenregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die erste Ableitung $f'(x)$ der nachfolgend gegebenen, verketteten Funktionen und vereinfache soweit wie möglich.



- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)^2$ | b) $f(x) = (6x - 5)^{-4}$ |
| c) $f(x) = (0,9x^3 + 1,7x^2)^3$ | d) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ |
| e) $f(x) = (x^2 - x)^{-2}$ | f) $f(x) = \frac{4}{(x^3-2)^2}$ |
| g) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ | h) $f(x) = \sqrt{5 - 3x}$ |

Aufgabe A2

Berechne die Steigung des Graphen der Funktionen f an der gegebenen Stelle x_0 .

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = \sqrt[3]{x}; x_0 = 2$ | b) $f(x) = \ln(2x^2); x_0 = 4$ |
| c) $f(x) = \sin(x^2); x_0 = \sqrt{\pi}$ | d) $f(x) = \sin^2(x); x_0 = 0$ |
| e) $f(x) = -\cos(\sin(x)); x_0 = -\pi$ | f) $f(x) = 3(x - 2,5x^2)^2; x_0 = 3$ |
| g) $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)^4}; x_0 = 1$ | h) $f(x) = (2,5x^3 + 0,75)^3; x_0 = -1$ |

Aufgabe A3

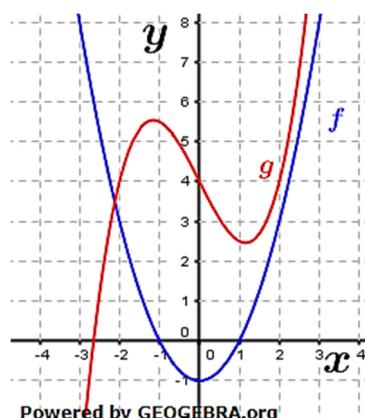
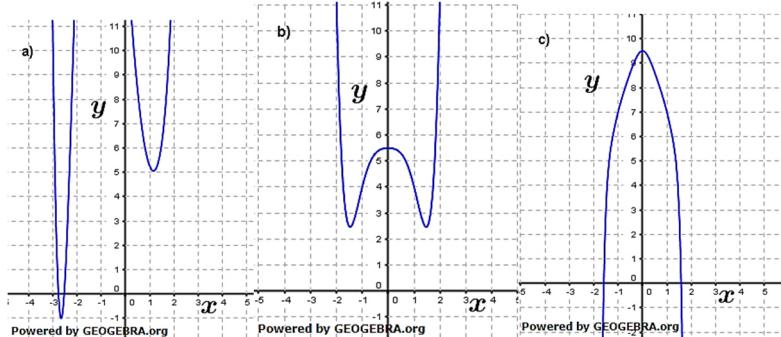
An welchen Stellen verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel?

- | |
|--|
| a) $f(x) = (2x + 4)^2; g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 25x$ |
| b) $f(x) = \frac{1}{x-1}; g(x) = \frac{x}{x-2}$ |
| c) $f(x) = \sin^2(x); g(x) = \cos(x); 0 \leq x \leq 2\pi;$ |

Aufgabe A4

Die Grafik zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = x^2 - 1$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 4$.

Gib an, welcher der nachfolgend abgebildeten Graphen der Graph der Funktion $f(g(x))$ ist.



Aufgabenblatt Ableitungen**zur Kettenregel****Lösungen****Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1****Lösung A1**

a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2x^2\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^5\right) \\ &= 2 \left(\frac{4}{3}x^5 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{1}{8}x^3\right) \end{aligned}$$

b) $f(x) = (6x - 5)^{-4}$

$$f'(x) = -4 \cdot (6x - 5)^{-5} \cdot (6) = -24(6x - 5)^{-5}$$

c) $f(x) = (0,9x^3 + 1,7x^2)^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (0,9x^3 + 1,7x^2)^2 \cdot (2,7x^2 + 3,4x) = 3 \cdot (2,43x^5 + 3,06x^4 + 4,59x^4 + 5,78x^3) \\ &= 3 \cdot (2,43x^5 + 7,65x^4 + 5,78x^3) \end{aligned}$$

d) $f(x) = \frac{1}{x-4} = (x-4)^{-1}$

$$f'(x) = -(x-4)^{-2} = -\frac{1}{(x-4)^2}$$

e) $f(x) = (x^2 - x)^{-2}$

$$f'(x) = -2(x^2 - x)^{-3} \cdot (2x - 1) = -\frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^3}$$

f) $f(x) = \frac{4}{(x^3-2)^2} = 4 \cdot (x^3 - 2)^{-2}$

$$f'(x) = -8(x^3 - 2)^{-3} \cdot (3x^2) = -\frac{24x^2}{(x^3-2)^3}$$

g) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$$

h) $f(x) = \sqrt{5 - 3x} = (5 - 3x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5 - 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3) = -\frac{3}{2 \cdot \sqrt{5-3x}}$$

Lösung A2

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}} \quad f'(2) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt[3]{4}$$

b) $f(x) = \ln(2x^2)$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2} \cdot 4x = \frac{2}{x} \quad f'(4) = \frac{1}{2}$$

c) $f(x) = \sin(x^2)$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2) \quad f'(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi} \cdot \cos(\pi) = -2\sqrt{\pi}$$

d) $f(x) = \sin^2(x)$

$$f'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x) \quad f'(0) = 2\sin(0) \cdot \cos(0) = 0$$

e) $f(x) = -\cos(\sin(x))$

$$f'(x) = \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x) \quad f'(-\pi) = \sin(\sin(-\pi)) \cdot \cos(-\pi) = 0$$

f) $f(x) = 3(x - 2,5x^2)^2$

$$f'(x) = 6(x - 2,5x^2) \cdot (1 - 5x) \quad f'(3) = 6(3 - 22,5) \cdot (1 - 15) = 1638$$

g) $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)^4} = 2 \cdot (x^2 + 1)^{-4}$

$$f'(x) = -8(x^2 + 1)^{-5} \cdot 2x \quad f'(1) = \frac{-16}{2^5} = -\frac{1}{2}$$

h) $f(x) = (2,5x^3 + 0,75)^3$

$$f'(x) = 3(2,5x^3 + 0,75)^2 \cdot (7,5x^2) \quad f'(-1) = 22,5 \cdot 3,0625 = 68,9065$$

Differenzialrechnung

Aufgabenblatt Ableitungen zur Kettenregel

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Lösung A3

a) $f(x) = (2x + 4)^2$ $f'(x) = 4(2x + 4)$ $f'(x) \cap g'(x)$ $8x + 16 = \frac{3}{4}x^2 + 25$ $\frac{3}{4}x^2 - 8x + 9 = 0$ $x^2 - \frac{32}{3}x + 12 = 0$ $x_{1,2} = \frac{16}{3} \pm \sqrt{\frac{256}{9} - \frac{108}{9}} = \frac{16}{3} \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{37}$ $x_1 = 9,39; x_2 = -31,16$	$g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 25x$ $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 25$ $ -8x; -16$ $ \cdot \frac{4}{3}$ $p/q\text{-Formel}$
---	--

An den Stellen $x_1 = 9,39$ und $x_2 = -31,16$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ $f'(x) \cap g'(x)$ $-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$ $(x-2)^2 - (x-1)^2 = 0$ $x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 = 0$ $-2x + 3 = 0$ $x_1 = 1,5$	$g(x) = \frac{x}{x-2}$ $g'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$
--	--

An der Stelle $x_1 = 1,5$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = \sin^2(x)$ $f'(x) = 2\cos(x) \cdot \sin(x)$ $f'(x) \cap g'(x)$ $2\cos(x) \cdot \sin(x) = -\sin(x)$ $2\cos(x) = -1$ $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ $x_1 = \frac{2}{3}\pi; x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{4}{3}\pi$	$g(x) = \cos(x)$ $g'(x) = -\sin(x)$
--	--

An den Stellen $x_1 = \frac{2}{3}\pi$ und $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

Abbildung a) zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(g(x))$, denn:

$f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x + 4\right)^2 - 1$. Durch Ausmultiplizieren erhält man im letzten Glied $4^2 = 16$. Wegen $16 - 1 = 15$ muss der Graph die y -Achse bei $y_0 = 15$ schneiden, dies ist nur in Abbildung a) der Fall.