

Die Konstanten- Faktor- und Potenzregel

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 (21 Aufgaben)	08
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	09
Aufgabenblatt 2 (21 Aufgaben)	10
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	11
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 (21 Aufgaben)	12
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	13
Aufgabenblatt 2 (21 Aufgaben)	14
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	15
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 (25 Aufgaben)	16
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	17
Aufgabenblatt 2 (22 Aufgaben)	19
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	21
Level 4 Universität	
Aufgabenblatt 1 (1 Aufgabe)	22
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	23

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $P(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \rightarrow 0$.

Die Konstantenregel

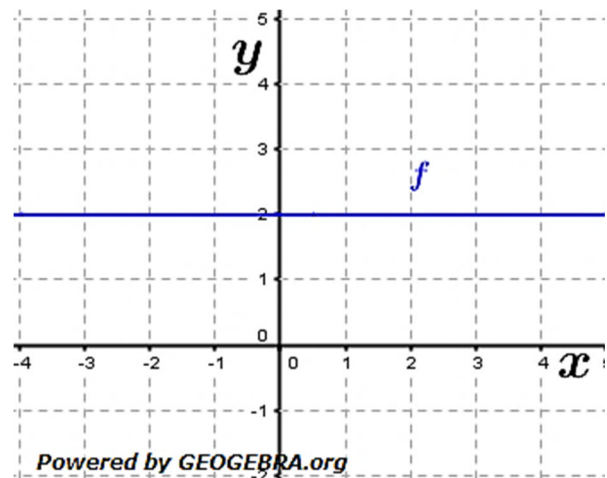
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = c$. Schauen wir uns den Graphen f von $f(x)$ einmal an. In nebenstehender Grafik haben wir für $c = 2$ gewählt.

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2-2}{h} = 0$$

Wir stellen wir fest, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ immer 0 ist, egal wie groß oder klein Δx ist.

Daraus folgern wir, dass $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ ist. Da $f'(x)$ gleichzeitig die Steigung der Tangente im Punkt $P(x|f(x))$ ist, hat $f(x) = 2$ in jedem Punkt $P(x|f(x))$ die Steigung 0. Was ja auch aus der Abbildung ersichtlich ist.



Merksatz

Die Konstantenregel lautet:

Eine konstante Funktion $f(x) = c$; $c \in \mathbb{R}$ besitzt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x) = 0$.

Mit anderen Worten: Konstanten fallen beim Ableiten weg.

Die Faktorregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = mx$.
In nebenstehender Grafik haben wir für $m = \frac{1}{2}$ gewählt.

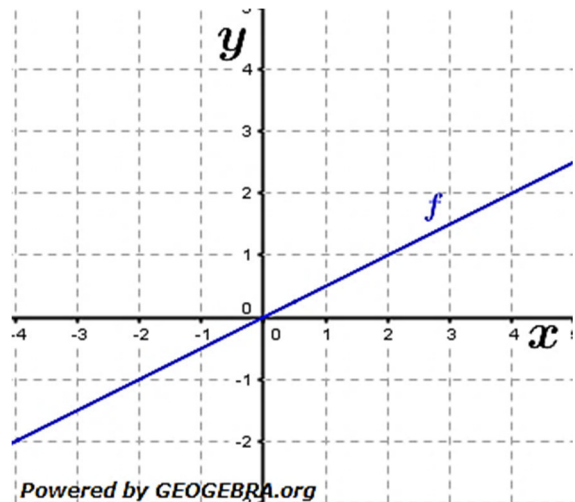
Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(x+h) - \frac{1}{2}x}{h} = \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \frac{1}{2}$$

Wir stellen wir fest, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ immer $\frac{1}{2}$ ist, egal wie groß oder klein Δx ist.

Daraus folgern wir, dass $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2}$ ist.

Da $f'(x)$ gleichzeitig die Steigung der Tangente im Punkt $P(x|f(x))$ ist, hat $f(x) = \frac{1}{2}x$ in jedem Punkt $P(x|f(x))$ die Steigung $\frac{1}{2}$.



Was ja auch aus der Abbildung ersichtlich ist und andererseits auch die Steigung des Graphen der Funktion (einer Geraden) ist.

Merksatz

Die Faktorregel lautet:

Ist g eine differenzierbare Funktion, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x)$; $k \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = k \cdot g'(x)$$

Mit anderen Worten: Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.

Die Potenzregel (speziell)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + c$.

In nebenstehender Abbildung haben wir für a den Wert $\frac{1}{4}$ und für c den Wert 1 gewählt.

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ist somit eine Parabel.

Differenzenquotient:

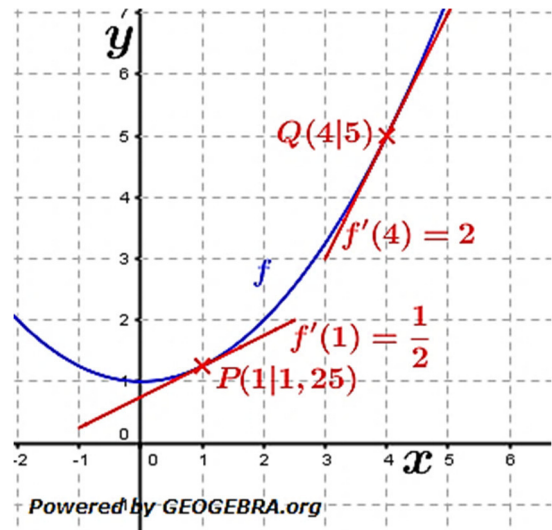
$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 + 1 - (\frac{1}{4}x^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}hx + \frac{1}{4}h^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2 - 1}{h} = \frac{\frac{1}{2}hx + \frac{1}{4}h^2}{h} = \frac{h(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h)}{h} \\ &= \frac{1}{4}h + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Differenzialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4}h + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

Da $f'(x)$ gleichzeitig die Steigung der Tangente im Punkt $P(x|f(x))$ ist, hat $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ in jedem Punkt $P(x|f(x))$ die Steigung $\frac{1}{2}x$.

Wollen wir nun die Steigung in einem bestimmten Punkt berechnen, so setzen wir die x -Koordinate des Punktes einfach in $f'(x)$ ein. Im Beispiel erhalten wir somit für z. B. $f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ und $f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.



Welche Regel leitet sich daraus ab? Nun, die Konstantenregel haben wir in diesem Beispiel schon angewandt. Die $+1$ wird zur 0 . Nach der Faktorregel muss die $\frac{1}{4}$ bei x^2 jedoch erhalten bleiben. Um aus $\frac{1}{4}$ die $\frac{1}{2}$ zu machen, müssen wir $\frac{1}{4}$ mit 2 multiplizieren. Diese 2 finden wir aber in der Potenz von x^2 . Weiterhin ist das 2 in der Ableitung jedoch verschwunden und ist dort zu einer 1 geworden, denn x ist gleichbedeutend mit x^1 . Es sieht offensichtlich so aus, dass bei der Ableitung von Potenzen der Faktor bei der Variablen x mit der Potenz von x multipliziert wird und die Potenz um 1 verringert wird.

Und genau das ist die Potenzregel für die Ableitung. Hier noch einmal das allgemeine Schema:

Aus der Funktionsgleichung erhält man deren Ableitung, indem der ursprüngliche Exponent mit dem Term multipliziert und dann der Exponent um 1 verringert wird.

$$f(x) = ax^n$$

$$f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

Merksatz

Die Potenzregel (speziell) lautet:

Die Funktion $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, ist differenzierbar und es gilt
 $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Die Potenzregel (allgemein)

Nun gibt es ja auch Potenzfunktionen mit negativen Hochzahlen und sogar mit rationalen Hochzahlen. Betrachten wir uns zunächst einmal solche mit negativen Hochzahlen.

Gegeben ist die Funktion f mit
 $f(x) = \frac{a}{x^2} + c$.

In nebenstehender Abbildung haben wir für a den Wert 2 und für c den Wert 1 gewählt. Die Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$. Nach den Potenzregeln können wir auch schreiben $f(x) = 2x^{-2} + 1$.

Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{2}{(x+h)^2} + 1 - \left(\frac{2}{x^2} + 1\right)}{h} \\ &= \frac{\frac{2}{(x+h)^2} - \frac{2}{x^2}}{h} = \frac{\frac{2x^2 - 2(x+h)^2}{x^2 \cdot (x+h)^2}}{h} = \frac{2x^2 - (2x^2 + 4hx + 2h^2)}{h \cdot x^2 \cdot (x+h)^2} \\ &= \frac{-2h^2 - 4hx}{h \cdot x^2 \cdot (x+h)^2} = \frac{-2h(h+2x)}{h \cdot x^2 \cdot (x+h)^2} = \frac{-2(h+2x)}{x^2 \cdot (x+h)^2} \end{aligned}$$

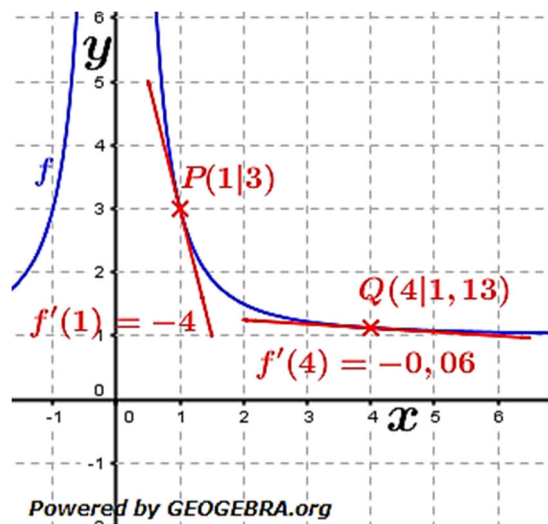
Differenzialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(h+2x)}{x^2 \cdot (x+h)^2} = \frac{-4x}{x^4} = -\frac{4}{x^3}$$

Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ ist somit $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

Wie kommen wir nun aber mit der Potenzregel zu dieser Lösung?

Wir haben ja $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ mit Hilfe der Potenzregeln umgeformt zu $f(x) = 2x^{-2} + 1$. Nun können wir problemlos die Potenzregel anwenden, wir multiplizieren den Term



$2x^{-2}$ mit seinem Exponenten und vermindern dann die den Exponenten um 1, erhalten also $-2 \cdot 2x^{-3} = -4x^{-3}$. Nun formen wir die negative Hochzahl nach den Potenzregeln wieder um zu einer positiven Hochzahl und erhalten $-\frac{4}{x^3}$, denselben Ausdruck, den wir auch über den Differenzialquotienten erhalten haben. Das absolute Glied 1 der ursprünglichen Funktionsgleichung ist nach der Konstantenregel ja weggefallen. Somit lautet die Ableitung von $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}$$

Neben negativen Hochzahlen haben Potenzfunktionen auch rationale Potenzen. Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = a \cdot \sqrt{x+1} + c.$$

In nebenstehender Abbildung haben wir für a den Wert 2 und für c den Wert 3 gewählt. Die Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 3$. Nach den Potenzregeln können wir auch schreiben

$$f(x) = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + 3.$$

Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2\sqrt{x+h+1}+3-(2\sqrt{x+1}+3)}{h} \\ &= \frac{2(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1})}{h} \\ &= \frac{2(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{2(x+h+1-(x+1))}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{2h}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{2}{(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

Differenzialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

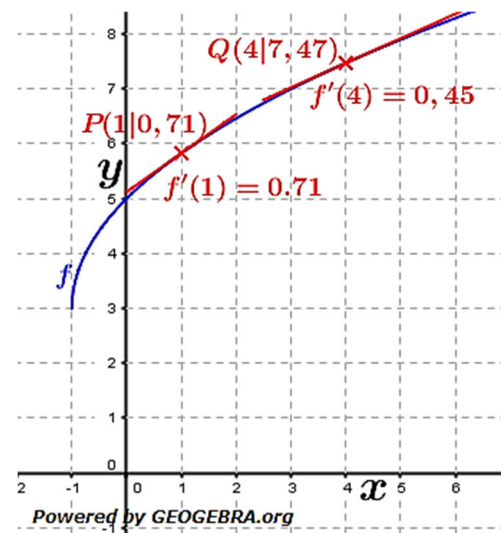
Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 3$ ist somit $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Wie kommen wir nun aber mit der Potenzregel zu dieser Lösung?

Wir haben ja $2\sqrt{x+1} + 3$ mithilfe der Potenzregeln umgeformt zu $f(x) = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + 3$. Nun können wir problemlos die Potenzregel anwenden, wir multiplizieren den Term $2(x+1)^{\frac{1}{2}}$ mit seinem Exponenten und vermindern dann die den Exponenten um 1, erhalten also $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$. Nun formen wir die negative Hochzahl nach den Potenzregeln wieder um zu einer positiven Hochzahl, erhalten $\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$, und formen den Exponenten $\frac{1}{2}$ weiter um nach den

Potenzregeln, und erhalten den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, den wir auch über den Differenzialquotienten erhalten haben. Das absolute Glied 3 der ursprünglichen Funktionsgleichung ist nach der Konstantenregel ja weggefallen. Somit lautet die Ableitung von $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 3$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$



Merksatz

Die Potenzregel (allgemein) lautet:

Die Funktion $f(x) = x^q$; $q \in \mathbb{Q}$; $q = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$ ist differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = q \cdot x^{q-1}.$$



Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = 1$	$f'_1(x) =$
$f_2(x) = 0,25$	$f'_2(x) =$
$f_3(x) = 10^5$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = a$	$f'_4(x) =$
$f_5(x) = b^{-1}$	$f'_5(x) =$
$f_6(t) = e^2$	$f'_6(t) =$
$f_7(t) = 125x$	$f'_7(t) =$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = x$	$f'_1(x) =$
$f_2(x) = 0,25x$	$f'_2(x) =$
$f_3(x) = 10^5x$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = ax$	$f'_4(x) =$
$f_5(x) = b^{-1}x$	$f'_5(x) =$
$f_6(t) = e^2t$	$f'_6(t) =$
$f_7(t) = 125xt$	$f'_7(t) =$

Aufgabe A3

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = x^2$	$f'_1(x) =$
$f_2(x) = 0,25x^3$	$f'_2(x) =$
$f_3(x) = 10^5x^4$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = ax^5$	$f'_4(x) =$
$f_5(x) = b^{-1}x^6$	$f'_5(x) =$
$f_6(t) = e^2t$	$f'_6(t) =$
$f_7(t) = 125xt^3$	$f'_7(t) =$

Lösung A1

$f_1(x) = 1; \quad f'_1(x) = 0$	$f_2(x) = 0,25; \quad f'_2(x) = 0$
$f_3(x) = 10^5; \quad f'_3(x) = 0$	$f_4(x) = a; \quad f'_4(x) = 0$
$f_5(x) = b^{-1}; \quad f'_5(x) = 10$	$f_6(t) = e^2; \quad f'_6(t) = 0$
$f_7(t) = 125x; \quad f'_7(t) = 0$	

Lösung A2

$f_1(x) = x; \quad f'_1(x) = 1$	$f_2(x) = 0,25x; \quad f'_2(x) = 0,25$
$f_3(x) = 10^5x; \quad f'_3(x) = 10^5$	$f_4(x) = ax; \quad f'_4(x) = a$
$f_5(x) = b^{-1}x; \quad f'_5(x) = b^{-1}$	$f_6(t) = e^2t; \quad f'_6(t) = e^2$
$f_7(t) = 125xt; \quad f'_7(t) = 125x$	

Lösung A3

$f_1(x) = x^2; \quad f'_1(x) = 2x$	$f_2(x) = 0,25x^3; \quad f'_2(x) = 0,75x^2$
$f_3(x) = 10^5x^4; \quad f'_3(x) = 4 \cdot 10^5x^3$	$f_4(x) = ax^5; \quad f'_4(x) = 5ax^4$
$f_5(x) = b^{-1}x^6; \quad f'_5(x) = 6b^{-1}x^5$	$f_6(t) = e^2t; \quad f'_6(t) = e^2$
$f_7(t) = 125xt^3; \quad f'_7(t) = 375xt^2$	



Aufgabe A1

Bilde die erste Ableitung mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = 5 \cdot g_1(x)$	
$f_2(x) = 0,25 \cdot g_2(x)$	
$f_3(x) = 10^5 \cdot g_3(x)$	
$f_4(x) = a \cdot g_4(x)$	
$f_5(x) = b^{-1} \cdot g_5(x)$	
$f_6(t) = \sqrt{2} \cdot g_6(t)$	
$f_7(t) = 125x \cdot g_7(t)$	

Aufgabe A2

Vereinfache die Funktionsgleichung und bestimme dann die erste Ableitung.

$f_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$	$f_1(x) =$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = 5(x^2 + 5) - 2x^2$	$f_2(x) =$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = 21(t - x)(t + x)$	$f_3(x) =$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^3$	$f_4(x) =$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = (3 - 6)x^5 + 2x^5$	$f_5(x) =$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = 3 \cdot 5 \cdot t^2 \cdot t^3 + t^5$	$f_6(t) =$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = \frac{3t^4 \cdot 2t^2 \cdot 1}{7}$	$f_7(t) =$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A3

Bilde die 1. und 2. Ableitung mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = x^9$	$f_1'(x) =$	$f_1''(x) =$
$f_2(x) = 2x^5$	$f_2'(x) =$	$f_2''(x) =$
$f_3(x) = \frac{5}{3}x^{15}$	$f_3'(x) =$	$f_3''(x) =$
$f_4(x) = ax^5$	$f_4'(x) =$	$f_4''(x) =$
$f_5(x) = \frac{1}{b} \cdot x^6$	$f_5'(x) =$	$f_5''(x) =$
$f_6(t) = e^2(1 + t^3)$	$f_6'(t) =$	$f_6''(t) =$
$f_7(t) = \frac{125}{x}t^3$	$f_7'(t) =$	$f_7''(t) =$

Lösung A1

$f_1(x) = 5 \cdot g_1(x)$	$f_1'(x) = 5 \cdot g_1'(x)$	$f_2(x) = 0,255 \cdot g_2(x)$	$f_2'(x) = 0,25 \cdot g_2'(x)$
$f_3(x) = 10^5 \cdot g_3(x)$	$f_3'(x) = 10^5 \cdot g_3'(x)$	$f_4(x) = a \cdot g_4(x)$	$f_4'(x) = a \cdot g_4'(x)$
$f_5(x) = b^{-1} \cdot g_5(x)$	$f_5'(x) = b^{-1} \cdot g_5'(x)$	$f_6(t) = \sqrt{2} \cdot g_6(t)$	$f_6'(t) = \sqrt{2} \cdot g_6'(t)$
$f_7(t) = 125x \cdot g_7(t)$	$f_7'(t) = 125x \cdot g_7'(t)$		

Lösung A2

$f_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$	$f_1(x) = \frac{13}{12}x$	$f_1'(x) = \frac{13}{12}$
$f_2(x) = 5(x^2 + 5) - 2x^2$	$f_2(x) = -10x^2 + 25$	$f_2'(x) = -20x$
$f_3(x) = 21(t - x)(t + x)$	$f_3(x) = 21t^2 - 21x^2$	$f_3'(x) = -42x$
$f_4(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^3$	$f_4(x) = 2x^3$	$f_4'(x) = 6x^2$
$f_5(x) = (3 - 6)x^5 + 2x^5$	$f_5(x) = -x^5$	$f_5'(x) = -5x^4$
$f_6(t) = 3 \cdot 5 \cdot t^2 \cdot t^3 + t^5$	$f_6(t) = 16t^5$	$f_6'(t) = 80t^4$
$f_7(t) = \frac{3t^4 \cdot 2t^2 \cdot 1}{7}$	$f_7(t) = \frac{3}{7}t^6$	$f_7'(t) = \frac{18}{7}t^5$

Lösung A3

$f_1(x) = x^9$	$f_1'(x) = 9x^8$	$f_1''(x) = 72x^7$
$f_2(x) = 2x^5$	$f_2'(x) = 10x^4$	$f_2''(x) = 40x^3$
$f_3(x) = \frac{5}{3}x^{15}$	$f_3'(x) = 25x^{14}$	$f_3''(x) = 350x^{13}$
$f_4(x) = ax^5$	$f_4'(x) = 5ax^4$	$f_4''(x) = 20ax^3$
$f_5(x) = \frac{1}{b} \cdot x^6$	$f_5'(x) = \frac{6}{b}x^5$	$f_5''(x) = \frac{30}{b}x^4$
$f_6(t) = e^2(1 + t^3)$	$f_6'(t) = 3e^2t^2$	$f_6''(t) = 6e^2t$
$f_7(t) = \frac{125}{x}t^3$	$f_7'(t) = \frac{375}{x}t^2$	$f_7''(t) = \frac{750}{x}t$



Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = 0,5$	$f'_1(x) =$
$f_2(x) = 0,5x$	$f'_2(x) =$
$f_3(x) = 0,5x^2$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = -cx^3$	$f'_4(x) =$
$f_5(x) = yx^4$	$f'_5(x) =$
$f_6(t) = t^2 + 1$	$f'_6(t) =$
$f_7(t) = 0,5t^2 + q$	$f'_7(t) =$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = \frac{1}{x}$	$f'_1(x) =$
$f_2(x) = \frac{1}{4x}$	$f'_2(x) =$
$f_3(x) = \frac{5}{x^2}$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = \frac{a}{x^3} + 7$	$f'_4(x) =$
$f_5(x) = b^{-1}x^{-3} + 6$	$f'_5(x) =$
$f_6(t) = \frac{e^2}{t}$	$f'_6(t) =$
$f_7(t) = \frac{25x}{t^4}$	$f'_7(t) =$

Aufgabe A3

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6$	$f'_1(x) =$
$f_2(x) = \frac{0,5}{x^2} - 9$	$f'_2(x) =$
$f_3(x) = \frac{b}{x^4} + p \cdot q$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = ax^{-5} + 18$	$f'_4(x) =$
$f_5(x) = bx^{-6} - 17$	$f'_5(x) =$
$f_6(t) = e^2 t^{-2} + 2,5$	$f'_6(t) =$
$f_7(t) = 25xt^{-3} + \frac{1}{2}$	$f'_7(t) =$

Lösung A1

$f_1(x) = 0,5; \quad f'_1(x) = 0$	$f_2(x) = 0,5x; \quad f'_2(x) = 0,5$
$f_3(x) = 0,5x^2; \quad f'_3(x) = x$	$f_4(x) = -cx^3; \quad f'_4(x) = -3cx^2$
$f_5(x) = yx^4; \quad f'_5(x) = 4yx^3$	$f_6(t) = t^2 + 1; \quad f'_6(t) = 2t$
$f_7(t) = 0,5t^2 + q; \quad f'_7(t) = t$	

Lösung A2

$f_1(x) = \frac{1}{x}; \quad f'_1(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f_2(x) = \frac{1}{4x}; \quad f'_2(x) = -\frac{1}{4x^2}$
$f_3(x) = \frac{5}{x^2}; \quad f'_3(x) = -\frac{10}{x^3}$	$f_4(x) = \frac{a}{x^3} + 7; \quad f'_4(x) = -\frac{3a}{x^4}$
$f_5(x) = b^{-1}x^{-3}; \quad f'_5(x) = -3b^{-1}x^{-4}$	$f_6(t) = \frac{e^2}{t}; \quad f'_6(t) = -\frac{e^2}{t^2}$
$f_7(t) = \frac{125x}{t^4}; \quad f'_7(t) = \frac{-1000x}{t^5}$	

Lösung A3

$f_1(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6; \quad f'_1(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$	$f_2(x) = \frac{0,5}{x^2} - 6; \quad f'_2(x) = -\frac{1}{x^3}$
$f_3(x) = \frac{b}{x^4} + pq; \quad f'_3(x) = -\frac{4b}{x^5}$	$f_4(x) = ax^{-5}; \quad f'_4(x) = -5ax^{-6}$
$f_5(x) = bx^{-6}; \quad f'_5(x) = -6bx^{-7}$	$f_6(t) = e^2t^{-2}; \quad f'_6(t) = -2e^2t^{-3}$
$f_7(t) = 15xt^{-3}; \quad f'_7(t) = -45xt^{-4}$	

Aufgabe A1

Bilde die erste Ableitung mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.



$f_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$	
$f_2(x) = 0,5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$	
$f_3(x) = 5 \cdot x^{\frac{1}{5}}$	
$f_4(x) = 10 \cdot x^{\frac{2}{3}} + 5$	
$f_5(x) = 7,5 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 8$	
$f_6(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{t} + \frac{1}{2}$	
$f_7(t) = \sqrt{3x} \cdot t \cdot \sqrt{t} - 0,5$	

Aufgabe A2

Vereinfache die Funktionsgleichung und bestimme dann die erste Ableitung.

$f_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{4}\sqrt{x}$	$f_1(x) =$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = 5\left(x^{\frac{1}{2}} + 5\right) - 2x^{\frac{1}{2}}$	$f_2(x) =$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = 21(t - \sqrt[3]{x})(t + \sqrt[3]{x})$	$f_3(x) =$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}}$	$f_4(x) =$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{(3-6)}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}$	$f_5(x) =$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = 3 \cdot 5 \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{3}} + \sqrt[6]{t^5}$	$f_6(t) =$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = \frac{3t^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t^{-\frac{1}{4}} \cdot 1}{7}$	$f_7(t) =$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A3

Bilde die 1. und 2. Ableitung mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregel.

$f_1(x) = \sqrt{x^3} + 3$	$f_1'(x) =$	$f_1''(x) =$
$f_2(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} - 4$	$f_2'(x) =$	$f_2''(x) =$
$f_3(x) = \frac{2}{3x^{-\frac{1}{2}}} + 6$	$f_3'(x) =$	$f_3''(x) =$
$f_4(x) = a^3\sqrt{x} + 7$	$f_4'(x) =$	$f_4''(x) =$
$f_5(x) = \frac{b}{x^6} \cdot 3 - 4$	$f_5'(x) =$	$f_5''(x) =$
$f_6(t) = e^2(1 + t^{-\frac{1}{3}})$	$f_6'(t) =$	$f_6''(t) =$
$f_7(t) = \frac{125}{x} \cdot t^{-\frac{1}{3}}$	$f_7'(t) =$	$f_7''(t) =$

Lösung A1

$f_1(x) = x^{\frac{1}{2}}; f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f_2(x) = 0,5 \cdot x^{\frac{1}{2}}; f_2'(x) = \frac{0,5}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$
$f_3(x) = 5 \cdot x^{\frac{1}{5}}; f_3'(x) = \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}$	$f_4(x) = 10 \cdot x^{\frac{2}{3}} + 5; f_4'(x) = \frac{20}{3} x^{-\frac{1}{3}}$
$f_5(x) = 7,5 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 8; f_5'(x) = 10 \cdot x^{\frac{1}{3}}$	$f_6(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{t} + \frac{1}{2}; f_6'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}$
$f_7(t) = \sqrt{3x} \cdot t \cdot \sqrt{t} - 0,5; f_7'(t) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{t}$	

Lösung A2

$f_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{4}\sqrt{x}$	$f_1(x) = \frac{13}{12}\sqrt{x}$	$f_1'(x) = \frac{13}{24\sqrt{x}}$
$f_2(x) = 5\left(x^{\frac{1}{2}} + 5\right) - 2x^{\frac{1}{2}}$	$f_2(x) = 3x^{\frac{1}{2}} + 25$	$f_2'(x) = 1,5x^{-\frac{1}{2}}$
$f_3(x) = 21(t - \sqrt[3]{x})(t + \sqrt[3]{x})$	$f_3(x) = 21t^2 - 21\sqrt[3]{x^2}$	$f_3'(x) = -\frac{14}{\sqrt[3]{x}}$
$f_4(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}}$	$f_4(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$	$f_4'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
$f_5(x) = \frac{(3-6)}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}$	$f_5(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$	$f_5'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f_6(t) = 3 \cdot 5 \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{3}} + \sqrt[6]{t^5}$	$f_6(t) = 16t^{\frac{5}{6}}$	$f_6'(t) = \frac{40}{3}t^{-\frac{1}{6}}$
$f_7(t) = \frac{3t^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t^{-\frac{1}{4}} \cdot 1}{7}$	$f_7(t) = \frac{6}{7}t^{-\frac{3}{4}}$	$f_7'(t) = -\frac{9}{14}t^{-\frac{7}{4}}$

Lösung A3

$f_1(x) = \sqrt{x^3} + 3$	$f_1'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$	$f_1''(x) = -\frac{2}{9x \cdot \sqrt{x^2}}$
$f_2(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} - 4$	$f_2'(x) = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}$	$f_2''(x) = \frac{3}{\sqrt{(x+1)^5}}$
$f_3(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{2}}} + 6$	$f_3'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}}$	$f_3''(x) = -\frac{1}{6\sqrt{x^3}}$
$f_4(x) = a\sqrt[3]{x} + 7$	$f_4'(x) = \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$f_4''(x) = -\frac{2a}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$
$f_5(x) = \frac{b}{x^6} \cdot 3 - 4$	$f_5'(x) = -\frac{b}{2x^6}$	$f_5''(x) = \frac{21b}{x^6}$
$f_6(t) = e^2(1 + t^{-\frac{1}{3}})$	$f_6'(t) = -\frac{e^2}{3}t^{-\frac{4}{3}}$	$f_6''(t) = \frac{4e^2}{9}t^{-\frac{7}{3}}$
$f_7(t) = \frac{125}{x} \cdot t^{-\frac{1}{3}}$	$f_7'(t) = -\frac{125}{3x} \cdot t^{-\frac{4}{3}}$	$f_7''(t) = \frac{500}{9x} \cdot t^{-\frac{7}{3}}$



Aufgabe A1

Es sei $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Bestimme $f'(x)$ für f .

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = x^k$ | b) $f(x) = x^{2n+1}$ | c) $f(x) = x^{3k}$ |
| d) $f(x) = x^{3-m}$ | e) $f(x) = x^{2k-1+m}$ | f) $f(x) = x^{-n+5}$ |
| g) $f(x) = x^{1-3n}$ | h) $f(x) = x^{-4+6k}$ | i) $f(x) = x^{\frac{n}{4}}$ |
| j) $f(x) = x^{\frac{2m-1}{5}}$ | k) $f(x) = x^{\frac{n}{2k}}$ | l) $f(x) = x^{\frac{m+1}{n}}$ |

Aufgabe A2

In welchen Punkten hat der Graph der Funktion f die Steigung m ?

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------|---|
| a) $f(x) = x^4$; $m = 4$ | b) $f(x) = x^3$; $m = 12$ | c) $f(x) = x^{100}$; $m = \frac{100}{299}$ |
| d) $f(x) = x^0$; $m = 1$ | e) $f(x) = x^6$; $m = 18750$ | f) $f(x) = x^{-1}$; $m = -1$ |

Aufgabe A3

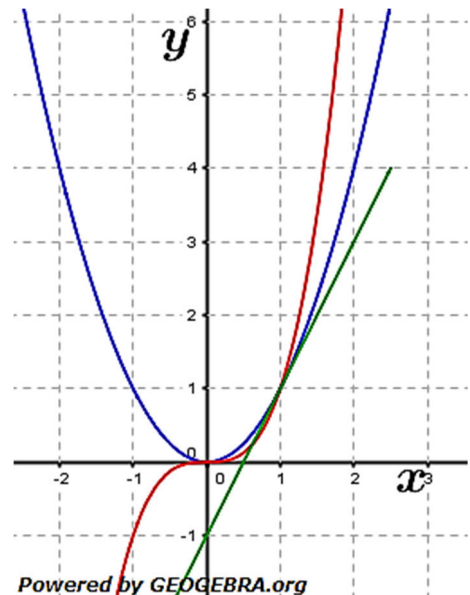
Untersuche:

- Gibt es zu jeder Geraden $y = mx + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine parallele Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, n ungerade?
- Gibt es zu jeder Geraden $y = mx + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine parallele Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Z}$, n gerade?
- Von einem Punkt P sollen Tangenten an den Graphen von f mit $f(x) = x^{2n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ gelegt werden. Gibt es Punkte im Koordinatensystem, für die dies nicht möglich ist?

Aufgabe A4

Die Graphen aller Funktionen f_n mit $f_n(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$ schneiden sich in $P(1|1)$.

- Bestimme die Tangentensteigungen von f_2 und f_3 in P . Berechne daraus den Schnittwinkel der beiden Tangenten.
- Weise nach, dass im Punkt $P(1|1)$ für den Schnittwinkel der Tangenten von f_n und f_{n+1} gilt: $\tan(\alpha) = \frac{1}{n^2+n+1}$.
- Welchen Wert muss n mindestens haben, dass sich die Graphen von f_n und f_{n+1} in $P(1|1)$ unter 3 einem Winkel kleiner als 1° schneiden?
- Die Graphen der Funktion $h_n = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}^*$ schneiden sich ebenfalls in $P(1|1)$. Führe eine zu den Teilaufgaben b) und c) analoge Betrachtung für diese Hyperbeln n -ter Ordnung durch.



Für den Schnittwinkel α zweier Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 gilt (für $m_1 > m_2$):

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Lösung A1

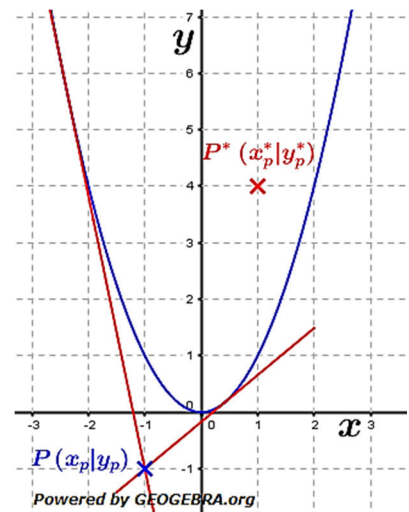
- | | |
|--|--|
| a) $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$ | b) $f'(x) = (2n+1) \cdot x^{2n}$ |
| c) $f'(x) = 3k \cdot x^{3k-1}$ | d) $f'(x) = (3-m) \cdot x^{2-m}$ |
| e) $f'(x) = (2k-1+m) \cdot x^{2k-2+m}$ | f) $f'(x) = (5-n) \cdot x^{-n+4}$ |
| g) $f'(x) = (1-3n) \cdot x^{-3n}$ | h) $f'(x) = (-4+6k) \cdot x^{-5+6k}$ |
| i) $f'(x) = \frac{n}{4} \cdot x^{\frac{n}{4}-1}$ | j) $f'(x) = \frac{2m-1}{5} \cdot x^{\frac{2m-6}{5}}$ |
| k) $f'(x) = \frac{n}{2k} \cdot x^{\frac{n}{2k}-1}$ | l) $f'(x) = \frac{m+1}{n} \cdot x^{\frac{m+1}{n}-1}$ |

Lösung A2

- a) $f'(x) = 4x^3$; $4 = 4x^3$; $x^3 = 1$; $x_0 = 1$
 f hat in $x_0 = 1$ die Steigung $m = 4$.
- b) $f'(x) = 3x^2$; $12 = 3x^2$; $x^2 = 4$; $x_1 = -2$; $x_2 = 2$
 f hat in $x_1 = -2$ und in $x_2 = 2$ die Steigung $m = 12$.
- c) $f'(x) = 100x^{99}$; $\frac{100}{2^{99}} = 100x^{99}$; $x^{99} = \frac{1}{2^{99}}$; $x_0 = \frac{1}{2}$
 f hat in $x_0 = \frac{1}{2}$ die Steigung $m = \frac{100}{2^{99}}$.
- d) $f'(x) = 0$; $0 \neq 1$
 f hat in keinem Punkt die Steigung $m = 1$.
- e) $f'(x) = 6x^5$; $18750 = 6x^5$; $x^5 = 3125$; $x_0 = 5$
 f hat in $x_0 = 5$ die Steigung $m = 18750$.
- f) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $-1 = -\frac{1}{x^2}$; $x^2 = 1$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$
 f hat in $x_1 = -1$ und in $x_2 = 1$ die Steigung $m = -1$.

Lösung A3

- a) Es muss gelten: $m = n \cdot x^{n-1}$. Daraus folgt: $\frac{m}{n} = x^{n-1}$. Da n ungerade sein soll, ist $n-1$ eine gerade Zahl. Ist nun $\frac{m}{n} < 0$, kann die $(n-1)$ -te Wurzel nicht gezogen werden. Folglich gibt es für negative Steigungen ($m < 0$) und $n > 0$ bzw. für positive Steigungen ($m > 0$) und $n < 0$ keine parallelen Tangenten zur Geraden $m = mx + c$.
- b) Es muss gelten: $m = n \cdot x^{n-1}$. Daraus folgt: $\frac{m}{n} = x^{n-1}$. Da n gerade sein soll, ist $n-1$ eine ungerade Zahl. Die Gleichung $x^{n-1} = \frac{m}{n}$ hat daher stets eine Lösung. Folglich gibt es für alle $m \in \mathbb{R}$ parallele Tangenten an den Graphen.
- c) Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir uns beispielhaft die Funktion f mit $f(x) = x^2$, eine nach oben geöffnete Normalparabel. Liegt der Punkt P außerhalb der Öffnung, kann problemlos eine Tangente an den Graphen von f gelegt werden. Liegt der Punkt P^* jedoch innerhalb der Öffnung, ist eine Tangente an den Graphen unmöglich. Da gemäß Aufgabenstellen $2n$; $n \in \mathbb{N}^*$ der Exponent der Funktionsgleichung stets gerade und $n \geq 2$ ist, gilt diese Betrachtung für alle diesbezüglichen Funktionen. Generell gilt: Von Punkten $P(x_0|y_0)$ mit $y_0 > x_0^{2n}$ kann keine Tangente an den Graphen von f gelegt werden.



Lösung A4

a) $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$f_2'(x) = 2x$$

$$f_2'(1) = 2$$

$$f_3'(x) = 3x^2$$

$$f_3'(1) = 3$$

$$\tan(\alpha) = \frac{f_3'(1) - f_2'(1)}{1 + f_3'(1) \cdot f_2'(1)} = \frac{3-2}{1+3 \cdot 2} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = 8,13^\circ$$

b) $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}; f_n'(1) = n$ $f_{n+1}'(x) = (n+1) \cdot x^n; f_{n+1}'(1) = n+1$

$$\tan(\alpha) = \frac{f_{n+1}'(1) - f_n'(1)}{1 + f_{n+1}'(1) \cdot f_n'(1)} = \frac{n+1-n}{1+(n+1) \cdot n} = \frac{1}{n^2+n+1}$$

q.e.d.

c) $\tan(1^\circ) = 0,01746$

$$\frac{1}{n^2+n+1} < 0,01746$$

$$0,01746(n^2 + n + 1) - 1 > 0$$

$$n^2 + n + 1 - \frac{1}{0,01746} > 0$$

$$n^2 + n - 56,2738 > 0$$

$$n_{1,2} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 56,2738}$$

$$n_1 = 7,02; n_2 = -8,02$$

Wegen $0,01746(n^2 + n + 1) - 1 > 0$ ist n_2 keine Lösung.

n muss mindestens den Wert 8 haben.

d) $h_n'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}; h_n'(1) = -n$ $h_{n+1}'(x) = \frac{-(n+1)}{x^{n+2}}; h_{n+1}'(1) = -(n+1)$

$$\tan(\alpha) = \frac{h_n'(1) - h_{n+1}'(1)}{1 + h_n'(1) \cdot h_{n+1}'(1)} = \frac{-n - (-(n+1))}{1 - (-n) \cdot (-(n+1))} = \frac{1}{n^2+n+1}$$

Da dies dieselbe Formel ist wie in Teilaufgabe b) und c) ist auch das Ergebnis für n dasselbe wie in c).



Aufgabe A1

Die Funktion f' ist die Ableitungsfunktion einer Funktion f . Finde eine mögliche Funktionsgleichung für f .

$f_1'(x) = 5x^4$	$f_1(x) =$
$f_2'(x) = x^2$	$f_2(x) =$
$f_3'(x) = 4$	$f_3(x) =$
$f_4'(x) = 3x^2 + 2x$	$f_4(x) =$
$f_5'(x) = 4x^3$	$f_5(x) =$
$f_6'(x) = \sqrt{x}$	$f_6(x) =$
$f_7'(x) = \frac{1}{x^2}$	$f_7(x) =$
$f_8'(x) = \sqrt[3]{2x}$	$f_8(x) =$

Aufgabe A2

Die Funktion f' ist die Ableitungsfunktion einer Funktion f . Finde eine mögliche Funktionsgleichung für f .

$f_1'(x) = (a+1)x^a$	$f_1(x) =$
$f_2'(x) = (\frac{1}{2}t - 1)x^{\frac{1}{2}t-2}$	$f_2(x) =$
$f_3'(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt[a]{x^{b-a}}$	$f_3(x) =$
$f_4'(x) = x^{\frac{a}{2}}$	$f_4(x) =$
$f_5'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$	$f_5(x) =$
$f_6'(x) = x^{-\frac{2}{3}}$	$f_6(x) =$
$f_7'(x) = 10^{-2}x^{99}$	$f_7(x) =$
$f_8'(x) = 10^3x^{999}$	$f_8(x) =$

Aufgabe A3

Ordne die nachfolgende Tabelle so, dass die Funktion f_n sowie deren 1. und 2. Ableitung (f_n' und f_n'') jeweils in einer Zeile stehen.

	f_n	f_n'	f_n''
a)	$f_1(x) = x^4$	$f_7'(x) = ax^{a-1}$	$f_{13}''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$
b)	$f_2(x) = x^{-4}$	$f_8'(x) = 4x^3$	$f_{14}''(x) = (a^2 - a)x^{a-2}$
c)	$f_3(x) = x^{\frac{1}{2}}$	$f_9'(x) = -\frac{4}{x^5}$	$f_{15}''(x) = 12x^2$
d)	$f_4(x) = x^{n+2}$	$f_{10}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f_{16}''(x) = \frac{20}{x^6}$

	f_n	f_n'	f_n''
e)	$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f_{11}'(x) = (n+2)x^{n+1}$	$f_{17}''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$
f)	$f_6(x) = x^a$	$f_{12}'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	$f_{18}''(x) = (n^2 + 3n + 2)x^n$

Lösung A1

$f_1'(x) = 5x^4$	$f_1(x) = \frac{5x^5}{5} = x^5$
$f_2'(x) = x^2$	$f_2(x) = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}x^3$
$f_3'(x) = 4$	$f_3(x) = 4x$
$f_4'(x) = 3x^2 + 2x$	$f_4(x) = x^3 + x^2$
$f_5'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$	$f_5(x) = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 5x$
$f_6'(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f_6(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x \cdot \sqrt{x}$
$f_7'(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$f_7(x) = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$
$f_8'(x) = \sqrt[3]{2x} + 2\sqrt{x} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}}$	$f_8(x) = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{2x}}{4} + \frac{4 \cdot x \cdot \sqrt{x}}{3}$

Lösung A2

$f_1'(x) = (a+1)x^a$	$f_1(x) = \frac{(a+1)x^{a+1}}{a+1} = x^{a+1}$
$f_2'(x) = (\frac{1}{2}t - 1)x^{\frac{1}{2}t-2}$	$f_2(x) = \frac{(\frac{1}{2}t - 1)x^{\frac{1}{2}t-1}}{\frac{1}{2}t - 1} = x^{\frac{1}{2}t-1}$
$f_3'(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt[a]{x^{b-a}} = \frac{b}{a} \cdot x^{\frac{b-a}{a}}$	$f_3(x) = \frac{b \cdot x^{\frac{b-a}{a}+1}}{a(\frac{b-a}{a}+1)} = \frac{b \cdot x^{\frac{b}{a}}}{b} = \sqrt[a]{x^b}$
$f_4'(x) = x^{\frac{a}{2}}$	$f_4(x) = \frac{x^{\frac{a}{2}+1}}{\frac{a}{2}+1} = \frac{x^{\frac{a+2}{2}}}{\frac{a+2}{2}} = \frac{2\sqrt{x^{a+2}}}{a+2}$
$f_5'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$	$f_5(x) = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{10}x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
$f_6'(x) = x^{-\frac{2}{3}}$	$f_6(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x}$
$f_7'(x) = 10^{-2}x^{99}$	$f_7(x) = \frac{x^{100}}{10^2 \cdot 100} = 10^{-4}x^{100}$
$f_8'(x) = 10^3x^{999}$	$f_8(x) = \frac{10^3x^{1000}}{1000} = x^{1000}$

Lösung A3

- | | |
|---|---|
| a) $f_1(x) \rightarrow f_8'(x) \rightarrow f_{15}''(x);$ | b) $f_2(x) \rightarrow f_9'(x) \rightarrow f_{16}''(x);$ |
| c) $f_3(x) \rightarrow f_{10}'(x) \rightarrow f_{17}''(x);$ | d) $f_4(x) \rightarrow f_{11}'(x) \rightarrow f_{18}''(x);$ |
| e) $f_5(x) \rightarrow f_{12}'(x) \rightarrow f_1''(x);$ | f) $f_6(x) \rightarrow f_1'(x) \rightarrow f_2''(x);$ |

Aufgabe A1

Beweise die Potenzregel $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.



Lösung A1

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Die Auflösung der binomischen $(x+h)^n$ Formel n -ten Grades erfolgt gemäß dem Binomialkoeffizienten nach:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot h^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot h^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

Wegen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist z. B. $\binom{n}{4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \frac{1}{6} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot h^3 + \dots + n \cdot x \cdot h^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
 &= \frac{x^n + h \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot h + \frac{1}{6} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots + n \cdot x \cdot h^{n-2} + h^{n-1} \right) - x^n}{h} \\
 &= n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot h + \frac{1}{6} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots + n \cdot x \cdot h^{n-2} + h^{n-1} \\
 \lim_{h \rightarrow 0} n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot h + \frac{1}{6} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots + n \cdot x \cdot h^{n-2} + h^{n-1} \\
 &= n \cdot x^{n-1}
 \end{aligned}$$

q.e.d.