Aufgabenblatt

Logarithmische Differentiation

Level 4 – Universität – Blatt 1

Dokument mit 13 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen der Funktionen mithilfe logarithmischer Differentiation.

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 3^{x+2}$ c) $f(x) = 3^{x^2}$

d) $f(x) = x^{3x}$ e) $f(x) = x^{2x-1}$ f) $f(x) = \sin(x)^x$

Aufgabe A2

Mithilfe logarithmischer Differentiation ist abzuleiten.

a) $f(x) = sin\,(x)^{x-4}$ b) $f(x) = x^{sin\,(x)}$ c) $f(x) = x^{sin(x)+3}$

d) $f(x) = \sqrt[x]{x}$ e) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Aufgabe A3

Bilde die Ableitungen der Funktionen mithilfe logarithmischer Differentiation.

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot sin^4(x) \cdot cos^2(x)$

Lösung A1

a) $f(x) = 3^x$ | ln

$\ln(f(x)) = x \cdot ln(3)$ | ableiten

$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln(3)$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = ln(3) \cdot 3^x$

b) $f(x) = 3^{x+2}$ | ln

$ln(f(x)) = (x+2) \cdot ln(3)$ | ableiten

$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln(3)$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = ln(3) \cdot 3^{x+2}$

c) $f(x) = 3^{x^2}$ | ln

$ln(f(x)) = x^2 \cdot ln(3)$ | ableiten

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \cdot ln(3)$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = 2x \cdot ln(3) \cdot 3^{x^2}$

d) $f(x) = x^{3x}$ | ln

$ln(f(x)) = 3x \cdot ln(x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = 3x$ | $u' = 3$

$v = ln(x)$ | $v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3 \cdot ln(x) + 3$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = 3x^{3x}(ln(x) + 1)$

e) $f(x) = x^{2x-1}$ | ln

$ln(f(x)) = (2x-1) \cdot ln(x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = 2x - 1$ | $u' = 2$

$v = ln(x)$ | $v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln(x) + \frac{2x-1}{x}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = x^{2x-1}\left(2ln(x) + 2 - \frac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = \sin^x(x)$ | ln

$ln\,(f(x)) = x \cdot ln\,(si\,n(x))$ | ableiten nach Produktregel

$u = x$ | $u' = 1$

$v = ln\,(sin(x))$ | $v' = \frac{cos\,(x)}{sin\,(x)}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln\,(sin(x)) + x \cdot \frac{cos\,(x)}{sin\,(x)}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \left(ln(sin(x)) + x \cdot \frac{cos(x)}{sin(x)}\right) \cdot sin^x(x)$

Lösung A2

a) $f(x) = sin\,(x)^{x-4}$ | ln

$ln\,(f(x)) = (x-4) \cdot ln\,(si\,n(x))$ | ableiten nach Produktregel

$u = x - 4$ $\quad u' = 1$

$v = ln\,(sin\,(x))$ $\quad v' = \frac{cos\,(x)}{sin\,(x)}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln\,(si\,n(x)) + (x-4)\frac{cos\,(x)}{sin\,(x)}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \left(ln\,(si\,n(x)) + (x-4)\frac{cos\,(x)}{sin\,(x)}\right) \cdot sin\,(x)^{x-4}$

b) $f(x) = x^{sin\,(x)}$ | ln

$ln\,(f(x)) = sin\,(x) \cdot ln\,(x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = sin\,(x)$ $\quad u' = cos\,(x)$

$v = ln\,(x)$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = cos\,(x) \cdot ln\,(x) + \frac{1}{x} \cdot sin\,(x)$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \left(cos\,(x) \cdot ln\,(x) + \frac{1}{x} \cdot sin\,(x)\right) \cdot x^{sin\,(x)}$

c) $f(x) = x^{si\,n(x)+3}$ | ln

$ln\,(f(x)) = (si\,n(x) + 3) \cdot ln\,(x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = si\,n(x) + 3$ $\quad u' = cos\,(x)$

$v = ln\,(x)$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = cos\,(x) \cdot ln\,(x) + \frac{1}{x} \cdot (si\,n(x) + 3)$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \left(cos\,(x) \cdot ln\,(x) + \frac{\sin(x)+3}{x}\right) \cdot x^{si\,n(x)+3}$

d) $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ | ln

$ln\,(f(x)) = \frac{1}{x} \cdot ln\,(x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = \frac{1}{x}$ $\quad u' = -\frac{1}{x^2}$

$v = ln\,(x)$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{ln\,(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{ln\,(x)}{x^2}\right) \cdot \sqrt[x]{x}$

$f'(x) = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - ln(x))$

e) $f(x) = x^{\sqrt{x}} = x^{x^{\frac{1}{2}}}$ | ln

$ln\,(f(x)) = x^{\frac{1}{2}} \cdot ln\,(x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = ln\,(x)$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot x^{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\cdot\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2} ln(x) + 1\right) = x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} ln(x) + 1\right)$

Lösung A3

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-2)^{-\frac{1}{2}}$ | ln

$ln\,(f(x)) = ln\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$ln(f(x)) = \ln\,(x^{\frac{1}{2}}) + ln(x-1)^{\frac{1}{2}} + ln(x-2)^{-\frac{1}{2}}$

$ln(f(x)) = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2} ln(x-1) - \frac{1}{2} ln\,(x-2)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2 \cdot (x-1)} - \frac{1}{2(x-2)}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}\right)$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}} \cdot \frac{(x-1)(x-2) + x(x-2) - x(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}} \cdot \frac{(x-1)(x-2) + x(x-2) - x(x-1)}{\sqrt{x^2(x-1)^2(x-2)^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x(x-1)}{x^2(x-1)^2(x-2)^3}} \cdot \big((x-1)(x-2) + x(x-2) - x(x-1)\big)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x(x-1)(x-2)^3}} \cdot \big((x-1)(x-2) + x(x-2) - x(x-1)\big)$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot sin^4(x) \cdot cos^2(x)$ | ln

$$ln\,(f(x)) = ln\left(\sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot sin^4(x) \cdot cos^2(x)\right)$$

$$ln\big(f(x)\big) = ln\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + ln(1-x) - ln(1+x^2) + ln\,(sin^4(x)) + ln\,(cos^2(x))$$

$$ln\big(f(x)\big) = \frac{2}{3}ln(x) + ln(1-x) - ln\,(1+x^2) + 4ln\,(sin(x)) + 2ln\,(cos(x))$$ | ableiten

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4\,cos(x)}{sin(x)} - \frac{2sin\,(x)}{cos\,(x)}$$ | $\cdot f(x)$

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot sin^4(x) \cdot cos^2(x) \cdot \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4\,cos(x)}{sin(x)} - \frac{2\,sin(x)}{cos(x)}\right)$$