

Aufgabenblatt Ableitungen

Differenzialrechnung

zur Konstanten-, Faktor- und Potenzregel

Level 4 – Universität – Blatt 1

Dokument mit 1 Aufgabe

Aufgabe A1

Beweise die Potenzregel $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.



Differenzialrechnung

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Konstanten-, Faktor- und Potenzregel

Lösungen

Level 4 – Universität – Blatt 1

Lösung A1

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h - x} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Die Auflösung der binomischen $(x + h)^n$ Formel n -ten Grades erfolgt gemäß dem Binomialkoeffizienten nach:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

Wegen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist z. B. $\binom{n}{4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot h^3 + \dots + n \cdot x \cdot h^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \frac{x^n + h \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot h + \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots + n \cdot x \cdot h^{n-2} + h^{n-1} \right) - x^n}{h} \\ &= n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot h + \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots + n \cdot x \cdot h^{n-2} + h^{n-1} \\ \lim_{h \rightarrow 0} &n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot h + \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots + n \cdot x \cdot h^{n-2} + h^{n-1} \\ &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

q.e.d.