Lösung A1

Differenzenquotient:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

Die Auflösung der binomischen $(x+h)^n$ Formel n-ten Grades erfolgt gemäß dem Binomialkoeffizienten nach:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

Wegen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist z. B. $\binom{n}{4} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{24} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$.

Daraus folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot h + \frac{1}{2} n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot h^2 + \frac{1}{6} n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot x^{n-3}\cdot h^3 + \cdots + n\cdot x\cdot h^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \frac{x^n + h\left(n\cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot h + \frac{1}{6} n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot x^{n-3}\cdot h^2 + \cdots + n\cdot x\cdot h^{n-2} + h^{n-1}\right) - x^n}{h}$$

$$= n\cdot x^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot h + \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot x^{n-3}\cdot h^2 + \cdots + n\cdot x\cdot h^{n-2} + h^{n-1}$$

$$\lim_{h\to 0} n\cdot x^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot h + \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot x^{n-3}\cdot h^2 + \cdots + n\cdot x\cdot h^{n-2} + h^{n-1}$$

$$= n\cdot x^{n-1}$$ **q.e.d.**