Aufgabenblatt Ableitungen
zur Konstanten-, Faktor- und Potenzregel

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 25 Aufgaben

Aufgabe A1

Es sei $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Bestimme $f'(x)$ für f.

a) $f(x) = x^k$ b) $f(x) = x^{2n+1}$ c) $f(x) = x^{3k}$

d) $f(x) = x^{3-m}$ e) $f(x) = x^{2k-1+m}$ f) $f(x) = x^{-n+5}$

g) $f(x) = x^{1-3n}$ h) $f(x) = x^{-4+6k}$ i) $f(x) = x^{\frac{n}{4}}$

j) $f(x) = x^{\frac{2m-1}{5}}$ k) $f(x) = x^{\frac{n}{2k}}$ l) $f(x) = x^{\frac{m+1}{n}}$

Aufgabe A2

In welchen Punkten hat der Graph der Funktion f die Steigung m?

a) $f(x) = x^4;\ m = 4$ b) $f(x) = x^3;\ m = 12$ c) $f(x) = x^{100};\ m = \frac{100}{2^{99}}$

d) $f(x) = x^0;\ m = 1$ e) $f(x) = x^6;\ m = 18750$ f) $f(x) = x^{-1};\ m = -1$

Aufgabe A3

Untersuche:

a) Gibt es zu jeder Geraden $y = mx + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine parallele Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^n;\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0; 1\}, n$ ungerade?

b) Gibt es zu jeder Geraden $y = mx + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine parallele Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^n;\ n \in \mathbb{Z}, n$ gerade?

c) Von einem Punkt P sollen Tangenten an den Graphen von f mit $f(x) = x^{2n};\ n \in \mathbb{N}^*$ gelegt werden. Gibt es Punkte im Koordinatensystem, für die dies nicht möglich ist?

Aufgabe A4

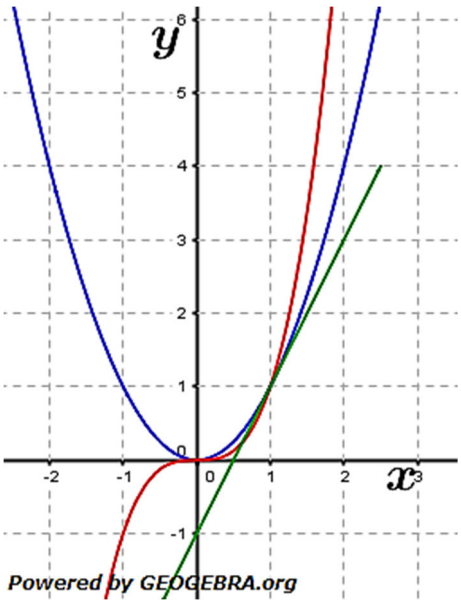
Die Graphen aller Funktionen f_n mit $f_n(x) = x^n;\ n \in \mathbb{N}^*$ schneiden sich in $P(1|1)$.

a) Bestimme die Tangentensteigungen von f_2 und f_3 in P. Berechne daraus den Schnittwinkel der beiden Tangenten.

b) Weise nach, dass im Punkt $P(1|1)$ für den Schnittwinkel der Tangenten von f_n und f_{n+1} gilt: $\tan(\alpha) = \frac{1}{n^2+n+1}$.

c) Welchen Wert muss n mindestens haben, dass sich die Graphen von f_n und f_{n+1} in $P(1|1)$ unter3 einem Winkel kleiner als 1° schneiden?

d) Die Graphen der Funktion $h_n = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}^*$ schneiden sich ebenfalls in $P(1|1)$. Führe eine zu den Teilaufgaben b) und c) analoge Betrachtung für diese Hyperbeln n-ter Ordnung durch.



Für den Schnittwinkel α zweier Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 gilt (für $m_1 > m_2$):

$$tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$

b) $f'(x) = (2n+1) \cdot x^{2n}$

c) $f'(x) = 3k \cdot x^{3k-1}$

d) $f'(x) = (3-m) \cdot x^{2-m}$

e) $f'(x) = (2k-1+m) \cdot x^{2k-2+m}$

f) $f'(x) = (5-n) \cdot x^{-n+4}$

g) $f'(x) = (1-3n) \cdot x^{-3n}$

h) $f'(x) = (-4+6k) \cdot x^{-5+6k}$

i) $f'(x) = \frac{n}{4} \cdot x^{\frac{n}{4}-1}$

j) $f'(x) = \frac{2m-1}{5} \cdot x^{\frac{2m-6}{5}}$

k) $f'(x) = \frac{n}{2k} \cdot x^{\frac{n}{2k}-1}$

l) $f'(x) = \frac{m+1}{n} \cdot x^{\frac{m+1}{n}-1}$

Lösung A2

a) $f'(x) = 4x^3;\quad 4 = 4x^3;\quad x^3 = 1;\quad x_0 = 1$
f hat in $x_0 = 1$ die Steigung $m = 4$.

b) $f'(x) = 3x^2;\quad 12 = 3x^2;\quad x^2 = 4;\quad x_1 = -2;\quad x_2 = 2$
f hat in $x_1 = -2$ und in $x_2 = 2$ die Steigung $m = 12$.

c) $f'(x) = 100x^{99};\quad \frac{100}{2^{99}} = 100x^{99};\quad x^{99} = \frac{1}{2^{99}};\quad x_0 = \frac{1}{2}$
f hat in $x_0 = \frac{1}{2}$ die Steigung $m = \frac{100}{2^{99}}$.

d) $f'(x) = 0;\quad 0 \neq 1$
f hat in keinem Punkt die Steigung $m = 1$.

e) $f'(x) = 6x^5;\quad 18750 = 6x^5;\quad x^5 = 3125;\quad x_0 = 5$
f hat in in $x_0 = 5$ die Steigung $m = 18750$.

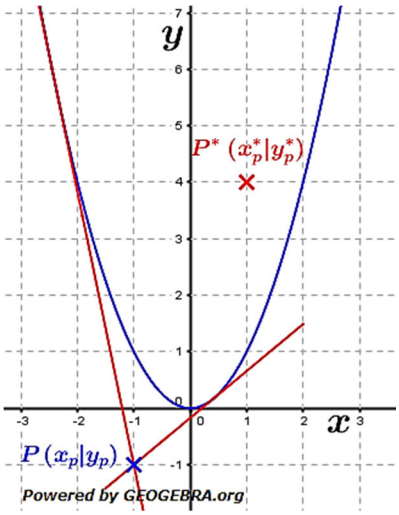
f) $f'(x) = -\frac{1}{x^2};\quad -1 = -\frac{1}{x^2};\quad x^2 = 1;\quad x_1 = -1;\quad x_2 = 1$
f hat in $x_1 = -1$ und in $x_2 = 1$ die Steigung $m = -1$.

Lösung A3

a) Es muss gelten: $m = n \cdot x^{n-1}$. Daraus folgt: $\frac{m}{n} = x^{n-1}$. Da n ungerade sein soll, ist $n-1$ eine gerade Zahl. Ist nun $\frac{m}{n} < 0$, kann die $(n-1)$-te Wurzel nicht gezogen werden. Folglich gibt es für negative Steigungen $(m < 0)$ und $n > 0$ bzw. für positive Steigungen $(m > 0)$ und $n < 0$ keine parallelen Tangenten zur Geraden $m = mx + c$.

b) Es muss gelten: $m = n \cdot x^{n-1}$. Daraus folgt: $\frac{m}{n} = x^{n-1}$. Da n gerade sein soll, ist $n-1$ eine ungerade Zahl. Die Gleichung $x^{n-1} = \frac{m}{n}$ hat daher stets eine Lösung. Folglich gibt es für alle $m \in \mathbb{R}$) parallele Tangenten an den Graphen.

c) Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir uns beispielhaft die Funktion f mit $f(x) = x^2$, eine nach oben geöffnete Normalparabel.
Liegt der Punkt P außerhalb der Öffnung, kann problemlos eine Tangente an den Graphen von f gelegt werden. Liegt der Punkt P^* jedoch innerhalb der Öffnung, ist eine Tangente an den Graphen unmöglich.
Da gemäß Aufgabenstellen $2n;\ n \in \mathbb{N}^*$ der Exponent der Funktionsgleichung stets gerade und $n \geq 2$ ist, gilt diese Betrachtung für alle diesbezüglichen Funktionen. Generell gilt: Von Punkten $P(x_0|y_0)$ mit $y_0 > x_0^{2n}$ kann keine Tangente an den Graphen von f gelegt werden.



Lösung A4

a) $f_n{}'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f_2{}'(x) = 2x$ $\qquad$ $f_3{}'(x) = 3x^2$

$f_2{}'(1) = 2$ $\qquad$ $f_3{}'(x) = 3$

$tan(\alpha) = \frac{f_3'(1) - f_2'(1)}{1 + f_3'(1) \cdot f_2'(1)} = \frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \frac{1}{7}$

$\alpha = arctan\left(\frac{1}{7}\right) = 8{,}13\,°$

b) $f_n{}'(x) = n \cdot x^{n-1};\ \ f_n{}'(1) = n$ $\qquad$ $f_{n+1}'(x) = (n+1) \cdot x^n;\ \ f_{n+1}'(1) = n+1$

$tan(\alpha) = \frac{f_{n+1}'(1) - f_n'(1)}{1 + f_{n+1}'(1) \cdot f_n'(1)} = \frac{n+1-n}{1+(n+1)\cdot n} = \frac{1}{n^2+n+1}$ $\qquad$ **q.e.d.**

c) $tan(1°) = 0{,}01746$

$\frac{1}{n^2+n+1} < 0{,}01746$

$0{,}01746(n^2+n+1) - 1 > 0$

$n^2 + n + 1 - \frac{1}{0{,}01746} > 0$

$n^2 + n - 56{,}2738 > 0$

$n_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 56{,}2738}$

$n_1 = 7{,}02;\ \ n_2 = -8{,}02$

Wegen $0{,}01746(n^2+n+1) - 1 > 0$ ist n_2 keine Lösung.

n muss mindestens den Wert 8 haben.

d) $h_n'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}};\ \ h_n{}'(1) = -n$ $\qquad$ $h_{n+1}'(x) = \frac{-(n+1)}{x^{n+2}};\ \ h_{n+1}'(1) = -(n+1)$

$tan(\alpha) = \frac{h_n'(1) - h_{n+1}'(1)}{1 + f_n'(1) \cdot f_{n+1}'(1)} = \frac{-n+(n+1)}{1-(-n)\cdot(n+1)} = \frac{1}{n^2+n+1}$

Da dies dieselbe Formel ist wie in Teilaufgabe b) und c) ist auch das Ergebnis für n dasselbe wie in c).

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de