Lösung A1

a) $f(x) = sin(4x)$
$f'(x) = 4cos(4x)$

b) $f(x) = cos(x^2)$
$f'(x) = -2xsin(x^2)$

c) $f(x) = 3sin(2x)$
$f'(x) = 6cos(2x)$

d) $f(x) = \frac{1}{3}(3x^4 - x^2)^3$
$f'(x) = (3x^4 - x^2)^2 \cdot (12x^3 - 2x)$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x)^{-3}$
$f'(x) = 6 \cdot (2 - 4x)^{-4}$

f) $f(x) = cos(5x + 2)$
$f'(x) = -5sin(5x + 2)$

g) $f(x) = cos^2(x)$
$f'(x) = -2cos(x) \cdot sin(x)$

h) $f(x) = 4sin(1 - 3x^2)$
$f'(x) = -24xcos(1 - 3x^2)$

Lösung A2

a) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} = \left(x + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \implies \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x} + 1$

$\sqrt{2x \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x} + 1 \quad | \quad ^2$

$2x(\sqrt{x} + 1) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 \quad | \quad : (\sqrt{x} + 1)$

$2x = \sqrt{x} + 1 \quad | \quad -1$

$\sqrt{x} = 2x - 1 \quad | \quad ^2$

$x = 4x^2 - 4x + 1$

$4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad | \quad : 4$

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0$

$x_{1,2} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - \frac{16}{64}} = \frac{5}{8} \pm \frac{3}{8} \implies x_1 = 1;\ x_2 = \frac{1}{4}$

Probe $x_1 = 1$:
$\frac{\sqrt{1}+1}{2\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1}}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Probe $x_2 = \frac{1}{4}$:
$\frac{\sqrt{0{,}25}+1}{2\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{1+\sqrt{0{,}25}}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1{,}5}{1\cdot\sqrt{1{,}5}} = \sqrt{1{,}5} \neq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

f hat an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung $f'(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $f(x) = sin(0{,}5x^2 + 1)$
$f'(x) = x \cdot \cos(0{,}5x^2 + 1)$
$x \cdot \cos(0{,}5x^2 + 1) = 0 \quad |$ Satz vom Nullprodukt
$x_0 = 0$

$0{,}5x^2 + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$
$x^2 = \pi - 2$
$x_2 = \sqrt{\pi - 2}$

$0{,}5x^2 + 1 - \frac{3\pi}{2} = 0$
$x^2 = 3\pi - 2$
$x_3 = \sqrt{3\pi - 2}$

f hat an der Stelle $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\pi - 2}$ und $x_2 = \sqrt{3\pi - 2}$ die Steigung $m = 0$.

c) $f(x) = sin(4x)$
$f'(x) = 4 \cdot cos(4x)$
$4 \cdot cos(4x) = -4$
$cos(4x) = -1$
$\pi = 4x \implies x_0 = \frac{\pi}{4}$
f hat an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$ die Steigung $m = -4$.

d) $f(x) = ln(x^2)$
$f'(x) = \frac{2}{x}$
$\frac{2}{x} = 4 \implies x_0 = \frac{1}{2}$
f hat an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ die Steigung $m = 4$.

e) $f(x) = -cos(sin(x))$
$f'(x) = sin(sin(x)) \cdot cos(x)$
$sin(sin(x)) \cdot cos(x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$cos(x) = 0 \implies x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}\pi$
$sin(sin(x)) = 0 \implies x_3 = 0;\ x_4 = \pi$
f hat an den Stellen $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$, $x_3 = 0$ sowie $x_4 = \pi$ die Steigung $m = 0$.

f) $f(x) = 3(x - 2{,}5x^2)^2$
$f'^{(x)} = 6(x - 2{,}5x^2) \cdot (1 - 5x) = 6x - 30x^2 - 15x^2 + 75x^3$
$75x^3 - 45x^2 + 6x = 1638 \implies x_0 = 3$
f hat an der Stelle $x_0 = 3$ die Steigung $m = 1638$.

g) $f(x) = \frac{2}{(x^2+1)^4} = 2 \cdot (x^2 + 1)^{-4}$
$f'(x) = -8(x^2 + 1)^{-5} \cdot 2x = -\frac{16x}{(x^2+1)^5}$
$-\frac{16x}{(x^2+1)^5} = -\frac{1}{2}$
$32x = (x^2 + 1)^5 \implies x_0 = 2$
f hat an der Stelle $x_0 = 2$ die Steigung $m = -\frac{1}{2}$.

h) $f(x) = (2{,}5x^3 + 0{,}75)^3$
$f'(x) = 3(2{,}5x^3 + 0{,}75)^2 \cdot (7{,}5x^2) = 17{,}5x^2 \cdot (2{,}5x^3 + 0{,}75)^2$
$17{,}5x^2 \cdot (2{,}5x^3 + 0{,}75)^2 = 69{,}9065 \implies x_0 = -1$
f hat an der Stelle $x_0 = -1$ die Steigung $m = 69{,}9065$.

Lösung A3

a) $f(x) = \sin(5x + 1)$ $\qquad g(x) = 5x$
$f'(x) = 5\cos(5x + 1)$ $\qquad g'(x) = 5$
$f'(x) \cap g'(x)$
$5\cos(5x + 1) = 5$
$\cos(5x + 1) = 1 \implies 5x + 1 = 0 \vee 5x + 1 = 2\pi$
$x_1 = -\frac{1}{5};\ x_2 = \frac{2\pi-1}{5}$
An den Stellen $x_1 = -\frac{1}{5}$ und $x_2 = \frac{2\pi-1}{5}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{x}{x-2}$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $g'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$

$(x-2)^2 - (x-1)^2 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 = 0$

$-2x + 3 = 0$

$x_1 = 1{,}5$

An der Stelle $x_1 = 1{,}5$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = sin^2(x)$ $\qquad$ $g(x) = cos(x)$

$f'(x) = 2cos(x) \cdot sin(x)$ $\qquad$ $g'(x) = -sin(x)$

$f'(x) \cap g'(x)$

$2cos(x) \cdot sin(x) = -sin(x)$

$2co\,s(x) = -1$

$cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi; \quad x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{4}{3}\pi$

An den Stellen $x_1 = \frac{2}{3}\pi$ und $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

Abbildung b) zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(g(x))$, denn:

$f(g(x)) = e^{\frac{1}{x}+1} - 1$. Für $x \longrightarrow 0$ gilt $e^{\frac{1}{x}+1} \longrightarrow \infty$ und für $x \longrightarrow \infty$ gilt $e^{\frac{1}{x}+1} \longrightarrow e$, dies ist nur in Abbildung b) der Fall.

Abbildung a) zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f', denn:

f hat für $0 < x < \infty$ negative Steigung, also muss f' in diesem Bereich unterhalb der x-Achse verlaufen.

Abbildung c) passt zu keinem der beiden Aussagen.