Lösung A1

a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)^2$

$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2x^2\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^5\right)$

$= 2\left(\frac{4}{3}x^5 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{1}{8}x^3\right)$

b) $f(x) = (6x-5)^{-4}$

$f'(x) = -4 \cdot (6x-5)^{-5} \cdot (6) = -24(6x-5)^{-5}$

c) $f(x) = (0{,}9x^3 + 1{,}7x^2)^3$

$f'(x) = 3 \cdot (0{,}9x^3 + 1{,}7x^2)^2 \cdot (2{,}7x^2 + 3{,}4x) = 3 \cdot (2{,}43x^5 + 3{,}06x^4 + 4{,}59x^4 + 5{,}78x^3)$

$= 3 \cdot (2{,}43x^5 + 7{,}65x^4 + 5{,}78x^3)$

d) $f(x) = \frac{1}{x-4} = (x-4)^{-1}$

$f'(x) = -(x-4)^{-2} = -\frac{1}{(x-4)^2}$

e) $f(x) = (x^2 - x)^{-2}$

$f'(x) = -2(x^2-x)^{-3} \cdot (2x-1) = -\frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^3}$

f) $f(x) = \frac{4}{(x^3-2)^2} = 4 \cdot (x^3-2)^{-2}$

$f'(x) = -8(x^3-2)^{-3} \cdot (3x^2) = -\frac{24x^2}{(x^3-2)^3}$

g) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

h) $f(x) = \sqrt{5-3x} = (5-3x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(5-3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3) = -\frac{3}{2 \cdot \sqrt{5-3x}}$

Lösung A2

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad f'(2) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt[3]{4}$

b) $f(x) = ln(2x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{2x^2} \cdot 4x = \frac{2}{x}$ $\qquad f'(4) = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = sin(x^2)$

$f'(x) = 2x \cdot cos(x^2)$ $\qquad f'(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi} \cdot cos(\pi) = -2\sqrt{\pi}$

d) $f(x) = sin^2(x)$

$f'(x) = 2sin\,(x) \cdot cos(x)$ $\qquad f'(0) = 2sin\,(0) \cdot cos(0) = 0$

e) $f(x) = -\,cos(sin(x))$

$f'(x) = sin\,(sin\,(x)) \cdot cos(x)$ $\qquad f'(-\pi) = sin\,(sin(-\pi)) \cdot cos(-\pi) = 0$

f) $f(x) = 3(x - 2{,}5x^2)^2$

$f'(x) = 6(x - 2{,}5x^2) \cdot (1 - 5x)$ $\qquad f'(3) = 6(3 - 22{,}5) \cdot (1 - 15) = 1638$

g) $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)^4} = 2 \cdot (x^2+1)^{-4}$

$f'(x) = -8(x^2+1)^{-5} \cdot 2x$ $\qquad f'(1) = \frac{-16}{2^5} = -\frac{1}{2}$

h) $f(x) = (2{,}5x^3 + 0{,}75)^3$

$f'(x) = 3(2{,}5x^3 + 0{,}75)^2 \cdot (7{,}5x^2)$ $\qquad f'(-1) = 22{,}5 \cdot 3{,}0625 = 68{,}9065$

Lösung A3

a) $f(x) = (2x+4)^2$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 25x$

$f'(x) = 4(2x+4)$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 25$

$f'(x) \cap g'(x)$

$8x + 16 = \frac{3}{4}x^2 + 25 \quad | \quad -8x;\ -16$

$\frac{3}{4}x^2 - 8x + 9 = 0 \quad | \quad \cdot\frac{4}{3}$

$x^2 - \frac{32}{3}x + 12 = 0$

$x_{1,2} = \frac{16}{3} \pm \sqrt{\frac{256}{9} - \frac{108}{9}} = \frac{16}{3} \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{37} \quad |$ p/q-Formel

$x_1 = 9{,}39;\quad x_2 = -31{,}16$

An den Stellen $x_1 = 9{,}39$ und $x_2 = -31{,}16$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{x}{x-2}$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $g'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$

$(x-2)^2 - (x-1)^2 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 = 0$

$-2x + 3 = 0$

$x_1 = 1{,}5$

An der Stelle $x_1 = 1{,}5$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = sin^2(x)$ $\qquad$ $g(x) = cos(x)$

$f'(x) = 2cos\,(x) \cdot sin\,(x)$ $\qquad$ $g'(x) = -sin\,(x)$

$f'(x) \cap g'(x)$

$2cos\,(x) \cdot sin\,(x) = -sin\,(x)$

$2cos(x) = -1$

$cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi;\quad x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{4}{3}\pi$

An den Stellen $x_1 = \frac{2}{3}\pi$ und $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

Abbildung a) zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(g(x))$, denn: $f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x + 4\right)^2 - 1$. Durch Ausnultiplizieren erhält man im letzten Glied $4^2 = 16$. Wegen $16 - 1 = 15$ muss der Graph die y-Achse bei $y_0 = 15$ schneiden, dies ist nur in Abbildung a) der Fall.