Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Bisher haben wir die einfachsten Ableitungsregeln kennengelernt. Jetzt gibt es aber auch Funktionen, die aus unterschiedlichen Funktionstypen miteinander verkettet sind. Bevor wir auf die Kettenregel eingehen, befassen wir uns deshalb zunächst einmal mit dem Begriff *Verkettung*.

Verkettung

Zum einen kennen wir bereits die unterschiedlichen Funktionsarten wie:

- Lineare Funktionen
- Potenzfunktionen
- Ganzrationale Funktionen / gebrochen rationale Funktionen
- Trigonometrische Funktionen
- Exponentialfunktionen

Zum anderen haben wir bestimmt schon einmal eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = (2x+1)^3$ gesehen. Eine solche Funktion bezeichnet man als eine Verkettungsfunktion.
Verkettungsfunktionen bestehen aus einer äußeren und einer inneren Funktion.

Das Beispiel $f(x) = (2x+1)^3$ ist wie folgt zu verstehen:

Wir haben eine Funktion $u(x) = x^3$ und eine weitere Funktion $v(x) = 2x+1$. Unschwer erkennen wir, dass $f(x) = (2x+1)^3$ wohl aus $u(x)$ und $v(x)$ zusammengesetzt wurde. u ist eine Potenzfunktion dritten Grades. Die Variable x dieser Potenzfunktion wurde durch die Funktion v, die eine lineare Funktion ist, ersetzt. Somit ist u mit v verkettet und wir schreiben die Funktion f als $f(u(v))$. Die Funktionsgleichung der Funktion f hat die Form $f(x) = u\big(v(x)\big)$.

Hinweis: Für die Kennzeichnung einer Verkettung gibt es eine zweite Notation, nämlich $f(x) = u(x) \circ v(x)$ (lies $u(x)$ verkettet mit $v(x)$), wobei $u(x)$ für die äußere Funktionsgleichung und $v(x)$ für die innere Funktionsgleichung steht.
In diesem Portal verwenden wir die Schreibweise $u\big(v(x)\big)$, da hier wesentlich einfacher die äußere und innere Funktionsgleichung kenntlich gemacht werden kann.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Weitere Beispiele:

$f(x) = sin(x^2)$ ist eine verkettete Funktion mit $u(x) = sin(x)$ und $v(x) = x^2$.

$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right)$ ist eine verkettete Funktion mit $u(x) = cos(x)$ und $v(x) = \frac{\pi}{4}(x-2)$.

$f(x) = e^{-2x+5}$ ist eine verkettete Funktion mit $u(x) = e^x$ und $v(x) = -2x+5$.

Aus den Beispielen heraus erkennen wir, dass die Variable x der äußeren Funktion durch die komplette Funktionsgleichung der inneren Funktion ersetzt wird.

Merksatz

*Bei einer Verkettung wird **jede** Variable x der äußeren Funktion durch die komplette Funktionsgleichung der inneren Funktion ersetzt.*
Wir schreiben:

$$f(x) = u\big(v(x)\big)$$

Beispiel 1:

Gegeben sind die Funktionsgleichungen $s(x) = x^2$; $t(x) = x^3 + x^2$; $u(x) = 3x - 2$; $v(x) = sin(x) + 1$; $w(x) = e^x - 5x$.

Bilde die Funktionsgleichungen der Funktionen $f\big(s(t)\big)$, $f\big(t(s)\big)$, $f\big(u(v)\big)$, $f\big(v(u)\big)$, $f\big(w(v)\big)$, $f\big(v(w)\big)$ und $f\big(s(u(v)\big)$.

Lösung 1:

$f\big(s(t)\big)$: Wir ersetzen jedes x von $s(x)$ durch das komplette $t(x)$.
$f(x) = (x^3 + x^2)^2$

$f\big(t(s)\big)$: Wir ersetzen jedes x von $t(x)$ durch das komplette $s(x)$.
$f(x) = (x^2)^3 + (x^2)^2$

$f\big(u(v)\big)$: Wir ersetzen jedes x von $u(x)$ durch das komplette $v(x)$.
$f(x) = 3\,sin(x) - 2$

$f\big(v(u)\big)$: Wir ersetzen jedes x von $v(x)$ durch das komplette $u(x)$.
$f(x) = sin(3x - 2) + 1$

$f\big(w(v)\big)$: Wir ersetzen jedes x von $w(x)$ durch das komplette $v(x)$.
$f(x) = e^{sin(x)+1} - 5(sin(x) + 1)$

$f\big(v(w)\big)$: Wir ersetzen jedes x von $v(x)$ durch das komplette $w(x)$.
$f(x) = sin(e^x - 5x) + 1$

$f(s(u(v))\,)$: Wir ersetzen zunächst jedes x von $u(x)$ durch das komplette $v(x)$.
$f(u(v(x)) = 3\,sin(x) - 2$
Danach ersetzen wir jedes x von $s(x)$ durch das komplette $f(u(v(x))$.
$f\left(s\big(u\big(v(x)\big)\big)\right) = (3\,sin(x) - 2)^2$

Beispiel 2:

Gegeben sind die Funktionsgleichungen $u(x) = x^2$ und $v(x) = sin(x)$.

Bilde die Funktionsgleichungen der Funktionen $f\big(u(v)\big)$ sowie $f\big(v(u)\big)$.

Lösung 2:

$f\big(u(v)\big)$: Wir ersetzen jedes x von $u(x)$ durch das komplette $v(x)$.
$f(x) = sin^2(x)$

$f\big(u(v)\big)$: Wir ersetzen jedes x von $v(x)$ durch das komplette $u(x)$.
$f(x) = sin(x^2)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Die Kettenregel

Zwei Funktionen u und v können verkettet werden. Mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = 2x + 1$ erhalten wir f mit $f(u(v(x))) = (2x + 1)^2$

Während Summen von Funktionen gliedweise abgeleitet werden, gilt das für verkettete Funktionen nicht. So hat unser Beispiel $f(x) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ die Ableitung $f'(x) = 8x + 4$.

Würden wir nun $f(u(v(x)))$ nur nach der Potenzregel ableiten, erhielten wir $f'\big(u(v(x))\big) = 2(2x + 1) = 4x + 2$ ein ganz anderes (***falsches***) Ergebnis.

Wollen wir die Ableitung von f bestimmen, so müssen wir den Differenzenquotienten von f untersuchen.

$$(*)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(2(x_0 + h) + 1)^2 - (2x_0 + 1)^2}{h}$$

Zunächst kennen wir die Differenzenquotienten der äußeren Funktion u mit $u(x) = x^2$ und der inneren Funktion v mit $v(x) = 2x + 1$.

Es ist: $\frac{u(v_0+k)-u(v_0)}{k} = \frac{(v_0+k)^2-v_0^2}{k}$ bzw. $\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h} = \frac{2(x_0+h)+1-(2x_0+1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$

Wenn wir diese beiden Differenzenquotienten bei der Untersuchung von $(*)$ verwenden wollen, müssen wir den Differenzenquotienten f in $(*)$ geschickt umformen, um ihn auf die Differenzenquotienten der äußeren und inneren Funktion zurückzuführen. In unserem Falle gelingt dies, wenn wir $(*)$ mit 2 erweitern und anschließend geeigenet umformen.

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{(2(x_0+h)+1)^2-(2x_0+1)^2}{h}\\ &= \frac{(2x_0+2h+1)^2-(2x_0+1)^2}{h}\cdot\frac{2}{2} = \frac{(2x_0+2h+1)^2-(2x_0+1)^2}{2h}\cdot 2\\ &= \frac{(v_0+k)^2-v_0^2}{k}\cdot 2 \quad \text{mit } v_0 = 2x_0+1 \text{ und } k = 2h\end{aligned}$$

Nun geht für $h \longrightarrow 0$ auch $k \longrightarrow 0$ und wir erhalten:

$$f'(x_0) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(2(x_0+h)+1)^2-(2x_0+1)^2}{h} = \lim_{k\longrightarrow 0}\frac{(v_0+k)^2-v_0^2}{k}\cdot 2 = 2v_0\cdot 2$$
$$= u'(v_0)\cdot v'(x_0)$$

Die Ableitung der Verkettung f ist also gleich der Ableitung der äußeren Funktion u an der Stelle v_0, multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion v an der Stelle x_0.

Dieser Zusammenhang gilt allgemein, auch wenn die innere Funktion keine lineare Funktion ist.

Merksatz Kettenregel

Die Kettenregel lautet:
Ist $f(u(v))$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v mit $f(x) = u(v(x))$, so ist auch f differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$$

Diese doch wohl sehr theoretischen Betrachtungen sollen dich aber nicht erschrecken. Es gibt eine sehr sehr einfache Lösungsmöglichkeit für Ableitungen mit der Kettenregel, wie du in nachfolgenden Beispielen erfährst.

Beispiel 3:
Leite ab und vereinfache das Ergebnis.

a) $f(x) = (5-3x)^4$ b) $f(x) = \frac{3}{2x^2-1}$ c) $f(x) = 3\,sin(3x^2)$

Lösung 3:
Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = (5-3x)^4$

In diesem Beispiel ist die äußere Funktion eine Potenzfunktion, erkenntlich an $)^4$. Also leitest du erst einmal ganz einfach nach der Potenzregel ab und schreibst $f'(x) = 4(5-3x)^3$.

Jetzt kommt wegen der Kettenregel die innere Funktion dran, das ist der Ausdruck in der Klammer mit $5-3x$. Dieser Ausdruck abgeleitet ergibt -3. Nun musst du die abgeleitete Potenzfunktion nur noch mit der Ableitung -3 der inneren Funktion multiplizieren und hast das endgültige Ergebnis:

$f'(x) = 4(5-3x)^3 \cdot (-3) = -12(5-3x)^3$

b) $f(x) = \frac{3}{2x^2-1} = 3 \cdot (2x^2-1)^{-1}$

In diesem Beispiel ist die 3 ein Faktor, der nach der Faktorregel erhalten bleibt.

Der Ausdruck $(2x^2-1)^{-1}$ ist die Verkettung einer Potenzfunktion als äußerer Funktion mit einer quadratischen Funktion als innerer Funktion. Gemäß Kettenregel gilt:

$f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot (2x^2-1)^{-2} \cdot 4x = -12x \cdot (2x^2-1)^{-2} = -\frac{12x}{(2x^2-1)^2}$

c) $f(x) = 3sin(3x^2)$

In diesem Beispiel ist die äußere und innere 3 ein Faktor, der nach der Faktorregel erhalten bleibt.

Der Ausdruck $sin(3x^2)$ ist die Verkettung einer Sinusfunktion als äußerer Funktion mit einer quadratischen Funktion als innerer Funktion. Gemäß Kettenregel gilt:

$f'(x) = 3 \cdot \cos(3x^2) \cdot 2 \cdot 3x = 18xcos(3x^2)$

Hinweis: Bei den trigonometrischen Funktionen sin, cos und tan ändert sich beim Ableiten das Argument der Funktion (das Argument ist der Ausdruck, der bei sin, cos und tan in der Klammer steht) NIE !!!
Bei Exponentialfunktionen (z. B. $f(x) = a^{3x-2}$) ändert sich beim Ableiten der Exponent NIE !!!

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de