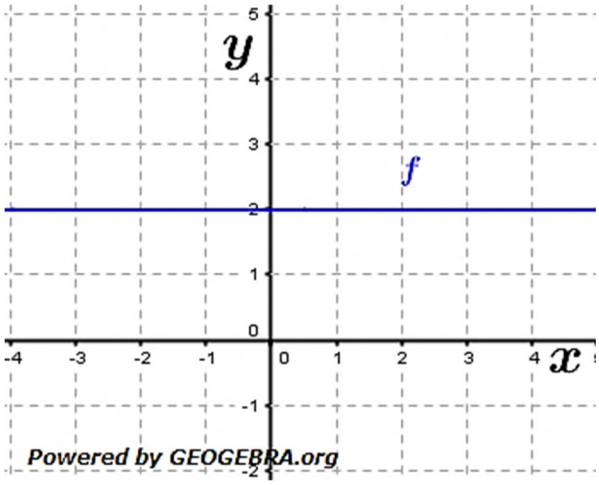
Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $P(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Die Konstantenregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = c$. Schauen wir uns den Graphen f von $f(x)$ einmal an. In nebenstehender Grafik haben wir für $c = 2$ gewählt.



Differenzenquotient:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2-2}{h} = 0$

Wir stellen wir fest, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ immer 0 ist, egal wie groß oder klein Δx ist.

Daraus folgern wir, dass $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ ist. Da $f'(x)$ gleichzeitig die Steigung der Tangente im Punkt $P(x|f(x))$ ist, hat $f(x) = 2$ in jedem Punkt $P(x|f(x))$ die Steigung 0. Was ja auch aus der Abbildung ersichtlich ist.

Merksatz

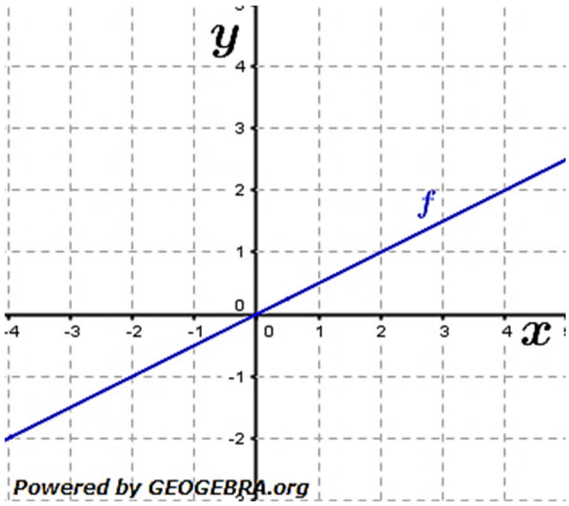
Die Konstantenregel lautet:
Eine konstante Funktion $f(x) = c;\ c \in \mathbb{R}$ besitzt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung

$$f'(x) = 0.$$

Mit anderen Worten: Konstanten fallen beim Ableiten weg.

Die Faktorregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = mx$.
In nebenstehender Grafik haben wir für $m = \frac{1}{2}$ gewählt.



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(x+h)-\frac{1}{2}x}{h} = \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \frac{1}{2}$$

Wir stellen wir fest, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ immer $\frac{1}{2}$ ist, egal wie groß oder klein Δx ist.
Daraus folgern wir, dass $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2}$ ist.
Da $f'(x)$ gleichzeitig die Steigung der Tangente im Punkt $P(x|f(x))$ ist, hat $f(x) = \frac{1}{2}x$ in jedem Punkt $P(x|f(x))$ die Steigung $\frac{1}{2}$.
Was ja auch aus der Abbildung ersichtlich ist und andererseits auch die Steigung des Graphen der Funktion (einer Geraden) ist.

Merksatz

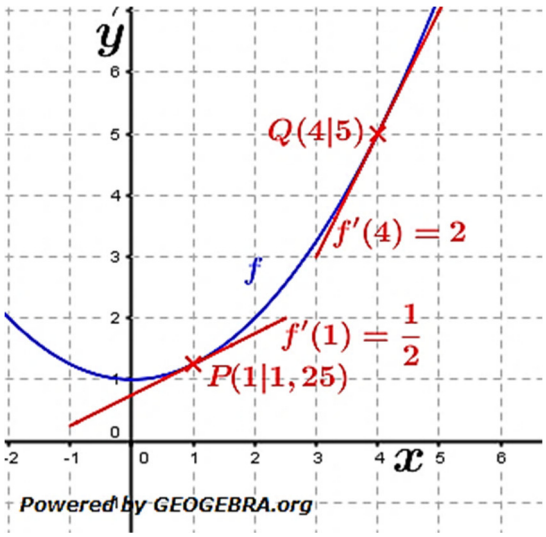
Die Faktorregel lautet:
Ist g eine differenzierbare Funktion, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x)$; $k \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = k \cdot g'(x)$$

Mit anderen Worten: Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.

Die Potenzregel (speziell)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + c$.
In nebenstehender Abbildung haben wir für a den Wert $\frac{1}{4}$ und für c den Wert 1 gewählt.
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ist somit eine Parabel.



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2+1-(\frac{1}{4}x^2+1)}{h}$$
$$= \frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}hx+\frac{1}{4}h^2+1-\frac{1}{4}x^2-1}{h} = \frac{\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{2}hx}{h} = \frac{h(\frac{1}{4}h+\frac{1}{2}x)}{h}$$
$$= \frac{1}{4}h + \frac{1}{2}x$$

Differenzialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{4}h + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

Da $f'(x)$ gleichzeitig die Steigung der Tangente im Punkt $P(x|f(x))$ ist, hat $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ in jedem Punkt $P(x|f(x))$ die Steigung $\frac{1}{2}x$.
Wollen wir nun die Steigung in einem bestimmten Punkt berechnen, so setzen wir die x-Koordinate des Punktes einfach in $f'(x)$ ein. Im Beispiel erhalten wir somit für z. B. $f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ und $f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Welche Regel leitet sich daraus ab? Nun, die Konstantenregel haben wir in diesem Beispiel schon angewandt. Die $+1$ wird zur 0. Nach der Faktorregel muss die $\frac{1}{4}$ bei x^2 jedoch erhalten bleiben. Um aus $\frac{1}{4}$ die $\frac{1}{2}$ zu machen, müssen wir $\frac{1}{4}$ mit 2 multiplizieren. Diese 2 finden wir aber in der Potenz von x^2. Weiterhin ist das ^{2} in der Ableitung jedoch verschwunden und ist dort zu einer ^{1} geworden, denn x ist gleichbedeutend mit x^1. Es sieht offensichtlich so aus, dass bei der Ableitung von Potenzen der Faktor bei der Variablen x mit der Potenz von x multipliziert wird und die Potenz um 1 verringert wird.

Und genau das ist die Potenzregel für die Ableitung. Hier noch einmal das allgemeine Schema:

Aus der Funktionsgleichung erhält man deren Ableitung, indem der ursprüngliche Exponent mit dem Term multipliziert und dann der Exponent um 1 verringert wird.

$$f(x) = ax^n$$

$$f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

Merksatz

Die Potenzregel (speziell) lautet:
Die Funktion $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, ist differenzierbar und es gilt

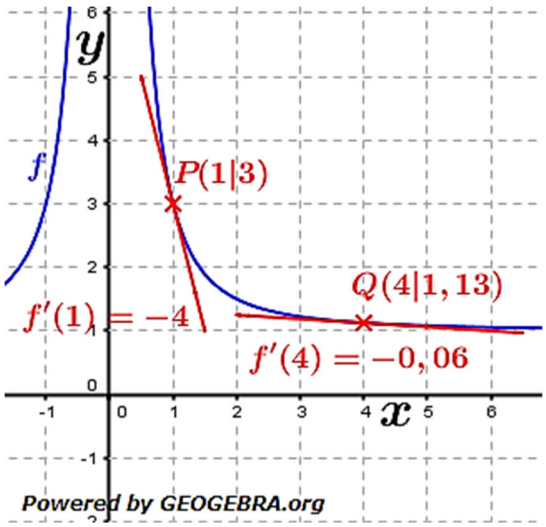
$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Die Potenzregel (allgemein)

Nun gibt es ja auch Potenzfunktionen mit negativen Hochzahlen und sogar mit rationalen Hochzahlen. Betrachten wir uns zunächst einmal solche mit negativen Hochzahlen.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{x^2} + c$.

In nebenstehender Abbildung haben wir für a den Wert 2 und für c den Wert 1 gewählt. Die Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$. Nach den Potenzregeln können wir auch schreiben $f(x) = 2x^{-2} + 1$.



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{2}{(x+h)^2}+1-\left(\frac{2}{x^2}+1\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{2}{(x+h)^2}-\frac{2}{x^2}}{h} = \frac{\frac{2x^2-2(x+h)^2}{x^2\cdot(x+h)^2}}{h} = \frac{2x^2-(2x^2+4hx+2h^2)}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2}$$

$$= \frac{-2h^2-4hx}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2} = \frac{-2h(h+2x)}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2} = \frac{-2(h+2x)}{x^2\cdot(x+h)^2}$$

Differenzialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2(h+2x)}{x^2\cdot(x+h)^2} = \frac{-4x}{x^4} = -\frac{4}{x^3}$$

Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ ist somit $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

Wie kommen wir nun aber mit der Potenzregel zu dieser Lösung?

Wir haben ja $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ mit Hilfe der Potenzregeln umgeformt zu $f(x) = 2x^{-2} + 1$. Nun können wir problemlos die Potenzregel anwenden, wir multiplizieren den Term

$2x^{-2}$ mit seinem Exponenten und vermindern dann die den Exponenten um 1, erhalten also $-2 \cdot 2x^{-3} = -4x^{-3}$. Nun formen wir die negative Hochzahl nach den Potenzregeln wieder um zu einer positiven Hochzahl und erhalten $-\frac{4}{x^3}$, denselben Ausdruck, den wir auch über den Differenzialquotienten erhalten haben. Das absolute Glied 1 der ursprünglichen Funktionsgleichung ist nach der Konstantenregel ja weggefallen. Somit lautet die Ableitung von $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$

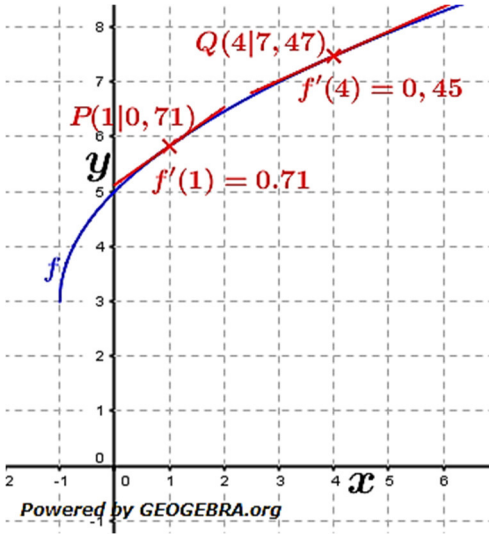
$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}$$

Neben negativen Hochzahlen haben Potenzfunktionen auch rationale Potenzen.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sqrt{x+1} + c$.

In nebenstehender Abbildung haben wir für a den Wert 2 und für c den Wert 3 gewählt. Die Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 3$. Nach den Potenzregeln können wir auch schreiben

$f(x) = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + 3$.



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2\sqrt{x+h+1}+3-\left(2\sqrt{x+1}+3\right)}{h}$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1})}{h}$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$
$$= \frac{2\left(x+h+1-(x+1)\right)}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{2h}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{2}{(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$

Differenzialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2}{(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 3$ ist somit $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Wie kommen wir nun aber mit der Potenzregel zu dieser Lösung?

Wir haben ja $2\sqrt{x+1} + 3$ mithilfe der Potenzregeln umgeformt zu $f(x) = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + 3$. Nun können wir problemlos die Potenzregel anwenden, wir multiplizieren den Term $2(x+1)^{\frac{1}{2}}$ mit seinem Exponenten und vermindern dann die den Exponenten um 1, erhalten also $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$. Nun formen wir die negative Hochzahl nach den Potenzregeln wieder um zu einer positiven Hochzahl, erhalten $\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$, und formen den Exponenten $\frac{1}{2}$ weiter um nach den Potenzregeln, und erhalten den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, den wir auch über den Differenzialquotienten erhalten haben. Das absolute Glied 3 der ursprünglichen Funktionsgleichung ist nach der Konstantenregel ja weggefallen. Somit lautet die Ableitung von $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 3$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Merksatz

Die Potenzregel (allgemein) lautet:
Die Funktion $f(x) = x^q;\ q \in \mathbb{Q};\ q = \frac{a}{b}, a; b \in \mathbb{Z}^*$ *ist differenzierbar und es gilt:*

$$f'(x) = q \cdot x^{q-1}.$$