Die Produkt- und Quotientenregel

Inhaltsverzeichnis zur Produkt- und Quotientenregel

Kapitel mit 230 Aufgaben

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Bisher haben wir die einfachsten Ableitungsregeln kennengelernt. Jetzt gibt es aber auch aus einzelnen Produkten bzw. Quotienten zusammengesetzte Funktionsgleichung wie etwa $f(x) = (2x+3)^4 \cdot (e^{-x} + x)$ oder auch $g(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$.
Im ersteren Falle könnten wir zwar durch Ausmultiplizieren einzelne Funktionsglieder erhalten, die wir mit den bekannten Regeln ableiten könnten, allerdings wäre dies eine sehr umständliche Vorgehensweise. Im zweiten Fall ist ein Ausmultiplizieren nicht möglich.
Um derart gestaltete Funktionen ableiten zu können, existieren zwei zusätzliche Regeln, nämlich die Produktregel und die Quotientenregel. Wie der Name schon sagt, wird die Produktregel für Produkte und die Quotientenregel für eben Quotienten eingesetzt.

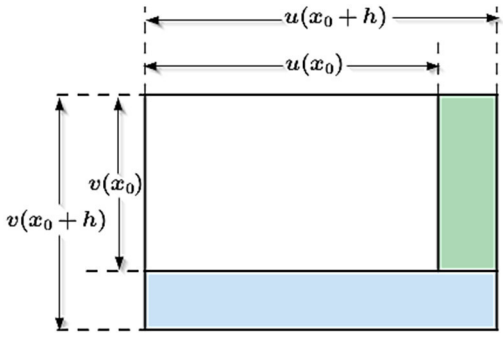
Die Produktregel

Mit zwei Funktionen u und v können wir ein Produkt bilden. Mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = x^3$ erhalten wir f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5$.
Während Summen von Funktionen gliedweise abgeleitet werden, gilt das für Produkte nicht. So hat unser Beispiel $f(x) = x^5$ die Ableitung $f'(x) = 5x^4$.
Würden wir nun $u(x)$ und $v(x)$ einzeln ableiten und dann erst multiplizieren, erhielten wir mit $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = 3x^2$ aus $f'(x) = u'(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^4$ ein ganz anderes (***falsches***) Ergebnis.
Wollen wir also die Ableitung eines Produkts $f = u \cdot v$ zweier Funktionen u und v bestimmen, deren Ableitung wir kennen, so müssen wir den Differenzenquotienten von f auf die Differenzenquotienten von u und v zurückführen. Es ist also

$$(*)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{u(x_0+h) \cdot v(x_0+h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

Wir deuten nun die beiden Produkte im Zähler $u(x_0+h) \cdot v(x_0+h)$ und $u(x_0) \cdot v(x_0)$ als Flächeninhalte von Rechtecken mit den Seitenlängen $u(x_0+h)$ und $v(x_0+h)$ bzw. den Seitenlängen $u(x_0)$ und $v(x_0)$. Wir erhalten dadurch eine Idee für eine mögliche Umformung der Differenz

$$u(x_0+h) \cdot v(x_0+h) - u(x_0) \cdot v(x_0).$$



Die Subtraktion der beiden Rechteckflächen $u(x_0+h)\cdot v(x_0+h)-u(x_0)\cdot v(x_0)$ lässt sich umformen zu:

$$u(x_0+h)\cdot v(x_0+h)-u(x_0)\cdot v(x_0)=\big(u(x_0+h)-u(x_0)\big)\cdot v(x_0)+u(x_0+h)\cdot\big(v(x_0+h)-v(x_0)\big)$$

Für den Differenzenquotienten $(*)$ gilt damit:

$$\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}=\underbrace{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}}\cdot v(x_0)+u(x_0+h)\cdot\underbrace{\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}$$

Für $h\longrightarrow 0$ ist

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\quad=\quad u'(x_0)\quad\cdot\quad v(x_0)\quad+\quad u(x_0)\quad\cdot\quad v'(x_0)$$

Merksatz Produktregel

Die Produktregel lautet:
Sind zwei Funktionen u und v differenzierbar, so ist auch die Funktion $f=u\cdot v$ mit $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ differenzierbar und es gilt:

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

Ohne auf den mathematischen Beweis einzugehen, lässt sich die Produktregel auch auf mehr als nur zwei Funktionen u und v erweitern. Für drei Funktionen u, v und w ergibt sich f zu $f(x)=u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$. die Ableitung nach der Produktregel lautet dann:

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

Diese Erweiterung lässt sich auf eine beliebige Anzahl von multiplikativ verknüpften Einzelfunktionen ausdehnen.

<u>Beispiel 1:</u>

Bestimme die Ableitungen der Funktionen f und g mit $f(x)=(x^3+1)\cdot\cos(x)$ und $g(x)=2\cdot\sqrt{x}\cdot(1-x)$.

<u>Lösung 1:</u>

$f(x)=(x^3+1)\cdot\cos(x)$
$u(x)=x^3+1$ $\qquad u'(x)=3x^2$
$v(x)=\cos(x)$ $\qquad v'(x)=-sin(x)$
$f'(x)=u'v+uv'=3x^2\cdot cos(x)-(x^3+1)\cdot sin(x)$

$g(x)=2\cdot\sqrt{x}\cdot(1-x)$
$u(x)=2\cdot\sqrt{x}$ $\qquad u'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}$
$v(x)=1-\mathrm{x}$ $\qquad v'(x)=-1$
$f'(x)=u'v+uv'=-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(1-\mathrm{x})-2\sqrt{x}$

<u>Beispiel 2:</u>

Bestimme die Ableitung der Funktion f mit $f(x)=5x\cdot(1-x)^2$.

<u>Lösung 2:</u>

$f(x)=5x\cdot(1-x)^2$
$u(x)=5x$ $\qquad u'(x)=5$
$v(x)=(1-x)^2$ $\qquad v'(x)=-2(1-x)$
$f'(x)=u'v+uv'=5\cdot(1-x)^2+5x\cdot\big(-2(1-x)\big)=5\cdot(1-x)\cdot(1-x-2x)$
$\quad=5(1-x)\cdot(1-3x)$

Die Quotientenregel

Mit zwei Funktionen u und v können wir einen Quotienten bilden. Mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = x^3$ erhalten wir f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$.
Während Summen von Funktionen gliedweise abgeleitet werden, gilt das für Quotienten nicht. So hat unser Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ die Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Würden wir nun $u(x)$ und $v(x)$ einzeln ableiten und dann erst dividieren, erhielten wir mit $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = 3x^2$ aus $f'(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x}$ ein ganz anderes (***falsches***) Ergebnis.

Um Quotienten von Funktionen ableiten zu können, fassen wir $f = \frac{u}{v}$ als Produkt zweier Funktionen auf mit $f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$. Auf diese Weise können wir f nach den uns bislang bekannten Regeln ableiten. Die Funktion k mit $k(x) = \frac{1}{v(x)} = v^{-1}(x)$ hat nach der Kettenregel die Ableitung $k'(x) = -v^{-2}(x) \cdot v'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.
Mithilfe der Produktregel ergibt sich dann für $f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$:

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \left(-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Merksatz Quotientenregel

Die Quotientenregel lautet:
Sind zwei Funktionen u und v differenzierbar, so ist auch die Funktion $f = \frac{u}{v}$ mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Beispiel:
Bestimme die Ableitungen der Funktionen f

a) $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{(3-x)^2}$.

Lösung:

a) $f(x) = \frac{2x}{1-x}$

$u(x) = 2x$ $u'(x) = 2$
$v(x) = 1 - x$ $v'(x) = -1$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2(1-x) - 2x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2-2x+2x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

b) $f(x) = \frac{x-1}{(3-x)^2}$

$u(x) = x - 1$ $u'(x) = 1$
$v(x) = (3-x)^2$ $v'(x) = -2(3-x)$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{(3-x)^2 - (x-1) \cdot (-2(3-x))}{(3-x)^4} = \frac{(3-x) + 2(x-1)}{(3-x)^3} = \frac{1+x}{(3-x)^3}$$

Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Produktregel und vereinfache so weit wie möglich.

$f_1(x) = x^2 \cdot (x-1)$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = x \cdot (x-1)^2$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = (2x^2 - 5x) \cdot (x-6)$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = (x^2 - 2x) \cdot (x^2 + 2x + 1)$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = (2-x) \cdot (x^2 - 1)$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 3\right) \cdot (t-1)$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = t^2 \cdot sin(t)$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Produktregel und vereinfache so weit wie möglich.

$f_1(x) = (4x-3)(3x-2)$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = (3-4x)(6-5x)$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = (3x^2 - 2)(x^3 - 1)$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = (-4x^2 + 3)(x^2 + 5)$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = 3x^2 \cdot (2 - x^2)$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = (t + 2t^2) \cdot t^2$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = (1 - t^2)(2t + 3t^2 - 5)$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A3

Drei der sechs Ableitungen wurden falsch abgeleitet. Suche den Fehler und korrigiere.

$f_1(x) = (12x-5)(1-3x^2)$	$f_1'(x) = (12x-5)(-6x) + 12 \cdot (1-3x^2)$
$f_2(x) = (2x+1)(3x+1)$	$f_2'(x) = 2 \cdot 3 + (2x+1) \cdot 3$
$f_3(x) = x^4 \cdot (3x+10)$	$f_3'(x) = 4x^3 \cdot 3$
$f_4(x) = 0{,}5x^5 \cdot (2-4x^3)$	$f_4'(x) = 2{,}5x^4 \cdot (2-4x^3) - 6x^7$
$f_5(x) = 4x^2 \cdot (12 + x^2)$	$f_5'(x) = 4x(12 + x^2) + 4x^4$
$f_6(t) = (5x^3 - 2x) \cdot x$	$f_6'(t) = (5x^3 - 2x) + x \cdot (15x^2 - 2)$

Lösung A1

$f_1(x) = x^2 \cdot (x-1)$	$f_1'(x) = 2x \cdot (x-1) + x^2 = 3x^2 - 2x$
$f_2(x) = x \cdot (x-1)^2$	$f_2'^{(x)} = (x-1)^2 + 2x \cdot (x-1) = 3x^2 - 4x + 1$
$f_3(x) = (2x^2 - 5x) \cdot (x-6)$	$f_3'(x) = (4x-5) \cdot (x-6) + 2x^2 - 5x = 6x^2 - 34x + 30$
$f_4(x) = (x^2 - 2x) \cdot (x^2 + 2x + 1)$	$f_4'(x) = (2x+2)(x^2+2x+1) + (x^2-2x)(2x+2)$ $= 2(2x^3 + 3x^2 + x + 1)$
$f_5(x) = (2-x) \cdot (x^2 - 1)$	$f_5'(x) = -(x^2-1) + (2-x) \cdot 2x = -3x^2 + 4x + 1$
$f_6(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 3\right) \cdot (t-1)$	$f_6'(t) = t \cdot (t-1) + \frac{1}{2}t^2 + 3 = \frac{3}{2}t^2 - t + 3$
$f_7(t) = t^2 \cdot sin(t)$	$f_7'(t) = 2t \cdot sin(t) + t^2 \cdot cos(t) = t \cdot \left(2\,sin(t) + tcos(t)\right)$

Lösung A2

$f_1(x) = (4x-3)(3x-2)$	$f_1'(x) = 4 \cdot (3x-2) + 3 \cdot (4x-3) = 24x - 17$
$f_2(x) = (3-4x)(6-5x)$	$f_2'^{(x)} = -4 \cdot (6-5x) - 5 \cdot (3-4x) = 40x - 39$
$f_3(x) = (3x^2 - 2)(x^3 - 1)$	$f_3'(x) = 6x \cdot (x^3 - 1) + 3x^2 \cdot (3x^2 - 2) = 3x \cdot (5x^3 - 2(1+x))$
$f_4(x) = (-4x^2 + 3)(x^2 + 5)$	$f_4'(x) = -8x \cdot (x^2 + 5) + 2x \cdot (-4x^2 + 3) = -16x^3 - 34x$
$f_5(x) = 3x^2 \cdot (2 - x^2)$	$f_5'(x) = 6x \cdot (2 - x^2) - 6x^3 = 12x(-x^2 + 1)$
$f_6(t) = (t + 2t^2) \cdot t^2$	$f_6'(t) = 2t \cdot (t + 2t^2) + (1 + 4t) \cdot t^2 = t^2 \cdot (8t + 3)$
$f_7(t) = (1 - t^2)(2t + 3t^2 - 5)$	$f_7'(t) = -2t \cdot (2t + 3t^2 - 5) + (2 + 6t) \cdot (1 - t^2)$ $= -12t^3 - 6t^2 + 16t + 2$

Lösung A3

$f_1(x) = (12x - 5)(1 - 3x^2)$	$f_1'(x) = (12x - 5)(-6x) + 12 \cdot (1 - 3x^2)$
$f_2(x) = (2x + 1)(3x + 1)$	$\cancel{f_2'(x) = 2 \cdot 3 + (2x + 1) \cdot 3}$ $f_2'(x) = 2 \cdot (3x + 1) + 3 \cdot (2x + 1)$
$f_3(x) = x^4 \cdot (3x + 10)$	$\cancel{f_3'(x) = 4x^3 \cdot 3}$ $f_3'(x) = 4x^3 \cdot (3x + 10) + 3x^4$
$f_4(x) = 0{,}5x^5 \cdot (2 - 4x^3)$	$f_4'(x) = 2{,}5x^4 \cdot (2 - 4x^3) - 6x^7$
$f_5(x) = 4x^2 \cdot (12 + x^2)$	$\cancel{f_5'(x) = 4x(12 + x^2) + 4x^4}$ $f_5'(x) = 8x(12 + x^2) + 8x^3$
$f_6(t) = (5x^3 - 2x) \cdot x$	$f_6'(t) = (5x^3 - 2x) + x \cdot (15x^2 - 2)$

Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Dokument mit 24 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen $f_n(x)$ mit Hilfe der Produktregel.

$f_1(x) = (3x-2)\cdot(x^2-1)$	$f_1{}'(x) =$
$f_2(x) = (3-x^2)\cdot(x^2-2)$	$f_2{}'(x) =$
$f_3(x) = (x-1)^2\cdot(x+1)^2$	$f_3{}'(x) =$
$f_4(x) = (2x^3-2x)\cdot\frac{1}{x}$	$f_4{}'(x) =$
$f_5(x) = (5x^2-3)\cdot(-x^2)$	$f_5{}'(x) =$
$f_6(x) = (x^2-3x)\cdot 4x^3$	$f_6{}'(x) =$
$f_7(x) = (x-20)^5\cdot(x+10)^{-2}$	$f_7{}'(x) =$
$f_8(x) = (x^2-x+2)\cdot\sin(t)$	$f_8{}'(x) =$
$f_9(x) = (3x^3+4)\cdot\frac{1}{x^2}$	$f_9{}'(x) =$

Aufgabe A2

Ordne den gegebenen Ableitungsfunktionen $f_n{}'(x)$ ihre ursprüngliche Ausgangsfunktion $f_n(x)$ zu.

$f_1'(x) = \frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}}$	$f_{10}(x) = (4x^2-3x)\cdot x$
$f_2'(x) = cos^2(x) - sin^2(x)$	$f_{11}(x) = (x^2-2x)\cdot sin(x+2)$
$f_3'(x) = -\pi\, sin(x-3)\cdot(x^2-2) + 2\pi x\cdot cos(x-3)$	$f_{12}(x) = (5x^3+x^2-4)\cdot\frac{1}{x}$
$f_4{}'(x) = 3\cdot(4-3x)^{-2} + 3\cdot(4-3x)^{-1}$	$f_{13}(x) = (5x^4-4x^3)\cdot\frac{a}{x^2}$
$f_5'(x) = -5x^4\cdot(x+3)^2 - 2x^5\cdot(x+3)$	$f_{14}(x) = -x^5\cdot(x+3)^2$
$f_6'(x) = (20x^3-12x^2)\cdot\frac{a}{x^2} - 2(5x^4-4x^3)\cdot\frac{a}{x^3}$	$f_{15}(x) = (4-3x)^{-1}\cdot(3x-4)$
$f_7'(x) = (15x^2+2x)\cdot\frac{1}{x} - (5x^3+x^2-4)\cdot\frac{1}{x^2}$	$f_{16}(x) = \pi cos(x-3)\cdot(x^2-2)$
$f_8'(x) = (2x-2)\cdot sin(x+2) + (x^2-2x)\cdot cos(x+2)$	$f_{17}(x) = sin(x)\cdot cos(x)$
$f_9'(x) = (8x-3)\cdot x + (4x^2-3x)$	$f_{18}(x) = 0{,}5\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{2}}$

Aufgabe A3

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Produktregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

a) $f(x) = 2x^3 \cdot 4x^2$

b) $f(x) = x^3 \cdot (2x^2 - 4)$

c) $f(x) = 2(x^3 - x)(x^2 + x)$

d) $f(x) = (x - 1)(x - k)^2$

e) $f(x) = 2ax(x - a)^2$

f) $f(x) = 2x \cdot (x^2 + 2)$

Lösung A1

$f_1(x) = (3x-2)\cdot(x^2-1)$	$f_1{}'(x) = x\cdot(x^2-1) + 2x\cdot(3x-2)$
$f_2(x) = (3-x^2)\cdot(x^2-2)$	$f_2{}'(x) = -2x\cdot(x^2-2) + 2x\cdot(3-x^2)$
$f_3(x) = (x-1)^2\cdot(x+1)^2$	$f_3{}'(x) = 2(x-1)\cdot(x+1) + 2(x+1)\cdot(x-1)^2$
$f_4(x) = (2x^3-2x)\cdot\frac{1}{x}$	$f_4{}'(x) = (6x-2)\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cdot(2x^3-2x)$
$f_5(x) = (5x^2-3)\cdot(-x^2)$	$f_5{}'(x) = 10x\cdot(-x^2) - 2x\cdot(5x^2-3)$
$f_6(x) = (x^2-3x)\cdot 4x^3$	$f_6{}'(x) = (2x-3)\cdot 4x^3 + 12x^2\cdot(x^2-3x)$
$f_7(x) = (x-20)^5\cdot(x+10)^{-2}$	$f_7{}'(x) = 5(x-20)^4\cdot(x+10)^{-2} - 2(x+10)^{-3}\cdot(x-20)^5$
$f_8(x) = (x^2-x+2)\cdot\sin(t)$	$f_8{}'(x) = 2x-1$
$f_9(x) = (3x^3+4)\cdot\frac{1}{x^2}$	$f_9{}'(x) = 9x^2\cdot\frac{1}{x^2} - 2(3x^3+4)\cdot\frac{1}{x^3} = 9-6-\frac{4}{x^3} = 3-\frac{8}{x^3}$

Lösung A2

$f_1'(x) = \frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}}$	$f_{18}(x) = 0{,}5\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{2}}$
$f_2'(x) = cos^2(x) - sin^2(x)$	$f_{17}(x) = sin(x)\cdot cos(x)$
$f_3'(x) = -\pi\, sin(x-3)\cdot(x^2-2) + 2\pi x\cdot cos(x-3)$	$f_{16}(x) = \pi cos(x-3)\cdot(x^2-2)$
$f_4{}'(x) = 3\cdot(4-3x)^{-2} + 3\cdot(4-3x)^{-1}$	$f_{15}(x) = (4-3x)^{-1}\cdot(3x-4)$
$f_5'(x) = -5x^4\cdot(x+3)^2 - 2x^5\cdot(x+3)$	$f_{14}(x) = -x^5\cdot(x+3)^2$
$f_6'(x) = (20x^3-12x^2)\cdot\frac{a}{x^2} - 2(5x^4-4x^3)\cdot\frac{a}{x^3}$	$f_{13}(x) = (5x^4-4x^3)\cdot\frac{a}{x^2}$
$f_7'(x) = (15x^2+2x)\cdot\frac{1}{x} - (5x^3+x^2-4)\cdot\frac{1}{x^2}$	$f_{12}(x) = (5x^3+x^2-4)\cdot\frac{1}{x}$
$f_8'(x) = (2x-2)\cdot sin(x+2) + (x^2-2x)\cdot cos(x+2)$	$f_{11}(x) = (x^2-2x)\cdot sin(x+2)$
$f_9'(x) = (8x-3)\cdot x + (4x^2-3x)$	$f_{10}(x) = (4x^2-3x)\cdot x$

Lösung A3

a) $f(x) = 2x^3\cdot 4x^2$ $\quad u = 2x^3 \quad u' = 6x^2 \quad v = 4x^2 \quad v' = 8x$

$f'(x) = 6x^2\cdot 4x^2 + 2x^3\cdot 8x = 24x^4 + 16x^4 = 30x^4$

$f''(x) = 120x^3$

b) $f(x) = x^3\cdot(2x^2-4)$ $\quad u = x^3 \quad u' = 3x^2 \quad v = 2x^2-4 \quad v' = 4x$

$f'(x) = 3x^2\cdot 2x^2 + x^3\cdot 4x = 6x^4 + 4x^4 = 10x^4$

$f''(x) = 40x^3$

c) $f(x) = 2(x^3-x)(x^2+x)$ $\quad u = x^3-x \quad u' = 3x^2-1 \quad v = x^2+x \quad v' = 2x+1$

$f'(x) = 2\big((3x^2-1)\cdot(x^2+x) + (x^3-x)\cdot(2x+1)\big)$

$= 2(3x^4+3x^3-x^2-x+2x^4+x^3-2x^2-x)$

$= 2(5x^4+4x^3-3x^2-2x)$

$f''(x) = 2(20x^3+12x^2-6x-2)$

d) $f(x) = (x-1)(x-k)^2$ $\quad u = x-1 \quad u' = 1 \quad v = (x-k)^2 \quad v' = 2(x-k)$

$f'(x) = (x-k)^2 + 2(x-1)\cdot(x-k)$

$= (x-k)\cdot(x-k+2x-2)$

$= (x-k)\cdot(3x-k-2)$

$f''(x) = (3x-k-2) + 3(x-k) = 3x-k-2+3x-3k$

$= 6x-4k-2$

e) $f(x) = 2ax(x-a)^2$ $\quad u = 2ax \quad u' = 2a \quad v = (x-a)^2 \quad v' = 2(x-a)$

$f'(x) = 2a\cdot(x-a)^2 + 4ax\cdot(x-a)$

$= 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 + 4ax^2 - 4a^2x$

$= 6ax^2 - 8a^2x + 2a^3$

$f''(x) = 12ax - 8a^2$

f) $f(x) = 2x\cdot(x^2+2)$ $\quad u = 2x \quad u' = 2 \quad v = x^2+2 \quad v' = 2x$

$f'^{(x)} = (x^2+2) + 2x\cdot 2x = x^2+2+4x^2 = 5x^2+2$

$f''(x) = 10x$

Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Quotientenregel und vereinfache so weit wie möglich.

$f_1(x) = \frac{x^2}{x-1}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{2x^2-5x}{x-6}$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{2-x}{x^2-1}$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \frac{\frac{1}{2}t^2+3}{t-1}$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = \frac{t^2}{sin(t)}$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Quotientenregel und vereinfache so weit wie möglich.

$f_1(x) = \frac{4x-3}{3x-2}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{3-4x}{6-5x}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{3x^2-2}{x^3-1}$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{-4x^2+3}{x^2+5}$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{3x^2}{2-x^2}$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \frac{t+2t^2}{t^2}$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = \frac{1-t^2}{2t+3t^2-5}$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A3

Drei der sechs Ableitungen wurden falsch abgeleitet. Suche den Fehler und korrigiere.

$f_1(x) = \frac{12x-5}{1-3x^2}$	$f_1'(x) = \frac{6\cdot(6x^2-5x+2)}{(3x^2-1)^2}$
$f_2(x) = \frac{2x+1}{3x+1}$	$f_2'(x) = -\frac{1}{3x+1}$
$f_3(x) = \frac{x^4}{3x+10}$	$f_3'(x) = \frac{x^2\cdot(9x+40)}{(3x+10)^2}$
$f_4(x) = \frac{0{,}5x^5}{2-4x^3}$	$f_4'(x) = -\frac{x^4\cdot(4x^3-5)}{4\cdot(2x^3-1)^2}$
$f_5(x) = \frac{4x^2}{12+x^2}$	$f_5'(x) = \frac{48x}{(x^2+12)^2}$
$f_6(t) = \frac{5x^3-2x}{x}$	$f_6'(t) = 10x$

Lösung A1

$f_1(x)=\frac{x^2}{x-1}$	$f_1'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{x-1}$
$f_2(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$	$f_2'(x)=\frac{(x-1)^2-2x(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x-1-2x}{(x-1)^3}=-\frac{x+1}{(x-1)^3}$
$f_3(x)=\frac{2x^2-5x}{x-6}$	$f_3'(x)=\frac{(4x-5)\cdot(x-6)-(2x^2-5x)}{(x-6)^2}=\frac{4x^2-29x+30-2x^2+5x}{(x-6)^2}$ $=\frac{4x^2-24x+30}{(x-6)^2}$
$f_4(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$	$f_4'(x)=\frac{2x-2}{x^2+2x+1}-\frac{(x^2-2x)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}=\frac{2(x-1)}{(x+1)^2}-\frac{2\cdot(x^2-2x)(x+1)}{(x+1)^4}$ $=\frac{2(x-1)}{(x+1)^2}-\frac{2x^2-4x}{(x+1)^3}=\frac{2(x-1)(x+1)-2x^2+4x}{(x+1)^3}$ $=\frac{4x-2}{(x+1)^3}=\frac{2(x-1)}{(x+1)^3}$
$f_5(x)=\frac{2-x}{x^2-1}$	$f_5'(x)=\frac{-(x^2-1)-2x(2-x)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-4x+1}{(x^2-1)^2}$
$f_6(t)=\frac{\frac{1}{2}t^2+3}{t-1}$	$f_6'(t)=\frac{t(t-1)-\left(\frac{1}{2}t^2+3\right)}{(t-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}t^2-t-3}{(t-1)^2}=\frac{t^2-2t-6}{2(t-1)^2}$
$f_7(t)=\frac{t^2}{sin(t)}$	$f_7'(t)=\frac{2t\cdot sin(t)-t^2\cdot cos(t)}{sin^2(t)}=\frac{t\cdot(2\,sin(t)-tcos(t)}{sin^2(t)}$

Lösung A2

$f_1(x)=\frac{4x-3}{3x-2}$	$f_1'(x)=\frac{4(3x-2)-3\cdot(4x-3)}{(3x-2)^2}=\frac{1}{(3x-2)^2}$
$f_2(x)=\frac{3-4x}{6-5x}$	$f_2'^{(x)}=\frac{-4\cdot(6-5x)+5\cdot(3-4x)}{(6-5x)^2}=-\frac{9}{(6-5x)^2}$
$f_3(x)=\frac{3x^2-2}{x^3-1}$	$f_3'(x)=\frac{6x(x^3-1)-3x^2(3x^2-2)}{(x^3-1)^2}=\frac{-3x^4+6x^2-6x}{(x^3-1)^2}=-\frac{3x^4+6x^2+6x}{(x^3-1)^2}$
$f_4(x)=\frac{-4x^2+3}{x^2+5}$	$f_4'(x)=\frac{-8x(x^2+5)-2x(-4x^2+3)}{(x^2+5)^2}=-\frac{46x}{(x^2+5)^2}$
$f_5(x)=\frac{3x^2}{2-x^2}$	$f_5'(x)=\frac{6x(2-x^2)+6x^3}{(2-x^2)^2}=\frac{12x}{(x^2-2)^2}$
$f_6(t)=\frac{t+2t^2}{t^2}$	$f_6'(t)=\frac{(1+4t)\cdot t^2-2t\cdot(t+2t^2)}{t^4}=\frac{-t^2}{t^4}=-\frac{1}{t^2}$
$f_7(t)=\frac{1-t^2}{2t+3t^2-5}$	$f_7'(t)=\frac{-2t(2t+3t^2-5)-(6t+2)(1-t^2)}{(2t+3t^2-5)^2}=\frac{-4t^2+4t-2}{(2t+3t^2-5)^2}$ $=-\frac{2(t^2-2t+1)}{(2t+3t^2-5)^2}=-\frac{2(t-1)^2}{(t-1)^2\cdot(3t+5)^2}=-\frac{2}{(3t+5)^2}$

Lösung A3

$f_1(x) = \frac{12x-5}{1-3x^2}$	$f_1'(x) = \frac{6\cdot(6x^2-5x+2)}{(3x^2-1)^2}$
$f_2(x) = \frac{2x+1}{3x+1}$	$\cancel{f_2'(x) = -\frac{1}{3x+1}}$ $f_2'(x) = -\frac{1}{(3x+1)^2}$
$f_3(x) = \frac{x^4}{3x+10}$	$\cancel{f_3'(x) = \frac{x^2\cdot(9x+40)}{(3x+10)^2}}$ $f_3'(x) = \frac{x^3\cdot(9x+40)}{(3x-10)^2}$
$f_4(x) = \frac{0{,}5x^5}{2-4x^3}$	$f_4'(x) = -\frac{x^4\cdot(4x^3-5)}{4\cdot(2x^3-1)^2}$
$f_5(x) = \frac{4x^2}{12+x^2}$	$\cancel{f_5'(x) = \frac{48x}{(x^2+12)^2}}$ $f_5'(x) = \frac{96x}{(x^2+12)^2}$
$f_6(t) = \frac{5x^3-2x}{x}$	$f_6'(t) = 10x$

Aufgabe A1

Bilde die 1. Ableitung der nachfolgend gegebenen Funktionsgleichungen mit der Produktregel und der Quotientenregel. Forme für die Quotientenregel die negativen Hochzahlen in positive Hochzahlen um. Gib an, welche Berechnungsart du für die jeweilige Lösung als geeignetste betrachtest.

a) $f_1(x) = 3x^2 \cdot (x+3)^{-1}$

b) $f_2(x) = (2x+3) \cdot x^{-2}$

c) $f_3(x) = 4x \cdot (x^3 + 3x^2)^{-1}$

d) $f_4(x) = (x^3 - 4x) \cdot (7x^2)^{-1}$

e) $f_5(x) = (3x^2 - x^5) \cdot (x+1)^{-1}$

f) $f_6(x) = (x^2 + x) \cdot (7x^3 - x)^{-1}$

Aufgabe A2

Wandle die folgenden Terme in eine sinnvolle Bruchschreibweise, bestimme die Definitionsmenge und berechne die 1. Ableitung mit Hilfe der Quotientenregel und vereinfache soweit wie möglich.

a) $f_1(x) = x \cdot (x+3)^{-1}$

b) $f_2(x) = x^{-2} \cdot (x-3)$

c) $f_3(x) = (3x^3 + x^2) \cdot (5x)^{-5}$

d) $f_4(x) = (2x)^{-3} \cdot (3x^2 - x)$

e) $f_5(x) = (x^5 - x^4)^{-3} \cdot 2x^3$

f) $f_6(x) = (2x^4 + 1) \cdot (8 + x^3)^{-2}$

g) $f_7(x) = (3x - x^5) \cdot (5x)^{-4}$

h) $f_8(x) = (x-2)^{-1} \cdot (x-2)^{-1}$

Aufgabe A3

Berechne die Funktionswerte und die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{4-x}{2-x}$ an den Stellen -2; 0; $1{,}5$; $2{,}5$; 6. Skizziere den Graphen von f mithilfe der berechneten Punkte und den zugehörigen Tangenten. Kontrolliere mit dem GTR.

Lösung A1

a) Produktregel: $f_1(x) = 3x^2 \cdot (x+3)^{-1}$

$f_1{}'(x) = 6x \cdot (x+3)^{-1} - 3x^2 \cdot (x+3)^{-2}$

Quotientenregel: $f_1(x) = \frac{3x^2}{x+3}$

$f_1{}'(x) = \frac{6x\cdot(x+3)-3x^2}{(x+3)^2} = \frac{3x^2+18x}{(x+3)^2}$

b) Produktregel: $f_2(x) = (2x+3) \cdot x^{-2}$

$f_2{}'(x) = 2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot (2x+3) \cdot x^{-3}$

Quotientenregel: $f_2(x) = \frac{2x+3}{x^2}$

$f_2{}'(x) = \frac{2x^2-2x(2x+3)}{x^4} = -\frac{2x^2+6x}{x^4} = -\frac{2x+6}{x^3}$

c) Produktregel: $f_3(x) = 4x \cdot (x^3+3x^2)^{-1}$

$f_3{}'(x) = 4 \cdot (x^3+3x^2)^{-1} + 4x \cdot (x^3+3x^2)^{-2}$

Quotientenregel: $f_3(x) = \frac{4x}{x^3+3x^2}$

$f_3{}'(x) = \frac{4\cdot(x^3+3x^2)-4x(3x^2+6x)}{x^4\cdot(x+3)^2} = \frac{4x^3+12x^2-12x^3-24x^2}{x^4\cdot(x+3)^2} = \frac{-8x^3-12x^2}{x^4(x+3)^2} = -\frac{12+8x}{x^2\cdot(x+3)^2}$

d) Produktregel: $f_4(x) = (x^3-4x) \cdot (7x^2)^{-1}$

$f_4{}'(x) = (3x^2-4) \cdot (7x^2)^{-1} + 14x \cdot (x^3-4x) \cdot (7x^2)^{-2}$

Quotientenregel: $f_4(x) = \frac{x^3-4x}{7x^2}$

$f_4{}'(x) = \frac{(3x^2-4)\cdot 7x^2-14x(x^3-4x)}{49x^4} = \frac{21x^4-28x^2-14x^4+56x^2}{49x^4} = \frac{7x^2+28}{49x^2} = \frac{x^2+4}{7x^2}$

e) Produktregel: $f_5(x) = (3x^2-x^5) \cdot (x+1)^{-1}$

$f_5{}'(x) = (6x-5x^4) \cdot (x+1)^{-1} + (3x^2-x^5) \cdot (x+1)^{-2}$

Quotientenregel: $f_5(x) = \frac{3x^2-x^5}{x+1}$

$f_5{}'(x) = \frac{(6x-5x^4)\cdot(x+1)-(3x^2-x^5)}{(x+1)^2} = \frac{6x^2+6x-5x^5-5x^4-3x^2+x^5}{(x+1)^2} = \frac{-4x^5-5x^4+3x^2+6x}{(x+1)^2}$

f) Produktregel: $f_6(x) = (x^2+x) \cdot (7x^3-x)^{-1}$

$f_6{}'(x) = (2x+1) \cdot (7x^3-x)^{-1} + (21x^2-1) \cdot (x^2+x) \cdot (7x^3-x)^{-2}$

Quotientenregel: $f_6(x) = \frac{x^2+x}{7x^3-x}$

$f_6{}'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(7x^3-x)-(21x^2-1)\cdot(x^2+x)}{x^2\cdot(7x^2-1)^2} = \frac{14x^4-2x^2+7x^3-x-(21x^4+21x^3-x^2-x)}{x^2\cdot(7x^2-1)^2}$

$= \frac{-7x^4-14x^3-x^2}{x^2\cdot(7x^2-1)^2} = -\frac{7x^2+14x+1}{(7x^2-1)^2}$

Lösung A2

a) $f_1(x) = \frac{x}{x+3}$; $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

$f_1{}'(x) = \frac{x+3-x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$

b) $f_2(x) = \frac{x-3}{x^2}$; $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f_2{}'(x) = \frac{x^2-2x(x-3)}{x^4} = \frac{-x^2+6x}{x^4} = -\frac{x-6}{x^3}$

c) $f_3(x) = \frac{3x^3+x^2}{(5x)^5}$; $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f_3{}'(x) = \frac{(9x^2+2x)\cdot(5x)^5-25(3x^3+x^2)\cdot(5x)^4}{(5x)^{10}} = \frac{(5x)^4\cdot\left((9x^2+2\cdot x)\cdot 5x-25\cdot(3x^3+x^2)\right)}{(5x)^{10}} = -\frac{5x^2(6x+3)}{(5x)^6}$$
$$= -\frac{6x+3}{625x^4}$$

d) $f_4(x) = \frac{3x^2-x}{8x^3}$; $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f_4{}'(x) = \frac{(6x-1)8x^3-24x^2(3x^2-x)}{64x^6} = \frac{48x^4-8x^3-72x^4+24x^3}{64x^6} = \frac{8x^3(-3x+2)}{64x^6} = -\frac{3x-2}{8x^3}$$

e) $f_5(x) = \frac{2x^3}{(x^5-x^4)^3}$·; $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$

$$f_5{}'(x) = \frac{6x^2\cdot(x^5-x^4)^3-6x^3\cdot(x^5-x^4)^2\cdot(5x^4-4x^3)}{(x^5-x^4)^6} = \frac{(x^5-x^4)^2\cdot\left(6x^2\cdot(x^5-x^4)-6x^3\cdot(5x^4-4x^3)\right)}{(x^5-x^4)^6}$$
$$= \frac{6x^7-6x^6-30x^7+24x^6}{(x^5-x^4)^4} = \frac{-24x^7+18x^6}{x^{16}(x-1)^4} = -\frac{24x-18}{x^{10}\cdot(x-1)^4}$$

f) $f_6(x) = \frac{2x^3}{(x^5-x^4)^3}$·; $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$

$$f_6{}'(x) = \frac{6x^2\cdot(x^5-x^4)^3-6x^3\cdot(x^5-x^4)^2\cdot(5x^4-4x^3)}{(x^5-x^4)^6} = \frac{(x^5-x^4)^2\cdot\left(6x^2\cdot(x^5-x^4)-6x^3\cdot(5x^4-4x^3)\right)}{(x^5-x^4)^6}$$
$$= \frac{6x^7-6x^6-30x^7+24x^6}{(x^5-x^4)^4} = \frac{-24x^7+18x^6}{x^{16}(x-1)^4} = -\frac{24x-18}{x^{10}\cdot(x-1)^4}$$

g) $f_7(x) = \frac{3x-x^5}{(5x)^4}$; $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f_7{}'(x) = \frac{(3-5x^4)\cdot(5x)^4-20\cdot(5x)^3\cdot(3x-x^5)}{(5x)^8} = \frac{(5x)^3\cdot\left(5x\cdot(3-5x^4)-20\cdot(3x-x^5)\right)}{(5x)^3\cdot(5x)^5}$$
$$= \frac{15x-25x^5-60x+20x^5}{(5x)^5} = \frac{-5x^5-45x}{(5x)^5} = -\frac{5x(x^4+9)}{(5x)^5} = -\frac{x^4+9}{(5x)^4}$$

h) $f_8(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$; $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$$f_8{}'(x) = \frac{-2\cdot(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{2}{(x-2)^3}$$

Lösung A3

$f(x) = \frac{4-x}{2-x}$ $\qquad f'(x) = \frac{-(2-x)+(4-x)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}$

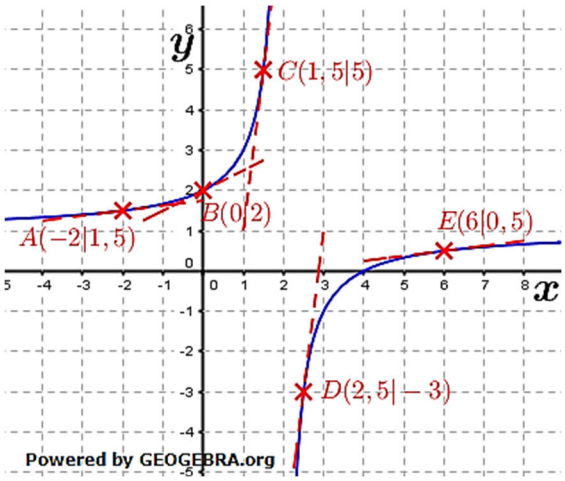
$f(-2) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\qquad f'(-2) = \frac{1}{8}$

$f(0) = 2$ $\qquad f'(0) = \frac{1}{2}$

$f(1{,}5) = 5$ $\qquad f'(1{,}5) = 8$

$f(2{,}5) = -3$ $\qquad f'(2{,}5) = -8$

$f(6) = \frac{1}{2}$ $\qquad f'(6) = \frac{1}{8}$



Aufgabenblatt Ableitungen
zur Produkt- und Quotientenregel

Level 1 – Grundlagen – Blatt 5

Dokument mit 27 Aufgaben

Aufgabe A1

Leite nach der Produktregel ab und fasse zusammen.

a) $f_1(x) = (1-2x)\cdot(3x+1)$

b) $f_2(x) = (x^2-4)\cdot(x^3+1)$

c) $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot(4-0{,}8x^2)$

d) $f_4(t) = (3t^2+t)\cdot(1-t^2)$

e) $f_5(x) = (x^3+x^2)\cdot(1-x)$

f) $f_6(r) = (1+r^2)^2$

Aufgabe A2

Leite nach der Produktregel ab und fasse zusammen.

a) $f_1(x) = x\cdot\sqrt{x}$

b) $f_2(x) = x^2\cdot\sqrt{x}$

c) $f_3(x) = (2x-1)\cdot\sqrt{x}$

d) $f_4(t) = (47t^2-1)\cdot\sqrt{t}$

e) $f_5(x) = \frac{1}{x}\cdot(1-x^3)$

f) $f_6(x) = \frac{3-x}{x}$

g) $f_7(x) = x\cdot cos(x)$

h) $f_8(x) = (x^2+1)\cdot sin(x)$

i) $f_9(x) = \sqrt{x}\cdot\cos(\mathrm{x})$

j) $f_{10}(t) = sin(t)\cdot cos(x)$

k) $f_{11}(t) = sin^2(t)$

l) $f_{12}(t) = cos^2(t)$

Aufgabe A3

Leite nach der Produktregel ab und fasse zusammen.

a) $f_1(x) = mx$

b) $f_2(x) = a\cdot x^2$

c) $f_3(t) = \frac{1}{2}gt^2$

d) $f_4(x) = t(x^2-x)$

e) $f_5(t) = t(x^2-x)$

f) $f_6(z) = t(x^2-x)$

g) $f_7(x) = x\cdot g(\mathrm{x})$

h) $f_8(x) = (g(x))^2$

i) $f_9(x) = g'(x)\cdot g(x)$

Lösung A1

a) $f_1'(x) = -2 \cdot (3x+1) + 3 \cdot (1-2x)$
$= 1 - 12x$

b) $f_2'(x) = 2x \cdot (x^3+1) + 3x^2 \cdot (x^2-4)$
$= x(5x^3 - 12x + 2)$

c) $f_3'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4 - 0{,}8x^2) - 1{,}6x \cdot (\frac{1}{2}x - 1)$
$= -1{,}2x^2 + 1{,}6x + 2$

d) $f_4'(t) = (6t+1) \cdot (1-t^2) - 2t \cdot (3t^2+t)$
$= -12t^3 - 3t^2 + 6t + 1$

e) $f_5'(x) = (3x^2+2x) \cdot (1-x) - (3x^2+2x)$
$= 2x - 4x^3$

f) $f_6'(r) = 2(1+r^2) \cdot 2r$
$= 4x(x^2+1)$

Lösung A2

a) $f_1'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$

b) $f_2'(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^3}$

c) $f_3'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + \frac{(2x-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}$

d) $f_4'(t) = 94t \cdot \sqrt{t} + \frac{47t^2-1}{2\sqrt{t}} = \frac{235t^2-1}{2\sqrt{t}}$

e) $f_5'(x) = -\frac{1}{x^2}(1-x^3) - \frac{3x^2}{x} = -\frac{2x^3+1}{x^2}$

f) $f_6'(x) = -\frac{3}{x^2}$

g) $f_7'(x) = cos(x) - x \cdot sin(x)$

h) $f_8'(x) = 2x \cdot sin(x) + (x^2+1) \cdot cos(x)$

i) $f_9'(x) = \frac{cos(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot sin(x) = \frac{cos(x) - 2x \cdot sin(x)}{2\sqrt{x}}$

j) $f_{10}'(t) = cos^2(t) - sin^2(t)$

k) $f_{11}'(t) = 2sin(t) \cdot cos(t) = sin(2t)$

l) $f_{12}'(t) = -2sin(t) \cdot cos(t) = -sin(2t)$

Lösung A3

a) $f_1'(x) = m$

b) $f_2'(x) = 2ax$

c) $f_3'(t) = gt$

d) $f_4'(x) = t \cdot (2x-1)$

e) $f_5'(t) = x^2 - x$

f) $f_6'(z) = 0$

g) $f_7'(x) = g(x) + x \cdot g'(x)$

h) $f_8'(x) = 2g(x) \cdot g'(x)$

i) $f_9'(x) = g''(x) \cdot g(x) + \left(g'(x)\right)^2$

Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 18 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Produktregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-1)^4$

b) $f(x) = x^2 \cdot (1-x)^5$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (5+\sqrt{x})$

d) $f(x) = (3x^5 - 2x) \cdot \frac{2}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x + \frac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = \left(5\sqrt{x} + 3x\right) \cdot 5x$

Aufgabe A2

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Produktregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 \cdot (5x^2 - x + 7)$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) \cdot (x+5)$

c) $f(x) = \left(5\sqrt{x} + 3x\right) \cdot (5x+7)$

d) $f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x\right) \cdot \sqrt{x}$

e) $f(x) = (7x^5 + x^2 - 2x) \cdot (x^7 + 3x)$

f) $f_a(t) = (\sin(at) + at) \cdot t^2$

Aufgabe A3

Berechne die Steigung der Funktionen f_n an der angegebenen Stelle x_0.

a) $f_1(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot (3x+5);\ x_0 = -1$

b) $f_2(x) = 2x^6 \cdot \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right);\ x_0 = 2$

c) $f_3(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x^2 + \frac{1}{x^2}\right);\ x_0 = 1$

d) $f_4(x) = \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x\right) \cdot \left(\frac{2}{5}x - 8\right);\ x_0 = 0$

Aufgabe A4

An welcher Stelle verlaufen die Graphen der der Funktionen f und g parallel? Welche Steigung haben die Tangenten an dieser Stelle?

a) $f(x) = (x + 3x^2) \cdot (2x - 1)$ $\quad g(x) = 6x^3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 8x\right) \cdot \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = -\frac{1}{3x} + 2$

Lösung A1

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-1)^4 \qquad u = \sqrt{x} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad v = (x-1)^4 \qquad v' = 4(x-1)^3$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x-1)^4 + 4\sqrt{x} \cdot (x-1)^3 = \frac{(x-1)^4 + 8x(x-1)^3}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-1)^3 \cdot (9x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)^3 \cdot (9x-1) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \qquad u = \frac{1}{2}(x-1)^3 \qquad u' = \frac{3}{2}(x-1)^2$$

$$v = 9x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \qquad v' = \frac{9}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 \cdot \frac{(9x-1)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}(x-1)^3 \cdot \left(\frac{9x+1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 \cdot \left(27x - 3 + (x-1) \cdot \frac{9x+1}{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 \cdot \left(\frac{(27x-3) \cdot 2x + (x-1) \cdot (9x+1)}{2x}\right) = \frac{(x-1)^2 \cdot (63x^2 - 14x - 1)}{4x\sqrt{x}}$$

b) $f(x) = x^2 \cdot (1-x)^5 \qquad u = x^2 \qquad u' = 2x$

$$v = (1-x)^5 \qquad v' = -5(1-x)^4$$

$$f'(x) = 2x \cdot (1-x)^5 - 5x^2 \cdot (1-x)^4 = (1-x^4) \cdot (2x \cdot (1-x) - 5x^2)$$

$$= (1-x)^4 \cdot (-7x^2 + 2x) \qquad u = (x-1)^4 \qquad u' = 4(x-1)^3$$

$$v = -7x^2 + 2x \qquad v' = -14x + 2$$

$$f''(x) = 4(x-1)^3 \cdot (-7x^2 + 2x) + (x-1)^4 \cdot (-14x + 2) =$$

$$= 2(x-1)^3 \cdot (2(-7x^2 + 2x) + (x-1) \cdot (-7x + 1) =$$

$$= 2(x-1)^3 \cdot (-14x^2 + 4x - 7x^2 + x + 7x - 1) = 2(x-1)^3 \cdot (-21x^2 + 12x - 1)$$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (5 + \sqrt{x}) = 5\sqrt{x} + x$

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 1$$

$$f''(x) = -\frac{5}{4x\sqrt{x}}$$

d) $f(x) = (3x^5 - 2x) \cdot \frac{2}{x} \qquad u = 3x^5 - 2x \qquad u' = 15x^4 - 2$

$$v = \frac{2}{x} \qquad v' = -\frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = (15x^4 - 2) \cdot \frac{2}{x} - (3x^5 - 2x) \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2} \cdot \left(x \cdot (15x^4 - 2) - (3x^5 - 2x)\right)$$

$$= \frac{2}{x^2} \cdot (12x^5) = 24x^3$$

$$f''(x) = 72x^2$$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x + \frac{1}{x}\right) = 5x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$$f'(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{15}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

f) $f(x) = (5\sqrt{x} + 3x) \cdot 5x = 25x^{\frac{3}{2}} + 15x^2$

$$f'(x) = \frac{75}{2}\sqrt{x} + 30x$$

$$f''(x) = \frac{75}{4\sqrt{x}} + 30$$

Lösung A2

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 \cdot (5x^2 - x + 7)$ $\quad u = \frac{2}{3}x^3 \quad u' = 2x^2$

$v = 5x^2 - x + 7 \quad v' = 10x - 1$

$f'(x) = 2x^2 \cdot (5x^2 - x + 7) + \frac{2}{3}x^3 \cdot (10x - 1) = 10x^4 - 2x^3 + 14x^2 + \frac{20}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3$

$= \frac{50}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 14x^2$

$f''(x) = \frac{200}{3}x^3 - 8x^2 + 28x$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) \cdot (x + 5)$ $\quad u = \frac{2}{x^2} - 1 \quad u' = -\frac{4}{x^3}$

$v = x + 5 \quad v' = 1$

$f'(x) = -\frac{4}{x^3} \cdot (x + 5) + \frac{2}{x^2} - 1 = -\frac{4}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 1 = -\frac{20}{x^3} - \frac{2}{x^2} - 1$

$f''(x) = \frac{60}{x^4} + \frac{4}{x^3}$

c) $f(x) = \left(5\sqrt{x} + 3x\right) \cdot (5x + 7)$ $\quad u = 5\sqrt{x} + 3x \quad u' = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 3$

$v = 5x + 7 \quad v' = 5$

$f'(x) = \left(\frac{5}{2\sqrt{x}} + 3\right)(5x + 7) + 5 \cdot \left(5\sqrt{x} + 3x\right) = \frac{25\sqrt{x}}{2} + \frac{35}{2\sqrt{x}} + 15x + 21$

$f''(x) = \frac{25}{4\sqrt{x}} - \frac{35}{4x\sqrt{x}} + 15 = \frac{25x - 35}{4x\sqrt{x}} + 15$

d) $f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x\right) \cdot \sqrt{x}$ $\quad u = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x \quad u' = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{10}$

$v = \sqrt{x} \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{10}\right) \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x\right) = \frac{2}{x^2\sqrt{x}} + \frac{1}{10}\sqrt{x} - \frac{1}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{1}{20}\sqrt{x}$

$= \frac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{3}{20}\sqrt{x}$

$f''(x) = -\frac{15}{4x^3\sqrt{x}} + \frac{3}{40\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x + \frac{1}{x}\right)$ $\quad u = \sqrt{x} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = 5x + \frac{1}{x} \quad v' = 5 - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(5x + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{x} \cdot \left(5 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 5\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$= \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$f''(x) = \frac{15}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \left(5\sqrt{x} + 3x\right) \cdot 5x$ $\quad u = 5\sqrt{x} + 3x \quad u' = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 3$

$v = 5x \quad v' = 5$

$f'(x) = \frac{25x}{2\sqrt{x}} + 5 \cdot \left(5\sqrt{x} + 3x\right) = \frac{25}{2}\sqrt{x} + 25\sqrt{x} + 15x$

$= \frac{75}{2}\sqrt{x} + 15x$

$f''(x) = \frac{75}{4\sqrt{x}} + 15$

Lösung A3

a) $f_1(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot (3x + 5)$ $\quad u = \frac{1}{x} + 1 \quad u' = -\frac{1}{x^2}$

$v = 3x + 5 \quad v' = 3$

$f_1'(x) = -\frac{3x+5}{x^2} + 3\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ $\quad f_1'(-1) = -2$

b) $f_2(x) = 2x^6 \cdot \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)$ $\quad u = 2x^6 \quad u' = 12x^5$

$v = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \quad v' = -\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$

$f_2'(x) = 12x^5\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) + 2x^6\left(-\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}\right)$ $\quad f_2'(2) = 24 - 8 = 16$

c) $f_3(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ $\quad u = \sqrt{x} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = 5x^2 + \frac{1}{x^2} \quad v' = 10x - \frac{2}{x^3}$

$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(5x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \sqrt{x}\left(10x - \frac{2}{x^3}\right)$ $\quad f_3'(1) = 3 + 8 = 11$

d) $f_4(x) = \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x\right) \cdot \left(\frac{2}{5}x - 8\right)$ $\quad u = \frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x \quad u' = \frac{3}{8}x^2 + \frac{6}{5}$

$v = \frac{2}{5}x - 8 \quad v' = \frac{2}{5}$

$f_4'(x) = \left(\frac{3}{8}x^2 + \frac{6}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x - 8\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x\right)$ $\quad f_4'(0) = -\frac{48}{5}$

Lösung A4

a) $f(x) = (x + 3x^2) \cdot (2x - 1)$ $\quad u = x + 3x^2 \quad u' = 1 + 6x$

$v = 2x - 1 \quad v' = 2$

$f'(x) = (1 + 6x) \cdot (2x - 1) + 2(x + 3x^2) = 12x^2 - 2x - 1$

$g(x) = 6x^3$

$g'(x) = 12x^2$

$f'(x) \cap g'(x)$

$12x^2 - 2x - 1 = 12x^2$

$-2x - 1 = 0$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

$f'^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 \qquad g'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

An der Stelle $x_0 = -\frac{1}{2}$ verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von $m = 3$ parallel.

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 8x\right) \cdot \frac{1}{x}$ $\quad u = \frac{1}{2}x^2 + 8x \quad u' = x + 8$

$v = \frac{1}{x} \quad v' = -\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = (x + 8) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 8x\right) = 1 + \frac{8}{x} - \frac{1}{2} - \frac{8}{x} = \frac{1}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{x3} + 3$

$g'(x) = \frac{3}{x^4}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{x^4}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{6}$

An den Stellen $x_1 = \sqrt[4]{6}$ und $x_2 = -\sqrt[4]{6}$ verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von $m = \frac{1}{2}$ parallel.

Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Dokument mit 19 Aufgaben

Aufgabe A1

Leite mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel ab.

a) $f(x) = x \cdot sin(3x)$

b) $f(x) = (3x+4)^2 \cdot sin(x)$

c) $f(x) = x^{-1} \cdot (2x+3)$

d) $f(x) = (5-4x)^3 \cdot (1-4x)$

e) $f(x) = (5-4x)^3 \cdot x^{-2}$

f) $f(x) = 3x \cdot cos(2x)$

g) $f(x) = 3x \cdot (sin(x))^2$

h) $f(x) = 0{,}5x^2 \cdot \sqrt{4-x}$

Aufgabe AA2

a) Wo steckt der Fehler?

$f(x) = (2x-8) \cdot sin(x)$; $f'(x) = 2cos(x)$

b) Ergänze: $g(x) = (2x-3) \cdot (8-x)^2$; $g'(x) = \square \cdot (8-x)^2 + (2x-3) \cdot \square$

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x}$.

a) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.

b) Welche Steigung hat die Tangente an den Graphen im Punkt $P(1|f(1))$?

c) In welchen Punkten hat der Graph von f waagrechte Tangenten?

d) Skizziere den Graphen von f und überprüfe ihn mit dem GTR.

Aufgabe A4

a) Bilde die erste Ableitung von

$f(x) = (2x-3) \cdot cos(x)$; $g(x) = x \cdot (1-x)^2$; $h(x) = (2x-3)^3 \cdot 3x$;

$i(x) = \frac{1}{x} \cdot sin(x)$.

b) In welchen Punkten hat der Graph von g waagrechte Tangenten?

c) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von h mit der x-Achse.

d) Welche Steigungen haben die Tangenten an den Graphen von h in den Schnittpunkten mit der x-Achse?

Aufgabe A5

Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$ für $f(x) = x^2 \cdot g(x)$; $f(x) = x \cdot g'(x)$ bzw. $f(x) = g(x) \cdot g'(x)$.

Lösung A1

a) $f(x) = x \cdot sin(3x)$ $\quad u = x \quad u' = 1$
$v = sin(3x) \quad v' = 3cos(3x)$

$f'(x) = sin(3x) + 3xcos(3x)$

b) $f(x) = (3x+4)^2 \cdot sin(x)$ $\quad u = (3x+4)^2 \quad u' = 6(3x+4)$
$v = sin(x) \quad v' = cos(x)$

$f'(x) = 6(3x+4) \cdot sin(x) + (3x+4)^2 \cdot cos(x)$
$= (3x+4) \cdot (6 \cdot sin(x) + 3x \cdot cos(x) + 4\,cos(x))$

c) $f(x) = x^{-1} \cdot (2x+3)$ $\quad u = x^{-1} \quad u' = -x^{-2}$
$v = (2x+3) \quad v' = 2$

$f'(x) = -x^{-2} \cdot (2x+3) + 2 \cdot x^{-1} = -2x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-1} = -3x^{-2}$

d) $f(x) = (5-4x)^3 \cdot (1-4x)$ $\quad u = (5-4x)^3 \quad u' = -12(5-4x)^2$
$v = 1-4x \quad v' = -4$

$f'(x) = -12 \cdot (4x-5)^2 \cdot (1-4x) - 4 \cdot (5-4x)^3$
$= -4 \cdot (4x-5)^2 \cdot \big(3(1-4x) + (5-4x)\big) = -4 \cdot (4x-5)^2 \cdot (8-16x)$

e) $f(x) = (5-4x)^3 \cdot x^{-2}$ $\quad u = (5-4x)^3 \quad u' = -12(5-4x)^2$
$v = x^{-2} \quad v' = -2x^{-3}$

$f'(x) = -12 \cdot (5-4x)^2 \cdot x^{-2} - 2x^{-3} \cdot (5-4x)^3$
$= -12x \cdot (5-4x)^2 \cdot x^{-3} - 2x^{-3} \cdot (5-4x)^3$
$= x^{-3} \cdot (5-4x)^2 \cdot \big(-12x - 2 \cdot (5-4x)\big)$
$= x^{-3} \cdot (5-4x)^2 \cdot (-4x-10)$
$= x^{-3} \cdot (25 - 40x + 16x^2) \cdot (-4x-10)$
$= x^{-3} \cdot (-64x^3 + 300x - 250)$

f) $f(x) = 3x \cdot cos(2x)$ $\quad u = 3x \quad u' = 3$
$v = cos(2x) \quad v' = -2sin(2x)$

$f'(x) = 3 \cdot cos(2x) - 6x \cdot sin(2x) = 3(cos(2x) - 2x \cdot sin(2x))$

g) $f(x) = 3x \cdot (sin(x))^2$ $\quad u = 3x \quad u' = 3$
$v = (sin(x))^2 \quad v' = 2 \cdot sin(x) \cdot cos(x)$

$f'(x) = 3 \cdot (sin(x))^2 + 6x \cdot sin(x) \cdot cos(x))$
$= 3 \cdot sin(x) \cdot \big(sin(x) + 2x \cdot cos(x)\big)$

h) $f(x) = 0{,}5x^2 \cdot \sqrt{4-x}$ $\quad u = 0{,}5x^2 \quad u' = x$
$v = \sqrt{4-x} \quad v' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$

$f'(x) = x \cdot \sqrt{4-x} - 0{,}5x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$
$= \frac{2x \cdot (4-x) - 0{,}5x^2}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8x - 2{,}5x^2}{2\sqrt{4-x}}$

Lösung A2

a) Es wurde nur $u' \cdot v$ gebildet und die Multiplikation $v' \cdot u$ wurde vergessen.

b) $g'(x) = 2 \cdot (8-x)^2 + (2x-3) \cdot (2x-16)$

Lösung A3

$f(x) = (x-1)\cdot\sqrt{x}$

a) Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse mithilfe von $f(x) = 0$:

$(x-1)\cdot\sqrt{x}$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 1$

b) Steigung der Tangente in $P(1|f(1))$:

$f(x) = (x-1)\cdot\sqrt{x}$ $\quad u = x-1 \quad u' = 1$

$v = \sqrt{x} \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)$

$f'(1) = 1 + 0 = 1$

Die Tangente in $P(1|f(1))$ hat die Steigung $m = 1$.

c) Waagrechte Tangenten mit $f'(x) = 0$:

$\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) = 0$ | $\cdot 2\sqrt{x}$

$2x + x - 1 = 0$

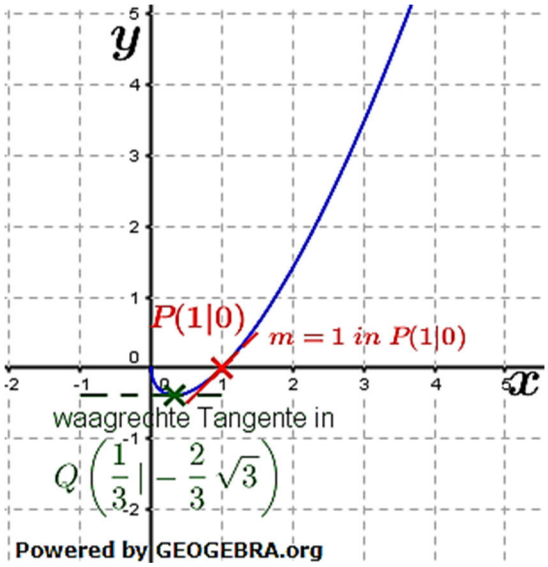
$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$

Der Graph von f hat eine waagrechte Tangente in $Q\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$

d)



Lösung A4

a) $f(x) = (2x-3)\cdot cos(x)$

$f'(x) = 2\,cos(x) - (2x-3)\cdot sin(x)$

$g(x) = x\cdot(1-x)^2$

$g'(x) = (x-1)\cdot(3x-1)$

$h(x) = (2x-3)^3\cdot 3x$

$h'(x) = 3\cdot(2x-3)^2\cdot(8x-3)$

$i(x) = \frac{1}{x}\cdot sin(x)$

$i'(x) = \frac{cos(x)}{x} - \frac{sin(x)}{x^2}$

b) $g'(x) = 0$

$(x-1)\cdot(3x-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 1;\ \ x_2 = \frac{1}{3}$

$g(1) = 0;\ \ g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$

Der Graph von g hat in $P(1|0)$ und $Q\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{4}{27}\right)$ waagrechte Tangenten.

c) $h(x) = 0$
$(2x-3)^3 \cdot 3x = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0;\ x_2 = 1{,}5$
Der Graph von h schneidet die x-Achse in $x_1 = 0$ und $x_2 = 1{,}5$.

d) $h'(0)$ bzw. $h'(1{,}5)$
$h'(0) = -81;\quad h'(1{,}5) = 0$

Lösung A5

$f(x) = x^2 \cdot g(x)$

$$f'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x)$$
$$f''(x) = 2 \cdot g(x) + 2x \cdot g'(x) + 2x \cdot g'(x) + x^2 \cdot g''(x)$$
$$= 2 \cdot g(x) + 4x \cdot g'(x) + x^2 \cdot g''(x)$$

$f(x) = x \cdot g'(x)$

$$f'(x) = g'(x) + x \cdot g''(x)$$
$$f''(x) = g''(x) + g''(x) + x \cdot g'''(x)$$
$$= 2 \cdot g''(x) + x \cdot g'''(x)$$

$f(x) = g(x) \cdot g'(x)$

$$f'(x) = g'(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot g''(x)$$
$$= \left(g'(x)\right)^2 + g(x) \cdot g''(x)$$
$$f''(x) = 2 \cdot (g'(x)) \cdot g''(x) + g'(x) \cdot g''(x) + g(x) \cdot g'''(x)$$
$$= 3 \cdot g'(x) \cdot g''(x) + g(x) \cdot g'''(x)$$

Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Dokument mit 24 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen $f_n(x)$ mit Hilfe der Quotientenregel und vereinfache soweit wie möglich.

$f_1(x) = \frac{3x-2}{x^2-1}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{3-x^2}{x^2-2}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{2x^3-2x}{x}$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{5x^2-3}{-x^2}$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = \frac{x^2-3x}{4x^3}$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = \frac{(x-20)^5}{(x+10)^{-2}}$	$f_7'(x) =$
$f_8(x) = \frac{x^2-x+2}{\sin(t)} \cdot$	$f_8'(x) =$
$f_9(x) = \frac{3x^3+4}{x^2}$	$f_9'(x) =$

Aufgabe A2

Ordne den gegebenen Ableitungsfunktionen $f_n'(x)$ ihre ursprüngliche Ausgangsfunktion $f_n(x)$ zu.

$f_1'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}}$	$f_{10}(x) = \frac{4x^2-3x}{x}$
$f_2'(x) = 1 + tan^2(x)$	$f_{11}(x) = \frac{x^2-2x}{sin(x+2)}$
$f_3'(x) = -\frac{\pi\cdot sin(x-3)}{x^2-2} - \frac{2\pi x\cdot cos(x-3)}{(x^2-2)^2}$	$f_{12}(x) = \frac{5x^3+x^2-4}{x}$
$f_4'(x) = \frac{6}{(3x-4)^3}$	$f_{13}(x) = \frac{5x^4-4x^3}{ax^2}$
$f_5'(x) = -\frac{3x^4\cdot(x+5)}{(x+3)^2}$	$f_{14}(x) = \frac{-x^5}{(x+3)^2}$
$f_6'(x) = \frac{10x-4}{a}$	$f_{15}(x) = \frac{(4-3x)^{-1}}{3x-4}$
$f_7'(x) = \frac{10x^3+x^2+4}{x^2}$	$f_{16}(x) = \frac{\pi cos(x-3)}{x^2-2}$
$f_8'(x) = \frac{(2x-2)\cdot\sin(x+2)+(2x-x^2)\cdot\cos(x+2)}{\sin^2(x+2)}$	$f_{17}(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
$f_9'(x) = 4$	$f_{18}(x) = \frac{0{,}5\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$

Aufgabe A3

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Quotientenregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

a) $f(x) = \frac{2x^3}{4x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{2(x^3-x)}{x^2+x}$

d) $f(x) = \frac{x-1}{(x-k)^2}$

e) $f(x) = \frac{2ax}{(x-a)^2}$

f) $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$

Lösung A1

$f_1(x)=\frac{3x-2}{x^2-1}$	$f_1'(x)=\frac{3\cdot(x^2-1)-2x(3x-2)}{(x^2-1)^2}=\frac{-3x^2+4x-3}{(x^2-1)^2}=-\frac{3x^2-4x+3}{(x^2-1)^2}$
$f_2(x)=\frac{3-x^2}{x^2-2}$	$f_2'(x)=\frac{-2x\cdot(x^2-2)-2x\cdot(3-x^2)}{(x^2-2)^2}=-\frac{2x}{(x^2-2)^2}$
$f_3(x)=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$	$f_3'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)^2-2(x+1)(x-1)^2}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)(x^2-1-x^2+2x-1)}{(x+1)^4}$ $=\frac{2(x+1)\cdot 2(x-1)}{(x+1)^4}=\frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$
$f_4(x)=\frac{2x^3-2x}{x}$	$f_4'(x)=4x$
$f_5(x)=\frac{5x^2-3}{-x^2}$	$f_5'(x)=\frac{-10x^3+2x(5x^2-3)}{x^4}=\frac{-6}{x^3}$
$f_6(x)=\frac{x^2-3x}{4x^3}$	$f_6'(x)=\frac{4x^3\cdot(2x-3)-12x^2\cdot(x^2-3x)}{16x^6}=\frac{x(2x-3)-3(x^2-3x)}{4x^4}=\frac{-x^2+6x}{4x^4}=-\frac{x-6}{4x^3}$
$f_7(x)=\frac{(x-20)^5}{(x+10)^{-2}}$	$f_7'(x)=\frac{5(x-20)^4\cdot(x+10)^{-2}+2(x+10)^{-3}\cdot(x-20)^5}{(x+10)^{-4}}$ $=5(x-20)^4\cdot(x+10)^2+2(x-20)^5(x+10)$ $=(x-20)^4\cdot(x+10)\cdot(7x+10)$
$f_8(x)=\frac{x^2-x+2}{\sin(t)}\cdot$	$f_8'(x)=\frac{1}{\sin(t)}\cdot(2x-1)$
$f_9(x)=\frac{3x^3+4}{x^2}$	$f_9'(x)=3-\frac{8}{x^3}$

Lösung A2

$f_1'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}}$	$f_{18}(x)=\frac{0{,}5\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$
$f_2'(x)=1+tan^2(x)$	$f_{17}(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$
$f_3'(x)=-\frac{\pi\cdot sin(x-3)}{x^2-2}-\frac{2\pi x\cdot cos(x-3)}{(x^2-2)^2}$	$f_{16}(x)=\frac{\pi cos(x-3)}{x^2-2}$
$f_4'(x)=\frac{6}{(3x-4)^3}$	$f_{15}(x)=\frac{(4-3x)^{-1}}{3x-4}$
$f_5'(x)=-\frac{3x^4\cdot(x+5)}{(x+3)^2}$	$f_{14}(x)=\frac{-x^5}{(x+3)^2}$
$f_6'(x)=\frac{10x-4}{a}$	$f_{13}(x)=\frac{5x^4-4x^3}{ax^2}$
$f_7'(x)=\frac{10x^3+x^2+4}{x^2}$	$f_{12}(x)=\frac{5x^3+x^2-4}{x}$
$f_8'(x)=\frac{(2x-2)\cdot\sin(x+2)+(2x-x^2)\cdot\cos(x+2)}{\sin^2(x+2)}$	$f_{11}(x)=\frac{x^2-2x}{sin(x+2)}$
$f_9'(x)=4$	$f_{10}(x)=\frac{4x^2-3x}{x}$

Lösung A3

Aa) $f(x)=\frac{2x^3}{4x^2}$ $\quad u=2x^3 \quad u'=6x^2 \quad v=4x^2 \quad v'=8x$

$f'(x)=\frac{24x^4-16x^4}{16x^4}=\frac{1}{2}$

$f''(x)=0$

b) $f(x)=\frac{x^3}{2x^2-4}$ $\quad u=x^3 \quad u'=3x^2 \quad v=2x^2-4 \quad v'=4x$

$f'(x)=\frac{6x^2\cdot(x^2-2)-4x^4}{4(x^2-2)^2}=\frac{x^4-6x^2}{2(x^2-2)^2}$ $\quad u=x^4-6x^2 \quad u'=4x^3-12x$

$v=2(x^2-2)^2 \quad v'=8x(x^2-2)$

$f''(x)=\frac{4\cdot(x^3-3x)\cdot 2\cdot(x^2-2)^2-(x^4-6x^2)\cdot 8x\cdot(x^2-2)}{4(x^2-2)^4}=\frac{8\cdot(x^2-2)\cdot\left((x^3-3x)\cdot(x^2-2)-x(x^4-6x^2)\right)}{4(x^2-2)^4}$

$=\frac{2\cdot\left((x^3-3x)\cdot(x^2-2)-x(x^4-6x^2)\right)}{(x^2-2)^3}=\frac{2\cdot(x^5-2x^3-3x^3+6x-x^5+6x^3)}{(x^2-2)^3}$

$=\frac{2x\cdot(x^2+6)}{(x^2-2)^3}$

c) $f(x)=\frac{2(x^3-x)}{x^2+x}$ $\quad u=2(x^3-x) \quad u'=2(3x^2-1)$

$v=x^2+x \quad v'=2x+1$

$f'(x)=\frac{2(3x^2-1)(x^2+x)-2(x^3-x)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=\frac{2\left(3x^4+3x^3-x^2-x-(2x^4+x^3-2x^2-x)\right)}{(x^2+x)^2}$

$=\frac{2(x^4+2x^3+x^2)}{(x^2+x)^2}=\frac{2(x^4+2x^3+x^2)}{x^4+2x^3+x^2}=2$

$f''(x)=0$

d) $f(x)=\frac{x-1}{(x-k)^2}$ $\quad u=x-1 \quad u'=1 \quad v=(x-k)^2 \quad v'=2(x-k)$

$f'(x)=\frac{(x-k)^2-2\cdot(x-1)\cdot(x-k)}{(x-k)^4}=\frac{-x-k+2}{(x-k)^3}=-\frac{x+k-2}{(x-k)^3}$

$u=-x-k+2 \quad u'=-1$

$v=(x+k)^3 \quad v'=3(x+k)^2$

$f''(x)=\frac{-(x-k)^3-(-x-k+2)\cdot 3\cdot(x-k)^2}{(x-k)^6}=\frac{-(x-k)+3\cdot(x+k-2)}{(x-k)^4}=\frac{2x+4k-6}{(x-k)^4}=\frac{2(x+2k-3)}{(x-k)^4}$

e) $f(x)=\frac{2ax}{(x-a)^2}$ $\quad u=2ax \quad u'=2a \quad v=(x-a)^2 \quad v'=2(x-a)$

$f'(x)=\frac{2a(x-a)^2-4ax(x-a)}{(x-a)^4}=\frac{2a(x-a)-4ax}{(x-a)^3}=\frac{-2ax-2a^2}{(x-a)^3}=-\frac{2a(x+a)}{(x-a)^3}$

$u=-2a(x+a) \quad u'=-2a$

$v=(x-a)^3 \quad v'=3(x-a)^2$

$f''(x)=\frac{-2a(x-a)^3+6a(x+a)(x-a)^2}{(x-a)^6}=\frac{-2a(x-a)+6a(x+a)}{(x-a)^4}=\frac{4ax+8a^2}{(x-a)^4}=\frac{4a(x+2a)}{(x-a)^4}$

f) $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$ $\quad u=2x \quad u'=2 \quad v=x^2+2 \quad v'=2x$

$f'(x)=\frac{2(x^2+2)-4x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$

$u=4-2x^2 \quad u'=-4x$

$v=(x^2+2)^2 \quad v'=4x\cdot(x^2+2)$

$f''(x)=\frac{-4x\cdot(x^2+2)^2-4x\cdot(x^2+2)\cdot(4-2x^2)}{(x^2+2)^4}=\frac{-4x(x^2+2)-4x(4-2x^2)}{(x^2+2)^3}=\frac{4x^3-24x}{(x^2+2)^2}=\frac{4x(x^2-6)}{(x^2+2)^2}$

Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

Dokument mit 21 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen $f_n(x)$ mit Hilfe der Quotientenregel und vereinfache soweit wie möglich.

$f_1(x) = \frac{5x}{x+1}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{2x}{1+3x}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{1-x}{x+2}$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{sin(x)}{2x-1}$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{x+1}{x-1}$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = \frac{x^2}{8-x}$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = \frac{0{,}5-2x}{cos(x)}$	$f_7'(x) =$
$f_8(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2}{1-sin(x)}$.	$f_8'(x) =$

Aufgabe A2

Ordne den gegebenen Ableitungsfunktionen $f_n'(x)$ ihre ursprüngliche Ausgangsfunktion $f_n(x)$ zu.

$f_1'(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$	$f_{10}(x) = \frac{1-x^2}{3x+5}$
$f_2'(x) = \frac{x-3}{2x^2\cdot\sqrt{2x-3}}$	$f_{11}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$
$f_3'(x) = -\frac{2\cdot(x\cdot sin(2x-1)+\cos(2x-1))}{x^3}$	$f_{12}(x) = \frac{3sin(x)}{8x-1}$
$f_4'(x) = \frac{3\,cos(3x)\cdot(x-1)-sin(3x)}{(x-1)^2}$	$f_{13}(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
$f_5'(x) = \frac{2\cdot(4x+1)}{(x+4)^3}$	$f_{14}(x) = \frac{x^2-1}{(x+4)^2}$
$f_6'(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1$	$f_{15}(x) = \frac{sin(3x)}{x-1}$
$f_7'(x) = \frac{3\,cos(x)\cdot(8x-1)-24sin(x)}{(8x-1)^2}$	$f_{16}(x) = \frac{cos(2x-1)}{x^2}$
$f_8'(x) = -\frac{x-2}{2\sqrt{x}\cdot(x+2)^2}$	$f_{17}(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{2x}$
$f_9'(x) = -\frac{3x^2+10x+3}{(3x+5)^2}$	$f_{18}(x) = \frac{6x^2+x-3}{3x}$

Aufgabe A3

a) An welcher Stelle hat die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ den Wert $-0{,}5$?

b) Gib die Steigung der Tangente im Punkt $P(1|g(1)$ an für $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

c) An welchen Stellen stimmen die Funktionswerte der Ableitungen von h mit $h(x) = x^2$ und m mit $m(x) = -\frac{1}{x^2}$ überein? Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe A4

Die Funktion f mit $f(t) = \frac{2000t+200}{t+1}$; $t \geq 0$ beschreibt modellhaft die Entwicklung eines Tierbestandes auf einer Insel im Südpazifik (t: Zeit in Jahren seit Beobachtungsbeginn, $f(t)$: Anzahl der Tiere).
Bestimme die anfängliche momentane Änderungsrate m_0 des Bestandes. Wann hat die momentane Änderungsrate auf 10% von m_0 abgenommen?

Lösung A1

$f_1(x)=\frac{5x}{x+1}$	$f_1'(x)=\frac{5(x+1)-5x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$
$f_2(x)=\frac{2x}{1+3x}$	$f_2'(x)=\frac{2(1+3x)-6x}{(1+3x)^2}=\frac{2}{(1+3x)^2}$
$f_3(x)=\frac{1-x}{x+2}$	$f_3'(x)=\frac{-(x+2)-(1-x)}{(x+2)^2}=-\frac{3}{(x+2)^2}$
$f_4(x)=\frac{sin(x)}{2x-1}$	$f_4'(x)=\frac{cos(x)\cdot(2x-1)-2sin(x)}{(2x-1)^2}$
$f_5(x)=\frac{x+1}{x-1}$	$f_5'(x)=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$
$f_6(x)=\frac{x^2}{8-x}$	$f_6'(x)=\frac{2x(8-x)+x^2}{(8-x)^2}=\frac{-x^2+16x}{(x-8)^2}=-\frac{x^2-16x}{(x-8)^2}$
$f_7(x)=\frac{0{,}5-2x}{cos(x)}$	$f_7'(x)=\frac{-2\,cos(x)+(0{,}5-2x)sin(x)}{cos^2(x)}$
$f_8(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2}{1-sin(x)}$.	$f_8'(x)=\frac{x(1-sin(x))+\frac{1}{2}x^2cos(x)}{(1-sin(x))^2}$

Lösung A2

$f_1'(x)=\frac{2x^2+1}{x^2}$	$f_{18}(x)=\frac{6x^2+x-3}{3x}$
$f_2'(x)=\frac{x-3}{2x^2\cdot\sqrt{2x-3}}$	$f_{17}(x)=\frac{\sqrt{2x-3}}{2x}$
$f_3'(x)=-\frac{2\cdot(x\cdot sin(2x-1)+\cos(2x-1))}{x^3}$	$f_{16}(x)=\frac{cos(2x-1)}{x^2}$
$f_4'(x)=\frac{3\,cos(3x)\cdot(x-1)-sin(3x)}{(x-1)^2}$	$f_{15}(x)=\frac{sin(3x)}{x-1}$
$f_5'(x)=\frac{2\cdot(4x+1)}{(x+4)^3}$	$f_{14}(x)=\frac{x^2-1}{(x+4)^2}$
$f_6'(x)=\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1$	$f_{13}(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$
$f_7'(x)=\frac{3\,cos(x)\cdot(8x-1)-24sin(x)}{(8x-1)^2}$	$f_{12}(x)=\frac{3sin(x)}{8x-1}$
$f_8'(x)=-\frac{x-2}{2\sqrt{x}\cdot(x+2)^2}$	$f_{11}(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2}$
$f_9'(x)=-\frac{3x^2+10x+3}{(3x+5)^2}$	$f_{10}(x)=\frac{1-x^2}{3x+5}$

Lösung A3

a) $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ $\quad u=x+3 \quad u'=1 \quad v=2x \quad v'=2$

$f'(x)=\frac{2x-2(x+3)}{4x^2}=-\frac{3}{2x^2}$

$f'(x)=-0{,}5=-\frac{3}{2x^2}$

$-x^2=-3$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$

Die Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ hat in $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ den Wert $-0{,}5$.

b) $g(x)=\frac{x}{x+1}$ $\quad u=x \quad u'=1 \quad v=x+1 \quad v'=1$

$g'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$

$g'(1)=\frac{1}{4}$

Die Steigung der Tangente im Punkt $P(1|g(1)$ beträgt $m=\frac{1}{4}$.

c) $h(x) = x^2$ $\qquad h'(x) = 2x$

$m(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad m'(x) = \frac{2}{x^3}$

$h'(x) \cap m'(x)$

$2x = \frac{2}{x^3}$

$x^4 = 1$

$x_{1,2} = \pm 1$

$h'(1) = 2$ $\qquad m'(1) = 2$

$h'(-1) = -2$ $\qquad m'(-1) = -2$

Die Funktionswerte der Ableitungen von h und m stimmen für $x_{1,2} = \pm 1$ überein. Dies bedeutet, dass die Tangenten an h und m in $x_{1,2} = \pm 1$ jeweils parallel verlaufen.

Lösung A4

$f(t) = \frac{2000t+200}{t+1}$ $\qquad f'(t) = \frac{2000(t+1)-(2000t+200)}{(t+1)^2} = \frac{1800}{(t+1)^2}$

$m_0 = f'(0) = 1800$

$0{,}1 \cdot m_0 = 180$

$f'(t) = 180 = \frac{1800}{(t+1)^2}$

$180(t+1)^2 = 1800$

$(t+1)^2 = 10$

$|t+1| = \sqrt{10}$

$t_1 = \sqrt{10} - 1 \approx 2{,}16;\ \ t_2 = -\sqrt{10} - 1$

Wegen Aufgabenstellung $t \geq 0$ entfällt t_2.

Die anfängliche momentane Änderungsrate m_0 des Bestandes beträgt 1800 Tiere/Jahr.

Etwa nach 2 Jahren und 2 Monaten beträgt die momentane Änderungsrate nur noch 10% der anfänglichen Änderungsrate.

Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 18 Aufgaben

Aufgabe A1

Leite nach der Produktregel ab und vereinfache so weit wie möglich. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst.

a) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^3 + 1)$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot (4 - 0{,}8x^2)$

c) $f(t) = (3t^2 + 1) \cdot (1 - t^2)$

d) $f(x) = (x^3 + x^2) \cdot (1 - x)$

e) $f(r) = (1 + r^2)^2$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

Aufgabe A2

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Produktregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x - 1)$

b) $f(t) = (4t^2 - 1) \cdot \sqrt{t}$

c) $f(a) = \sqrt{a} \cdot (1 - a)$

d) $f(z) = (z^2 - 1) \cdot \sqrt{z}$

e) $f(t) = sin(t) \cdot cos(t)$

f) $f_a(t) = a(sin(at) \cdot cos(at) \cdot t^2)$

Aufgabe A3

Berechne die Steigung der Funktionen f_n an der angegebenen Stelle x_0.

a) $f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot (1 - x^3);\ \ x_0 = -1$

b) $f_2(x) = x \cdot (t^2 - t);\ \ x_0 = 2$

c) $f_3(x) = sin(x) \cdot (x^2 + 1);\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$

d) $f_4(x) = sin(2x) \cdot cos(x);\ \ x_0 = 0$

Aufgabe A4

An welcher Stelle verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel? Welche Steigung haben die Tangenten an dieser Stelle?

a) $f(x) = \sqrt{2 + (x - 1)^2}$ $\qquad g(x) = \left(f(x)\right)^2$

b) $f(x) = (sin(2x))^2;\ \ 0 \le x \le 1$ $\qquad g(x) = sin\left(1 - \sqrt{x}\right);\ \ 0 \le x \le 1$

Lösung A1

a) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^3 + 1)$ $\quad u = x^2 - 4 \quad u' = 2x \quad v = x^3 + 1 \quad v' = 3x^2$

$f'(x) = 2x \cdot (x^3 + 1) + 3x^2 \cdot (x^2 - 4) = 2x^4 + 2x + 3x^4 - 12x^2 = x \cdot (5x^3 - 12x + 2)$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot (4 - 0{,}8x^2)$ $\quad u = \frac{1}{2}x - 1 \quad u' = \frac{1}{2}$

$v = 4 - \frac{4}{5}x^2 \quad v' = -\frac{8}{5}x$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(4 - \frac{4}{5}x^2\right) - \frac{8}{5}x \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$

$= \frac{6x^2 - 8x - 10}{5}$

c) $f(t) = (3t^2 + 1) \cdot (1 - t^2)$ $\quad u = 3t^2 + 1 \quad u' = 6t$

$v = 1 - t^2 \quad v' = -2t$

$f'(t) = 6t \cdot (1 - t^2) - 2t \cdot (3t^2 + 1) = 2t \cdot (3 - 3t^2 - 3t^2 - 1)$

$= 4t \cdot (1 - 3t^2)$

d) $f(x) = (x^3 + x^2) \cdot (1 - x)$ $\quad u = x^3 + x^2 \quad u' = 3x^2 + 2x$

$v = 1 - x \quad v' = -1$

$f'(x) = (3x^2 + 2x) \cdot (1 - x) - (x^3 + x^2) = 3x^2 - 3x^3 + 2x - 2x^2 - x^3 - x^2$

$= -4x^3 + 2x = -2x \cdot (2x^2 - 1)$

e) $f(r) = (1 + r^2)^2$

$f'(r) = 2(1 + r^2) \cdot 2r = 4r \cdot (r^2 + 1)$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}}$

$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}x \cdot \sqrt{x}$

Lösung A2

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x - 1)$ $\quad u = \sqrt{x} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = 2x - 1 \quad v' = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x - 1) + 2\sqrt{x} = \frac{2x - 1 + 4x}{2\sqrt{x}} = \frac{6x - 1}{2\sqrt{x}}$

$u = \frac{6x - 1}{2} \quad u' = 3$

$v = x^{-\frac{1}{2}} \quad v' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{6x - 1}{4x\sqrt{x}} = \frac{12x - 6x + 1}{4x\sqrt{x}} = \frac{6x + 1}{4\sqrt{x}}$

b) $f(t) = (4t^2 - 1) \cdot \sqrt{t}$ $\quad u = 4t^2 - 1 \quad u' = 8t$

$v = \sqrt{t} \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$f'(t) = 8t \cdot \sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (4t^2 - 1) = 8t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{20t^2 - 1}{2\sqrt{t}}$

$u = 20t^2 - 1 \quad u' = 40t$

$v = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \quad v' = -\frac{1}{4t \cdot \sqrt{t}}$

$f''(t) = \frac{20t}{\sqrt{t}} - \frac{20t^2 - 1}{4t \cdot \sqrt{t}} = \frac{80t^2 - 20t^2 + 1}{4t \cdot \sqrt{t}} = \frac{60t^2 + 1}{4t\sqrt{t}}$

c) $f(a) = \sqrt{a} \cdot (1-a)$ $\quad u = \sqrt{a} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$v = 1 - a \quad v' = -1$

$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(1-a) - \sqrt{a} = \frac{1-a-2a}{2\sqrt{a}} = -\frac{3a-1}{2\sqrt{a}}$

$u = -(3a-1) \quad u' = -3$

$v = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} \quad v' = -\frac{1}{4a\sqrt{a}}$

$f''(a) = -\frac{3}{2\sqrt{a}} + \frac{3a-1}{4a\sqrt{a}} = \frac{-6a+3a-1}{4a\sqrt{a}} = -\frac{3a+1}{4a\sqrt{a}}$

d) $f(z) = (z^2-1) \cdot \sqrt{z}$ $\quad u = z^2 - 1 \quad u' = 2z$

$v = \sqrt{z} \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

$f'(z) = 2z\sqrt{z} + \frac{z^2-1}{2\sqrt{z}} = \frac{4z^2+z^2-1}{2\sqrt{z}} = \frac{5z^2-1}{2\sqrt{z}}$

$u = 5z^2 - 1 \quad u' = 10z$

$v = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}} \quad v' = -\frac{1}{4z\sqrt{z}}$

$f''(z) = \frac{10z}{2\sqrt{z}} - \frac{5z^2-1}{4z\sqrt{z}} = \frac{20z^2-5z^2+1}{4z\sqrt{z}} = \frac{15z^2+1}{4z\sqrt{z}}$

e) $f(t) = sin(t) \cdot cos(t)$ $\quad u = sin(t) \quad u' = cos(t)$

$v = cos(t) \quad v' = -sin(t)$

$f'(t) = cos^2(t) - sin^2(t)$

$f''(t) = -2\,cos(t)\,sin(t) - 2\,sin(t)\,cos(t) = -4\,sin(t)\,cos(t)$

f) $f_a(t) = a(sin(at) \cdot cos(at) \cdot t^2) = at^2 \cdot sin(at) \cdot cos(at)$

Wegen des Additionstheorems $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ ist

$(sin(at) \cdot cos(at) = sin(2at)$ und damit

$f_a(t) = at^2 \cdot sin(2at)$ $\quad u = at^2 \quad u' = 2at$

$v = sin(2at) \quad v' = 2acos(2at)$

$f_a{}'(t) = 2at \cdot sin(2at) + 2a^2t^2 \cdot cos(2at)$

$= 2at \cdot (sin(2at) + atcos(2at))$

$f_a{}''(t) = 2at(3a\,cos(2at) - 2a^2t \cdot sin(2at)) + 2a \cdot (sin(2at) + at \cdot cos(2at))$

$= (2a - 4a^3\,t^2)\,sin(2at) + 8a^2tcos(2at)$

Lösung A3

a) $f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot (1 - x^3)$ $\quad u = \frac{1}{x} \quad u' = -\frac{1}{x^2}$

$v = 1 - x^3 \quad v' = -3x^2$

$f_1{}'(x) = -\frac{(1-x^3)}{x^2} - \frac{3x^2}{x} = \frac{x^3-1-3x^3}{x^2} = -\frac{2x^3+1}{x^2}$ $\quad f_1{}'(-1) = 1$

b) $f_2(x) = x \cdot (t^2 - t)$

$f_2{}'(x) = t^2 - t$ $\quad f_2{}'(2) = t^2 - t$

c) $f_3(x) = sin(x) \cdot (x^2 + 1)$ $\quad u = sin(x) \quad u' = cos(x)$

$v = x^2 + 1 \quad v' = 2x$

$f_3{}'(x) = cos(x) \cdot (x^2 + 1) + 2x \cdot sin(x)$ $\quad f_3{}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

d) $f_4(x) = sin(2x) \cdot cos(x)$ $\quad u = sin(2x) \quad u' = 2cos(2x)$

$v = cos(x) \quad v' = -sin(x)$

$f_4{}'(x) = 2cos(2x) \cdot cos(x) - 2sin(2x) \cdot sin(x)$

$f_4{}'(0) = 2$

Lösung A4

a) $f(x) = \sqrt{2 + (x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-2(x-1)}{2\sqrt{2+(x-1)^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{2+(x-1)^2}}$

$g(x) = x^2 - 2x + 3$

$g'(x) = 2x - 2$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{x-1}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = 2(x-1)$

$x_0 = 1$

$g'(1) = 0$

An der Stelle $x_0 = 1$ verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von $m = 0$ parallel.

b) $f(x) = (\sin(2x))^2$

$f'(x) = 4\sin(2x) \cdot \cos(2x)$

$g(x) = \sin(1 - \sqrt{x})$

$g'(x) = -\frac{\cos(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$4sin(2x) \cdot cos(2x) = -\frac{\cos(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$

$4sin(2x) \cdot cos(2x) + \frac{\cos(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = 0$

$x_0 \approx 0{,}85;\ \ f'(0{,}85) = g'(0{,}85) \approx -0{,}54$

An der Stelle $x_0 \approx 0{,}85$ verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von $m \approx -0{,}54$ parallel.

Aufgabe A1

Bei einer Funktion f gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \neq 0$; ist differenzierbar und $f'(x) = x \cdot f(x)$.

a) Stelle $f''(x)$ und $f'''(x)$ durch $f(x)$ dar.

b) Zeige, dass der Graph von f an der Stelle $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente hat.

c) Begründe, warum es keine Stelle $f''(x) = 0$ geben kann.

Aufgabe A2

Der Graph einer Funktion f berührt die x-Achse im Punkt $P(2|0)$.

a) Zeige, dass dann auch der Graph der Funktion g mit $g(x) = x \cdot f(x)$ die x-Achse im Punkt P berührt.

b) Gibt drei Beispiele für solche Funktionen f und g an. Dabei sollen die folgenden Funktionstypen Berücksichtigung finden: Polynomfunktion, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktion.
Überprüfe deine Beispiele mit dem GTR.

Aufgabe A3

Welcher Fehler wurde beim Ableiten der Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot cos(x)$ gemacht?

a) $f'(x) = 3x^2\, cos(x) + x^3 sin(x)$ b) $f'(x) = x^3\, cos(x) - 3x^2 sin(x)$

Aufgabe A4

Eine Firma hat festgestellt, dass sie beim Verkauf von n Stück eines von ihr hergestellten Produktes einen Gewinn pro Stück von $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ Geldeinheiten macht.

a) Zeige, dass der Gewinn pro Stück mit wachsender Stückzahl abnimmt.

b) Zeige, dass der Gesamtgewinn mit wachsender Stückzahl zunimmt.

Aufgabe A5

Eine Ente landet auf einem See und schwimmt in Richtung eines Stegs. Ihre Entfernung vom Steg wird beschrieben durch die Funktion s mit $s(t) = \frac{8t^2+7}{9t^2+2}$; $0 \leq t \leq 17$ (t in Sekunden nach der Landung bis zum Ende des Beobachtungszeitraums, $s(t)$ in m).

a) Wie weit ist die Ente ursprünglich vom Steg entfernt?

b) Angenommen, die Ente schwimmt nach dieser Zeit ungebremst bis zum Steg weiter. Mit welcher Geschwindigkeit trifft die Ente auf den Steg?

Aufgabe A6

Beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen:

a) Hat der Graph von f die x-Achse als waagrechte Tangente, dann gilt dies auch für $x \neq 0$ für den Graphen g mit $g(x) = \frac{f(x)}{g}$.

b) Wenn die Funktion g monoton fällt, so ist die Funktion $\frac{1}{g}$ monoton steigend.

c) Wenn die Funktion g auf dem Intervall I monoton fallend und differenzierbar ist und keine Nullstellen hat, so ist die Funktion $\frac{1}{g}$ auf I monoton steigend.

Lösung A1

$f'(x) = x \cdot f(x)$

a) $f''(x)$ mit Produktregel:
$f''(x) = f(x) + x \cdot f'(x) = f(x) + x \cdot x \cdot f(x) = f(x) \cdot (x^2 + 1)$
$f'''(x)$ mit Produktregel aus $f''(x)$:
$f'''(x) = f'(x) \cdot (x^2 + 1) + 2x \cdot f(x) = x \cdot f(x) \cdot (x^2 + 1) + 2x \cdot f(x)$
$= f(x) \cdot (x \cdot (x^2 + 1) + 2x) = f(x) \cdot (x^3 + 3x)$

b) Wenn der Graph von f in $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente besitzen soll, muss gelten: $f'(x) = 0$.
$f'(x) = x \cdot f(x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_0 = 0$ **q.e.d.**

c) Nach Voraussetzung gilt: $f(x) \neq 0$
$f''(x) = f(x) \cdot (x^2 + 1)$
Da aber stets $(x^2 + 1) > 0$ gibt es keine Stelle $f''(x) = 0$.

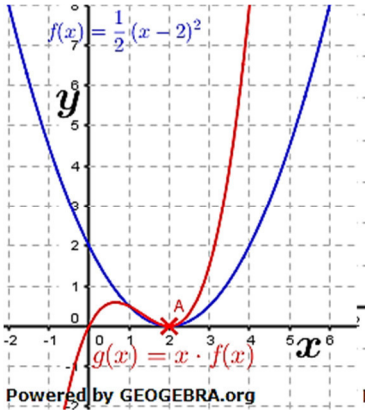
Lösung A2

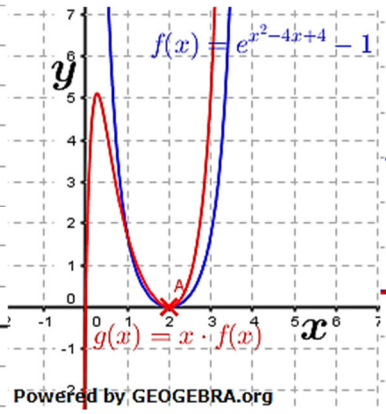
Nach Voraussetzung gilt $f(2) = 0$ (Nullstelle) und $f'(2) = 0$ (Berührpunkt, waagrechte Tangente).

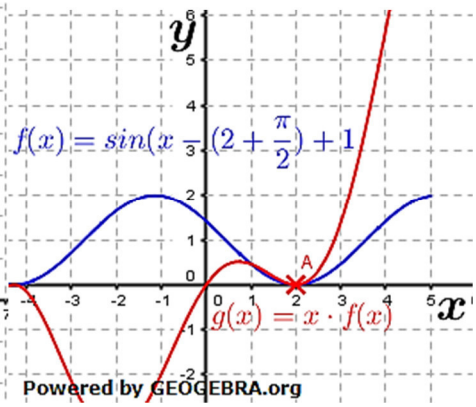
a) $g(2) = 2 \cdot f(2) = 0$
$g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$
$g'(2) = f(2) + 2 \cdot f'(2) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
Somit berührt auch $g(x) = x \cdot f(x)$ die x-Achse im Punkt P.

b) Nachfolgende Funktionen sind nur Beispiele, auch andere Funktionsgleichungen denkbar.

b) Polynomfunktion:
$f(x) = 2 \cdot (x - 2)^2$ $\quad g(x) = 2x \cdot (x - 2)^2$
Exponentialfunktion:
$f(x) = e^{x^2 - 4x + 4} - 1$ $\quad g(x) = x \cdot (e^{x^2 - 4x + 4} - 1)$
Trigonometrische Funktion
$f(x) = sin\left(x - (2 + \frac{\pi}{2})\right) + 1$ $\quad g(x) = x \cdot \left(sin\left(x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1\right)$







Lösung A3

a) $v = \cos(x)$; $v' = -\sin(x)$
Es muss heißen $f'(x) = 3x^2\, cos(x) - x^3 sin(x)$.

b) Mit $u = x^3$ und $v = cos(x)$ wurde fälschlicher Weise gebildet:
$f'(x) = u \cdot v + u' \cdot v'$

Lösung A4

a) $f(n) = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ ist der Gewinn für eine Produktionseinheit. Für wachsende n wird $f(n)$ immer kleiner, da $1 + \sqrt{n}$ immer größer wird.
Mathematischer Beweis:
$f'(n) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{n}}}{(1+\sqrt{n})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})^2}$. Die Steigung der Funktion f ist negativ für alle $n \in \mathbb{R}^+$, also streng monoton fallend, d. h., der Gewinn pro Produktionseinheit wird mit steigender Produktionszahl immer geringer.

b) Der Gesamtgewinn wird ausgedrückt durch $g(n) = n \cdot f(n)$.
$g'(n) = f(n) + n \cdot f'(n) = \frac{1}{1+\sqrt{n}} - \frac{n}{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})^2} = \frac{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})-n}{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})^2} = \frac{2\sqrt{n}+n}{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})^2}$
Die Steigung der Funktion g ist positiv für alle $n \in \mathbb{R}^+$, also streng monoton steigend, d. h., der Gesamtgewinn steigt mit wachsender Produktionszahl.

Lösung A5

a) Die Entfernung zum Steg ist $s(0) = \frac{7}{2} = 3{,}5\,m$.

b) Da die Geschwindigkeit die Ableitung des Weges nach der Zeit ist, benötigen wir zunächst $s'(t)$.
$s'(t) = v(t) = \frac{16t\cdot(9t^2+2)-18t\cdot(8t^2+7)}{(9t^2+2)^2} = \frac{144t^3+32t-144t^3-126t}{(9t^2+2)^2} = \frac{-94t}{(9t^2+2)^2}$
Es ist nach der Geschwindigkeit nach Ablauf der Beobachtungszeit gefragt, also wird $v(17)$ benötigt.
$|v(17)| = \frac{94\cdot 17}{(9\cdot 17^2+2)^2} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-11} \approx 0\,m/s$
Jetzt müssen wir lediglich noch prüfen, ob die Ente nach 17 Sekunden bereits den Steg erreicht hat, die Entfernung zum Steg ist also:
$d = 3{,}5 - s(17) = 3{,}5 - 0{,}89 \approx 2{,}6\,m$
Da die Ente nach 17 Sekunden noch etwa $2{,}6\,m$ vom Steg entfernt ist, jedoch keine Geschwindigkeit mehr hat, erreicht sie den Steg nie.

Lösung A6

a) Der Graph f berührt die x-Achse bedeutet $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$.
Mit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ erhalten wir $g(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} = 0$ als auch mit $g'(x) = \frac{f'(x)-x\cdot f(x)}{x^2}$
$g'(x_0) = \frac{f'(x_0)-x_0\cdot f(x_0)}{x_0^2} = 0$. Die Behauptung stimmt also.

b) Die Behauptung ist falsch. So ist z. B. $f(x) = -x$ streng monoton fallend, der Graph der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{x}$ aber nicht monoton steigend, denn $1 > -1$, aber $g(1) = -1 \ngtr g(-1) = 1$.

c) Die Behauptung ist richtig. Ist g auf I monton fallend, so ist g' auf $I < 0$. Mit $f = \frac{1}{g}$ ist $f'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$. Nun hat nach Aufgabenstellung g keine Nullstellen, sodass $g(x)$ in ganz I gebildet werden kann, also hat f' Lösungen in ganz I. Wegen $f' = -\frac{g'}{g^2}$ und $g' < 0$ ist $f' > 0$ in $x \in I$. Somit ist f monoton steigend.

Aufgabe A1

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Quotientenregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^4}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^5}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{5+\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \frac{3x^5-2x}{sin(x)}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{5x+\frac{1}{x}}$

f) $f(x) = \frac{5\sqrt{x}+3x}{5x}$

Aufgabe A2

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Quotientenregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache dein Ergebnis so weit wie möglich.

a) $f(x) = \frac{\frac{2}{3}x^3}{5x^2-x+7}$

b) $f(x) = \frac{\frac{2}{x^2}-1}{x+5}$

c) $f(x) = \frac{5\sqrt{x}+3x}{5x+7}$

d) $f(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{10}x}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{7x^5+x^2-2x}{x^7+3x}$

f) $f_a(t) = \frac{sin(at)+at}{t^2}$

Aufgabe A3

Berechne die Steigung der Funktionen f_n an der angegebenen Stelle x_0.

a) $f_1(x) = \frac{\frac{1}{x}+1}{3x+5}$; $x_0 = -1$

b) $f_2(x) = \frac{2x^6}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}$; $x_0 = 2$

c) $f_3(x) = \frac{\sqrt{x}}{5x^2+\frac{1}{x^2}}$; $x_0 = 1$

d) $f_4(x) = \frac{\frac{1}{8}x^3+\frac{6}{5}x}{\frac{2}{5}x-8}$; $x_0 = 0$

Aufgabe A4

An welcher Stelle verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel? Welche Steigung haben die Tangenten an dieser Stelle?

a) $f(x) = \frac{x+3x^2}{2x-1}$ $\quad g(x) = \frac{1}{(2x-1)}$

b) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2+8x}{x^2-4x}$ $\quad g(x) = 3x+2$

Lösung A1

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x-1)^4}$ $\quad u=\sqrt{x} \quad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad v=(x-1)^4 \quad v'=4(x-1)^3$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x-1)^4-4\sqrt{x}\cdot(x-1)^3}{(x-1)^8}=\frac{(x-1)^3\cdot\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}-4\sqrt{x}\right)}{(x-1)^8}=\frac{\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}-4\sqrt{x}\right)}{(x-1)^5}$$

$$=-\frac{2\cdot(7x+1)\cdot x^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^5}=-\frac{7x+1}{2\sqrt{x}\cdot(x-1)^5} \qquad u=-(7x+1) \qquad u'=-7$$

$$v=2\sqrt{x}\cdot(x-1)^5 \quad v'=\frac{(x-1)^5}{\sqrt{x}}+10\sqrt{x}\cdot(x-1)^4$$

$$f''(x)=\frac{-14\sqrt{x}\cdot(x-1)^5+(7x+1)\cdot\left((x-1)^4\left(10\sqrt{x}+\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)\right)}{4x\cdot(x-1)^{10}}=\frac{(x-1)^4\cdot\left(-14\sqrt{x}\cdot(x-1)+(7x+1)\left(10\sqrt{x}+\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)\right)}{4x\cdot(x-1)^{10}}$$

$$=\frac{-14x\sqrt{x}+14\sqrt{x}+70x\sqrt{x}+7\sqrt{x}(x-1)+10\sqrt{x}+\frac{x-1}{\sqrt{x}}}{4x\cdot(x-1)^6}=\frac{56x\sqrt{x}+14\sqrt{x}+7x\sqrt{x}-7\sqrt{x}+10\sqrt{x}+\frac{x-1}{\sqrt{x}}}{4x\cdot(x-1)^6}$$

$$=\frac{63x\sqrt{x}+17\sqrt{x}+\frac{x-1}{\sqrt{x}}}{4x\cdot(x-1)^6}=\frac{63x^2+17x+x-1}{4x\cdot\sqrt{x}\cdot(x-1)^6}=\frac{63x^2+18x-1}{4x\cdot\sqrt{x}\cdot(x-1)^6}$$

b) $f(x)=\frac{x^2}{(1-x)^5}$ $\quad u=x^2 \quad u'=2x$

$v=(1-x)^5 \quad v'=-5(1-x)^4$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(1-x)^5+5x^2\cdot(1-x)^4}{(1-x)^{10}}=\frac{(1-x)^4\cdot(5x^2+2x-2x^2)}{(1-x)^{10}}$$

$$=\frac{3x^2+2x}{(x-1)^6} \qquad u=3x^2+2x \qquad u'=6x+2$$

$v=(x-1)^6 \quad v'=6(x-1)^5$

$$f''(x)=\frac{(6x+2)\cdot(x-1)^6+6\cdot(x-1)^5\cdot(3x^2+2x)}{(1-x)^{12}}=\frac{(x-1)^5\cdot\left((6x+2)\cdot(x-1)+6\cdot(3x^2+2x)\right)}{(1-x)^{12}}$$

$$=\frac{6x-6x^2+2-2x+18x^2+12x}{(x-1)^7}=\frac{12x^2+16x+2}{(x-1)^7}$$

c) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{5+\sqrt{x}}$ $\quad u=\sqrt{x} \quad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v=5+\sqrt{x} \quad v'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(5+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}{(5+\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{5}{2\sqrt{x}}}{(5+\sqrt{x})^2}=\frac{5}{2\sqrt{x}(5+\sqrt{x})^2}$$

$u=5 \quad u'=0$

$v=2\sqrt{x}(5+\sqrt{x})^2 \quad v'=\frac{1}{\sqrt{x}}(5+\sqrt{x})^2+2(5+\sqrt{x})$

$$f''(x)=-\frac{\frac{5}{\sqrt{x}}(5+\sqrt{x})^2+10(5+\sqrt{x})}{4x(5+\sqrt{x})^4}=-\frac{(5+\sqrt{x})\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{x}}(5+\sqrt{x})+10\right)}{4x(5+\sqrt{x})^4}=-\frac{\frac{25}{\sqrt{x}}+15}{4x(5+\sqrt{x})^3}$$

$$=-\frac{25+15\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(5+\sqrt{x})^3}$$

d) $f(x)=\frac{3x^5-2x}{sin(x)}$ $\quad u=3x^5-2x \quad u'=15x^4-2$

$v=sin(x) \quad v'=cos(x)$

$$f'(x)=\frac{(15x^4-2)\cdot\sin(x)-(3x^5-2x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$u=(15x^4-2)\cdot sin(x)-(3x^5-2x)\cdot cos(x)$

$u'=60x^3\cdot sin(x)+(15x^4-2)\cdot cos(x)-(15x^4-2)\cdot cos(x)+(3x^5-2x)\cdot sin(x)$

$=sin(x)\cdot(60x^3+3x^5-2x) \qquad v=sin^2(x) \qquad v'=2sin(x)cos(x)$

$$f''(x)=\frac{\sin^2(x)\cdot(3x^5+60x^3-2x)-(30x^4-4)\cdot\sin^2(x)\cdot cos(x)+(6x^5-4x)\sin(x)\cos^2(x)}{\sin^4(x)}$$
$$=\frac{\sin(x)\cdot(\sin(x)\cdot(3x^5+60x^3-2x)-(30x^4-4)\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+(6x^5-4x)\cdot\cos^2(x))}{\sin^4(x)}$$
$$=\frac{\sin(x)\cdot(3x^5+60x^3-2x)-(30x^4-4)\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+(6x^5-4x)\cdot\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$$

e) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{5x+\frac{1}{x}}$ $\quad u=\sqrt{x}$ $\quad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v=5x+\frac{1}{x}$ $\quad v'=5-\frac{1}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(5x+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x}\cdot\left(5-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(5x+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(5x+\frac{1}{x}\right)-2\sqrt{x}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)}{2\cdot\left(5x+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(5x+\frac{1}{x}\right)-2\sqrt{x}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)}{2\left(\frac{5x^2+1}{x}\right)^2}$$
$$=\frac{x^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(5x+\frac{1}{x}\right)-2\sqrt{x}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{2\cdot(5x^2+1)^2}=\frac{5x^2\sqrt{x}+\sqrt{x}-10x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{2\cdot(5x^2+1)^2}=\frac{-5x^2\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{2\cdot(5x^2+1)^2}$$
$$=-\frac{\sqrt{x}(5x^2-3)}{2\cdot(5x^2+1)^2}$$

$u=\sqrt{x}(3-5x^2)$ $\quad u'=\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{25}{2}x\sqrt{x}$

$v=2\cdot(5x^2+1)^2$ $\quad v'=40x\cdot(5x^2+1)$

$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{25}{2}x\sqrt{x}\right)\cdot(5x^2+1)^2\right)-40x\sqrt{x}\cdot(5x^2+1)\cdot(3-5x^2)}{4\cdot(5x^2+1)^4}$$
$$=\frac{(5x^2+1)\cdot\left(\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-25x\sqrt{x}\right)\cdot(5x^2+1)-40x\sqrt{x}\cdot(3-5x^2)\right)}{4\cdot(5x+1)^4}$$
$$=\frac{\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-25x\sqrt{x}\right)\cdot(5x^2+1)-40x\sqrt{x}\cdot(3-5x^2)}{4\cdot(5x^2+1)^3}=\frac{\frac{15x^2}{\sqrt{x}}-125x^3\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-25x\sqrt{x}-120x\sqrt{x}+200x^3\sqrt{x}}{4\cdot(5x^2+1)^3}$$
$$=\frac{15x^2-125x^4+3-25x^2-120x^2+200x^4}{4\sqrt{x}\cdot(5x+1)^3}=\frac{75x^4-130x^2+3}{4\sqrt{x}\cdot(5x+1)^3}$$

f) $f(x)=\frac{5\sqrt{x}+3x}{5x}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{5}$

$f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$f''(x)=\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

Lösung A2

a) $f(x)=\frac{\frac{2}{3}x^3}{5x^2-x+7}$ $\quad u=\frac{2}{3}x^3$ $\quad u'=2x^2$

$v=5x^2-x+7$ $\quad v'=10x-1$

$$f'(x)=\frac{2x^2\cdot(5x^2-x+7)-\frac{2}{3}x^3\cdot(10x-1)}{(5x^2-x+7)^2}=\frac{10x^4-2x^3+14x^2-\frac{20}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3}{(5x^2-x+7)^2}$$
$$=\frac{\frac{10}{3}x^4-\frac{4}{3}x^3+14x^2}{(5x^2-x+7)^2}=\frac{10x^4-4x^3+42x^2}{3\cdot(5x^2-x+7)^2}$$

b) $f(x)=\frac{\frac{2}{x^2}-1}{x+5}$ $\quad u=\frac{2}{x^2}-1$ $\quad u'=-\frac{4}{x^3}$

$v=x+5$ $\quad v'=1$

$$f'(x)=\frac{-\frac{4}{x^3}\cdot(x+5)-\frac{2}{x^2}+1}{(x+5)^2}=\frac{-\frac{4}{x^2}-\frac{20}{x^3}-\frac{2}{x^2}+1}{(x+5)^2}=\frac{-6x-20+x^3}{x^3\cdot(x+5)^2}=\frac{x^3-6x-20}{x^3\cdot(x+5)^2}$$

$f''(x)=\frac{60}{x^4}+\frac{4}{x^3}$

c) $f(x)=\frac{5\sqrt{x}+3x}{5x+7}$ $\quad u=5\sqrt{x}+3x \quad u'=\frac{5}{2\sqrt{x}}+3$

$v=5x+7 \quad v'=5$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{5}{2\sqrt{x}}+3\right)\cdot(5x+7)-5\cdot(5\sqrt{x}+3x)}{(5x+7)^2}=\frac{\frac{25x}{2\sqrt{x}}+15x+\frac{35}{2\sqrt{x}}+21-25\sqrt{x}-15x}{(5x+7)^2}$$

$$=\frac{\frac{25x+35+42\sqrt{x}-50x}{2\sqrt{x}}}{(5x+7)^2}=\frac{42\sqrt{x}-25x+35}{2\sqrt{x}\cdot(5x+7)^2}$$

d) $f(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{10}x}{\sqrt{x}}$ $\quad u=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{10}x \quad u'=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{10}$

$v=\sqrt{x} \quad v'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{10}\right)\cdot\sqrt{x}-\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{10}x\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x\cdot\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{10}x}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{10}x+\frac{1}{x^2}}{2x\sqrt{x}}=\frac{40+x^3+10}{20x^3\sqrt{x}}=\frac{x^3+50}{20x^3\sqrt{x}}$$

e) $f(x)=\frac{7x^5+x^2-2x}{x^7+3x}$ $\quad u=7x^5+x^2-2x \quad u'=35x^4+2x-2$

$v=x^7+3x \quad v'=7x^6+3$

$$f'(x)=\frac{(35x^4+2x-2)\cdot(x^7+3x)-(7x^5+x^2-2x)\cdot(7x^6+3)}{(x^7+3x)^2}$$

$$=\frac{35x^{11}+105x^5+2x^8+6x^2-2x^7-6x-(49x^{11}+7x^8-14x^7+21x^5+3x^2-6x)}{(x^7+3x)^2}$$

$$f'^{(x)}=-\frac{14x^{11}+5x^8-12x^7-84x^5-3x^2}{(x^7+3x)^2}=-\frac{14x^9+5x^6-12x^5-84x^3-3}{(x^6+3)^2}$$

f) $f_a(t)=\frac{sin(at)+at}{t^2}$ $\quad u=sin(at)+at \quad u'=a\cdot cos(at)+a$

$v=t^2 \quad v'=2t$

$$f_a{}'(t)=\frac{(a\cdot cos(at)+a)\cdot t^2-2t\cdot(\sin(at)+at)}{t^4}=\frac{t\cdot(at\cdot cos(at)+at-2\sin(at)-2at)}{t^4}$$

$$=\frac{at\cdot\cos(at)-2\sin(at)-at}{t^3}$$

Lösung A3

a) $f_1(x)=\frac{\frac{1}{x}+1}{3x+5}$ $\quad u=\frac{1}{x}+1 \quad u'=-\frac{1}{x^2}$

$v=3x+5 \quad v'=3$

$$f_1{}'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot(3x+5)-3\cdot(\frac{1}{x}+1)}{(3x+5)^2} \qquad f_1{}'(-1)=-\frac{1}{2}$$

b) $f_2(x)=\frac{2x^6}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}$ $\quad u=2x^6 \quad u'=12x^5$

$v=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4} \quad v'=-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}$

$$f_2{}'(x)=\frac{12x^5\cdot\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)-2x^6\cdot\left(-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}\right)}{\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)^2} \qquad f_2{}'(2)=8192$$

c) $f_3(x)=\frac{\sqrt{x}}{5x^2+\frac{1}{x^2}}$ $\quad u=\sqrt{x} \quad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v=5x^2+\frac{1}{x^2} \quad v'=10x-\frac{2}{x^3}$

$$f_3{}'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(5x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\sqrt{x}\cdot\left(10x-\frac{2}{x^3}\right)}{\left(5x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2} \qquad f_3{}'^{(1)}=-\frac{5}{36}$$

d) $f_4(x) = \frac{\frac{1}{8}x^3+\frac{6}{5}x}{\frac{2}{5}x-8}$ $\quad u = \frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x \quad u' = \frac{3}{8}x^2 + \frac{6}{5}$

$v = \frac{2}{5}x - 8 \quad v' = \frac{2}{5}$

$f_4{}'(x) = \frac{\left(\frac{3}{8}x^2+\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x-8\right)-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{8}x^3+\frac{6}{5}x\right)}{\left(\frac{2}{5}x-8\right)^2}$ $\quad f_4{}'(0) = -\frac{3}{20}$

Lösung A4

a) $f(x) = \frac{x+3x^2}{2x-1}$ $\quad u = x + 3x^2 \quad u' = 1 + 6x$

$v = 2x - 1 \quad v' = 2$

$f'(x) = \frac{(1+6x)\cdot(2x-1)-2\cdot(x+3x^2)}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2-6x-1}{(2x-1)^2}$

$g(x) = \frac{1}{(2x-1)}$

$g'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{6x^2-6x-1}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}$

$6x^2 - 6x + 1 = 0 \quad | \quad :6$

$x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}$

$m_1 = g'\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}\right) \approx -1 \qquad m_2 = g'\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}\right) \approx -0{,}3$

An den Stellen $x_1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}$ verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von $m_1 \approx -1$ und $m_2 \approx -0{,}3$ parallel.

b) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2+8x}{x^2-4x}$ $\quad u = \frac{1}{2}x^2 + 8x \quad u' = x + 8$

$v = x^2 - 4x \quad v' = 2x - 4$

$f'(x) = \frac{(x+8)\cdot(x^2-4x)-\left(\frac{1}{2}x^2+8x\right)\cdot(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = \frac{10}{(x-4)^2}$

$g(x) = 3x + 2$

$g'(x) = 3$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{10}{(x-4)^2} = 3$

$(x-4)^2 = \frac{10}{3}$

$|x-4| = \sqrt{\frac{10}{3}}$

$x_1 = 4 + \sqrt{\frac{10}{3}}; \quad x_2 = 4 - \sqrt{\frac{10}{3}}$

An den Stellen $x_1 = 4 + \sqrt{\frac{10}{3}}$ und $x_1 = 4 - \sqrt{\frac{10}{3}}$ verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von $m = 3$ parallel.

Aufgabe A1

Leite mit Hilfe der Quotienten- und der Kettenregel ab.

a) $f(x) = \frac{x}{sin(3x)}$

b) $f(x) = \frac{(3x+4)^2}{sin(x)}$

c) $f(x) = \frac{x^{-1}}{2x+3}$

d) $f(x) = \frac{(5-4x)^3}{1-4x}$

e) $f(x) = \frac{(5-4x)^{-3}}{x^{-2}}$

f) $f(x) = \frac{3x}{cos(2x)}$

g) $f(x) = \frac{3x}{(sin(x))^2}$

h) $f(x) = \frac{0{,}5x^2}{\sqrt{4-x}}$

Aufgabe A2

a) Wo steckt der Fehler?

$f(x) = \frac{2x-8}{sin(x)}$; $f'(x) = -\frac{(2x-8)\cdot cos(x)}{sin^2(x)}$

b) Ergänze: $g(x) = \frac{2x-3}{(8-x)^2}$; $g'(x) = \frac{2\cdot(8-x)\cdot(2x-3)+\square}{(8-x)^{\square}}$

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

a) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.

b) Welche Steigung hat die Tangente an den Graphen im Punkt $P(1|f(1))$?

c) In welchen Punkten hat der Graph von f waagrechte Tangenten?

d) Skizziere den Graphen von f und überprüfe ihn mit dem GTR.

Aufgabe A4

a) Bilde die erste Ableitung von

$f(x) = \frac{2x-3}{cos(x)}$; $g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$; $h(x) = \frac{(2x-3)^3}{3x}$; $i(x) = \frac{1}{x\cdot sin(x)}$.

b) In welchen Punkten hat der Graph von g waagrechte Tangenten?

c) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von h mit der x-Achse.

d) Welche Steigungen haben die Tangenten an den Graphen von h in den Schnittpunkten mit der x-Achse?

Aufgabe A5

Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$ für

$f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$; $f(x) = \frac{x}{g'(x)}$; $f(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

Lösung A1

a) $f(x) = \frac{x}{sin(3x)}$ $\quad u = x \quad u' = 1$

$v = sin(3x) \quad v' = 3cos(3x)$

$f'(x) = \frac{\sin(3x) - 3x cos(3x)}{(\sin(3x))^2}$

b) $f(x) = \frac{(3x+4)^2}{sin(x)}$ $\quad u = (3x+4)^2 \quad u' = 6(3x+4)$

$v = sin(x) \quad v' = cos(x)$

$f'(x) = \frac{6(3x+4)\, sin(x) - (3x+4)^2 cos(x)}{sin^2(x)}$

$= \frac{(3x+4)\cdot(6\cdot sin(x) - 3x\cdot cos(x) - 4\, cos(x))}{sin^2(x)}$

c) $f(x) = \frac{x^{-1}}{2x+3}$ $\quad u = x^{-1} \quad u' = -x^{-2}$

$v = (2x+3) \quad v' = 2$

$f'(x) = \frac{-x^{-2}\cdot(2x+3) - 2x^{-1}}{(2x+3)^2} = \frac{-\frac{2x+3}{x^2} - \frac{2}{x}}{(2x+3)^2} = \frac{-2x-3-2x}{x^2\cdot(2x+3)^2} = -\frac{4x+3}{x^2\cdot(2x+3)^2}$

d) $f(x)\frac{(5-4x)^3}{1-4x}$ $\quad u = (5-4x)^3 \quad u' = -12(5-4x)^2$

$v = 1-4x \quad v' = -4$

$f'(x) = \frac{-12(5-4x)^2\cdot(1-4x) + 4\cdot(5-4x)^3}{(1-4x)^2} = \frac{4(5-4x)^2\cdot\left(1-3(5-4x)\cdot(1-4x)\right)}{(1-4x)^2}$

$= \frac{4(5-4x)^3 - 12(1-4x)(5-4x)^2}{(1-4x)^2} = \frac{4(5-4x)^2\cdot\left(5-4x-3\cdot(1-4x)\right)}{(1-4x)^2}$

$= \frac{4(5-4x)^2\cdot(2+8x)}{(1-4x)^2} = \frac{8(5-4x)^2\cdot(4x+1)}{(1-4x)^2}$

e) $f(x) = \frac{(5-4x)^{-3}}{x^{-2}} = \frac{x^2}{(5-4x)^3}$ $\quad u = x^2 \quad u' = 2x$

$v = (5-4x)^3 \quad v' = -12(5-4x)^2$

$f'(x) = \frac{2x\cdot(5-4x)^3 + 12x^2(5-4x)^2}{(5-4x)^6} = \frac{(5-4x)^2\cdot\left(2x\cdot(5-4x) + 12x^2\right)}{(5-4x)^6}$

$= \frac{10x - 8x^2 + 12x^2}{(5-4x)^4} = \frac{4x^2+10x}{(5-4x)^4}$

f) $f(x) = \frac{3x}{cos(2x)}$ $\quad u = 3x \quad u' = 3$

$v = cos(2x) \quad v' = -2sin(2x)$

$f'(x) = \frac{3\cos(2x) + 6x sin(2x)}{(\cos(2x))^2}$

g) $f(x) = \frac{3x}{(sin(x))^2}$ $\quad u = 3x \quad u' = 3$

$v = (sin(x))^2 \quad v' = 2\cdot sin(x)\cdot cos(x)$

$f'(x) = \frac{3(sin(x))^2 - 6x sin(x)\, cos(x)}{(sin(x))^4} = \frac{3sin(x)\cdot\left(sin(x) - 2x cos(x)\right)}{(sin(x))^4}$

$= \frac{3\left(sin(x) - 2x cos(x)\right)}{(sin(x))^3}$

h) $f(x) = \frac{0{,}5x^2}{\sqrt{4-x}}$ $\quad u = 0{,}5x^2 \quad u' = x$

$v = \sqrt{4-x} \quad v' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{4-x}+\frac{0{,}5x^2}{2\sqrt{4-x}}}{4-x} = \frac{2x(4-x)+0{,}5x^2}{2(4-x)\cdot\sqrt{4-x}} = -\frac{\frac{3}{2}x^2-8x}{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= -\frac{3x^2-16x}{4(4-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Lösung A2

a) Es wurde nur $-v' \cdot u$ gebildet und die Multiplikation $u' \cdot v$ wurde vergessen.

b) $g'(x) = \frac{2\cdot(8-x)^2+2\cdot(8-x)\cdot(2x-3)}{(8-x)^2}$

Lösung A3

$f(x) = f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$

a) Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse mithilfe von $f(x) = 0$:

$\frac{x-1}{\sqrt{x}} = 0$

$x_0 = 1$

b) Steigung der Tangente in $P(1|f(1))$:

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ $\quad u = x-1 \quad u' = 1$

$v = \sqrt{x} \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x}$

$f'(1) = 1$

Die Tangente in $P(1|f(1))$ hat die Steigung $m = 1$.

c) Waagrechte Tangenten mit $f'(x) = 0$:

$\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} = 0 \quad | \cdot x$

$\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) = 0 \quad | \cdot 2\sqrt{x}$

$2x - x + 1 = 0$

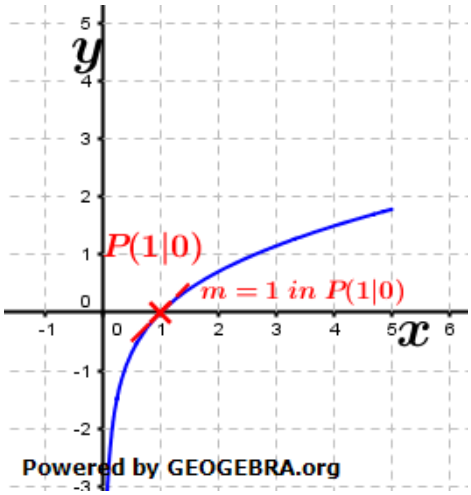
$x + 1 = 0$

$x_0 = -1$

$f(-1)$ hat keine Lösung, da $\sqrt{-1}$ in $\mathbb{R}$ nicht existiert

Der Graph von f hat keine waagrechte Tangente.

d)



Lösung A4

a) $f(x) = \frac{2x-3}{cos(x)}$

$f'(x) = \frac{2\,cos(x)+(2x-3)sin(x)}{cos^2(x)}$

$h(x) = \frac{(2x-3)^3}{3x}$

$h'(x) = \frac{(2x-3)^2\cdot(4x+3)}{3x^2}$

$g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

$g'(x) = -\frac{x+1}{(x-1)^3}$

$i(x) = \frac{1}{x\cdot sin(x)}$

$i'(x) = \frac{sin(x)+xcos(x)}{x^2\cdot sin^2(x)}$

b) $g'(x) = 0$

$-\frac{x+1}{(x-1)^3} = 0$

$x_1 = -1$

$g(-1) = -\frac{1}{4}$

Der Graph von g hat in $P(-1|-\frac{1}{4})$ eine waagrechte Tangente.

c) $h(x) = 0$

$\frac{(2x-3)^3}{3x} = 0 \quad | \quad \cdot 3x$

$(2x-3)^3 = 0 \quad | \quad \sqrt[3]{}$

$2x-3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

Der Graph von h schneidet die x-Achse in $x_0 = \frac{3}{2}$.

d) $h'\left(\frac{3}{2}\right)$

$h'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Lösung A5

$f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$

$f'(x) = \frac{2x\cdot g(x)-x^2\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

$f''(x) = \frac{2\cdot g(x)+2xg'(x)-2x\cdot g'(x)-x^2g''(x)}{(g(x))^4}$

$= \frac{2\cdot g(x)-x^2g''(x)}{(g(x))^4}$

$f(x) = \frac{x}{g'(x)}$

$f'(x) = \frac{-x\cdot g''(x)}{(g'(x))^2}$

$f''(x) = \frac{-g''(x)-xg'''(x)}{(g'(x))^4}$

$f(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$

$f'(x) = \frac{(g'(x))^2-g(x)\cdot g''(x)}{(g'(x))^2} = 1-\frac{g(x)\cdot g''(x)}{(g'(x))^2}$

$f''(x) = -\frac{g'(x)\cdot g''(x)+g(x)\cdot g'''(x)}{(g'(x))^4}$