Aufgabe A1

Mithilfe logarithmischer Differentiation ist abzuleiten.

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}$

b) $f(x) = (x+a)^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 \cdot e^x \cdot \ln(x)$

c) $f(x) = (2x)^{sin\,(x)};\ \ x > 0$

d) $f(x) = x^{\frac{1}{x}};\ \ x > 0$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen der Funktionen mithilfe logarithmischer Differentiation.

a) $f(x) = x^a \cdot a^x;\ \ x; a > 0$

b) $f(x) = x^{sin\,(x)}$

c) $f(x) = u(x)^{u(x)};\ \ u > 0$

d) $f(x) = u^v$ mit $u = ax^m;\ \ v = \ln(x^2);\ \ a; x > 0$

e) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\tan(x)};\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Lösung A1

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}$ | ln

$\ln(f(x)) = \ln\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}\right)$

$\ln(f(x)) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x)$ | ableiten

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3x} - \frac{2}{3(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right)$

b) $f(x) = (x+a)^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 \cdot e^x \cdot \ln(x)$ | ln

$ln(f(x)) = \ln\left((x+a)^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 \cdot e^x \cdot ln(x)\right)$

$ln(f(x)) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x+a) + 2\ln(x) + x + \ln(\ln(x))$

| ableiten

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x+a)} + \frac{2}{x} + 1 + \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = (x+a)^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 \cdot e^x \cdot \ln(x) \cdot \left(\frac{1}{2(x+a)} + \frac{2}{x} + 1 + \frac{1}{x \cdot \ln(x)}\right)$

c) $f(x) = (2x)^{sin(x)};\ x > 0$ | ln

$ln(f(x)) = \sin(x) \cdot \ln(2x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = \sin(x)$ | $u' = \cos(x)$

$v = ln(2x)$ | $v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos(x) \cdot ln(2x) + \frac{\sin(x)}{x}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = (2x)^{sin(x)} \cdot \left(\cos(x) \cdot ln(2x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)$

d) $f(x) = x^{\frac{1}{x}};\ x > 0$ | ln

$ln(f(x)) = \frac{1}{x} \cdot ln(x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = \frac{1}{x}$ | $u' = -\frac{1}{x^2}$

$v = ln(x)$ | $v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \cdot ln(x) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln(x)) = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln(x))$

Lösung A2

a) $f(x) = x^a \cdot a^x;\ \ x; a > 0$ | ln

$ln\big(f(x)\big) = ln(x^a \cdot a^x) = a \cdot \ln(x) + x \cdot \ln(a)$

| ableiten

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{x} + ln(a)$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = x^a \cdot a^x \left(\frac{a}{x} + ln(a)\right)$

$f'(x) = x^{a-1} \cdot a^x (x \cdot ln(a) + a)$

b) $f(x) = u(x)^{v(x)};\ \ u > 0$ | ln

$ln\,(f(x)) = v(x) \cdot \ln\,(u(x))$ | ableiten nach Produktregel

$u = v(x)$ $\qquad u' = v'(x)$

$v = ln\,(u(x))$ $\qquad v' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \cdot ln\,(u(x)) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot l\,n\big(u(x)\big) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)\right)$

c) $f(x) = u^v$ mit $u = ax^m;\ \ v = \ln(x^2) = 2\ln\,(x)$

$f(x) = (ax^m)^{2\ln\,(x)}$ | ln

$ln\,(f(x)) = 2\ln\,(x) \cdot \big(lna + mln(x)\big)$ | ableiten nach Produktregel

$u = 2\ln\,(x)$ $\qquad u' = \frac{2}{x}$

$v = lna + mln(x)$ $\qquad v' = \frac{m}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2(\ln(a) + m \cdot l\,n(x))}{x} + \frac{2m \cdot \ln\,(x)}{x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2ln\,(a) + 4m \cdot ln\,(x)}{x}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = 2 \cdot (ax^m)^{ln\,(x^2)} \cdot \left(\frac{ln\,(a) + 2m \cdot ln\,(x)}{x}\right)$

d) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\tan(x)} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\tan(x)} = x^{\frac{tan(x)}{2}} =$ | ln

$ln\,(f(x)) = \frac{1}{2}\tan(x) \cdot ln\,(x)$ | ableiten nach Produktregel

$u = \frac{1}{2}\tan(x)$ $\quad u' = \frac{1}{2\cos^2(x)}$

$v = ln\,(x)$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$\frac{f\prime(x)}{f(x)} = \frac{\ln(x)}{2\cos^2(x)} + \frac{\tan(x)}{2x}$ | $\cdot f(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{\tan(x)} \cdot \left(\frac{\ln(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\tan(x)}{x}\right)$