

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Produkt- und Quotientenregel

Level 1 – Grundlagen – Blatt 4

Dokument mit 15 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. Ableitung der nachfolgend gegebenen Funktionsgleichungen mit der Produktregel und der Quotientenregel. Forme für die Quotientenregel die negativen Hochzahlen in positive Hochzahlen um. Gib an, welche Berechnungsart du für die jeweilige Lösung als geeignetste betrachtest.

- | | |
|---|---|
| a) $f_1(x) = 3x^2 \cdot (x + 3)^{-1}$ | b) $f_2(x) = (2x + 3) \cdot x^{-2}$ |
| c) $f_3(x) = 4x \cdot (x^3 + 3x^2)^{-1}$ | d) $f_4(x) = (x^3 - 4x) \cdot (7x^2)^{-1}$ |
| e) $f_5(x) = (3x^2 - x^5) \cdot (x + 1)^{-1}$ | f) $f_6(x) = (x^2 + x) \cdot (7x^3 - x)^{-1}$ |

**Aufgabe A2**

Wandle die folgenden Terme in eine sinnvolle Bruchschreibweise, bestimme die Definitionsmenge und berechne die 1. Ableitung mit Hilfe der Quotientenregel und vereinfache soweit wie möglich.

- | | |
|--|---|
| a) $f_1(x) = x \cdot (x + 3)^{-1}$ | b) $f_2(x) = x^{-2} \cdot (x - 3)$ |
| c) $f_3(x) = (3x^3 + x^2) \cdot (5x)^{-5}$ | d) $f_4(x) = (2x)^{-3} \cdot (3x^2 - x)$ |
| e) $f_5(x) = (x^5 - x^4)^{-3} \cdot 2x^3$ | f) $f_6(x) = (2x^4 + 1) \cdot (8 + x^3)^{-2}$ |
| g) $f_7(x) = (3x - x^5) \cdot (5x)^{-4}$ | h) $f_8(x) = (x - 2)^{-1} \cdot (x - 2)^{-1}$ |

Aufgabe A3

Berechne die Funktionswerte und die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{4-x}{2-x}$ an den Stellen $-2; 0; 1,5; 2,5; 6$. Skizziere den Graphen von f mithilfe der berechneten Punkte und den zugehörigen Tangenten. Kontrolliere mit dem GTR.

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Produkt- und Quotientenregel

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 4

Lösung A1

a) Produktregel: $f_1(x) = 3x^2 \cdot (x+3)^{-1}$
 $f_1'(x) = 6x \cdot (x+3)^{-1} - 3x^2 \cdot (x+3)^{-2}$

Quotientenregel: $f_1(x) = \frac{3x^2}{x+3}$
 $f_1'(x) = \frac{6x \cdot (x+3) - 3x^2}{(x+3)^2} = \frac{3x^2 + 18x}{(x+3)^2}$

b) Produktregel: $f_2(x) = (2x+3) \cdot x^{-2}$
 $f_2'(x) = 2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot (2x+3) \cdot x^{-3}$

Quotientenregel: $f_2(x) = \frac{2x+3}{x^2}$
 $f_2'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x+3)}{x^4} = -\frac{2x^2 + 6x}{x^4} = -\frac{2x+6}{x^3}$

c) Produktregel: $f_3(x) = 4x \cdot (x^3 + 3x^2)^{-1}$
 $f_3'(x) = 4 \cdot (x^3 + 3x^2)^{-1} + 4x \cdot (x^3 + 3x^2)^{-2}$

Quotientenregel: $f_3(x) = \frac{4x}{x^3 + 3x^2}$
 $f_3'(x) = \frac{4(x^3 + 3x^2) - 4x(3x^2 + 6x)}{x^4 \cdot (x+3)^2} = \frac{4x^3 + 12x^2 - 12x^3 - 24x^2}{x^4 \cdot (x+3)^2} = \frac{-8x^3 - 12x^2}{x^4 \cdot (x+3)^2} = -\frac{12+8x}{x^2 \cdot (x+3)^2}$

d) Produktregel: $f_4(x) = (x^3 - 4x) \cdot (7x^2)^{-1}$
 $f_4'(x) = (3x^2 - 4) \cdot (7x^2)^{-1} + 14x \cdot (x^3 - 4x) \cdot (7x^2)^{-2}$

Quotientenregel: $f_4(x) = \frac{x^3 - 4x}{7x^2}$
 $f_4'(x) = \frac{(3x^2 - 4) \cdot 7x^2 - 14x(x^3 - 4x)}{49x^4} = \frac{21x^4 - 28x^2 - 14x^4 + 56x^2}{49x^4} = \frac{7x^2 + 28}{49x^2} = \frac{x^2 + 4}{7x^2}$

e) Produktregel: $f_5(x) = (3x^2 - x^5) \cdot (x+1)^{-1}$
 $f_5'(x) = (6x - 5x^4) \cdot (x+1)^{-1} + (3x^2 - x^5) \cdot (x+1)^{-2}$

Quotientenregel: $f_5(x) = \frac{3x^2 - x^5}{x+1}$
 $f_5'(x) = \frac{(6x - 5x^4) \cdot (x+1) - (3x^2 - x^5)}{(x+1)^2} = \frac{6x^2 + 6x - 5x^5 - 5x^4 - 3x^2 + x^5}{(x+1)^2} = \frac{-4x^5 - 5x^4 + 3x^2 + 6x}{(x+1)^2}$

f) Produktregel: $f_6(x) = (x^2 + x) \cdot (7x^3 - x)^{-1}$
 $f_6'(x) = (2x + 1) \cdot (7x^3 - x)^{-1} + (21x^2 - 1) \cdot (x^2 + x) \cdot (7x^3 - x)^{-2}$

Quotientenregel: $f_6(x) = \frac{x^2 + x}{7x^3 - x}$
 $f_6'(x) = \frac{(2x+1) \cdot (7x^3 - x) - (21x^2 - 1) \cdot (x^2 + x)}{x^2 \cdot (7x^2 - 1)^2} = \frac{14x^4 - 2x^2 + 7x^3 - x - (21x^4 + 21x^3 - x^2 - x)}{x^2 \cdot (7x^2 - 1)^2}$
 $= \frac{-7x^4 - 14x^3 - x^2}{x^2 \cdot (7x^2 - 1)^2} = -\frac{7x^2 + 14x + 1}{(7x^2 - 1)^2}$

Lösung A2

a) $f_1(x) = \frac{x}{x+3}; \quad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$f_1'(x) = \frac{x+3-x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$$

b) $f_2(x) = \frac{x-3}{x^2}; \quad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f_2'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-3)}{x^4} = \frac{-x^2 + 6x}{x^4} = -\frac{x-6}{x^3}$$

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Produkt- und Quotientenregel

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 4

c) $f_3(x) = \frac{3x^3+x^2}{(5x)^5}; \quad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f_3'(x) = \frac{(9x^2+2x) \cdot (5x)^5 - 25(3x^3+x^2) \cdot (5x)^4}{(5x)^{10}} = \frac{(5x)^4 \cdot ((9x^2+2 \cdot x) \cdot 5x - 25 \cdot (3x^3+x^2))}{(5x)^{10}} = -\frac{5x^2(6x+3)}{(5x)^6}$$

$$= -\frac{6x+3}{625x^4}$$

d) $f_4(x) = \frac{3x^2-x}{8x^3}; \quad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f_4'(x) = \frac{(6x-1)8x^3 - 24x^2(3x^2-x)}{64x^6} = \frac{48x^4 - 8x^3 - 72x^4 + 24x^3}{64x^6} = \frac{8x^3(-3x+2)}{64x^6} = -\frac{3x-2}{8x^3}$$

e) $f_5(x) = \frac{2x^3}{(x^5-x^4)^3}; \quad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$$f_5'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^5-x^4)^3 - 6x^3 \cdot (x^5-x^4)^2 \cdot (5x^4-4x^3)}{(x^5-x^4)^6} = \frac{(x^5-x^4)^2 \cdot (6x^2 \cdot (x^5-x^4) - 6x^3 \cdot (5x^4-4x^3))}{(x^5-x^4)^6}$$

$$= \frac{6x^7 - 6x^6 - 30x^7 + 24x^6}{(x^5-x^4)^4} = \frac{-24x^7 + 18x^6}{x^{16}(x-1)^4} = -\frac{24x-18}{x^{10}(x-1)^4}$$

f) $f_6(x) = \frac{2x^3}{(x^5-x^4)^3}; \quad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$$f_6'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^5-x^4)^3 - 6x^3 \cdot (x^5-x^4)^2 \cdot (5x^4-4x^3)}{(x^5-x^4)^6} = \frac{(x^5-x^4)^2 \cdot (6x^2 \cdot (x^5-x^4) - 6x^3 \cdot (5x^4-4x^3))}{(x^5-x^4)^6}$$

$$= \frac{6x^7 - 6x^6 - 30x^7 + 24x^6}{(x^5-x^4)^4} = \frac{-24x^7 + 18x^6}{x^{16}(x-1)^4} = -\frac{24x-18}{x^{10}(x-1)^4}$$

g) $f_7(x) = \frac{3x-x^5}{(5x)^4}; \quad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f_7'(x) = \frac{(3-5x^4) \cdot (5x)^4 - 20 \cdot (5x)^3 \cdot (3x-x^5)}{(5x)^8} = \frac{(5x)^3 \cdot (5x \cdot (3-5x^4) - 20 \cdot (3x-x^5))}{(5x)^3 \cdot (5x)^5}$$

$$= \frac{15x-25x^5-60x+20x^5}{(5x)^5} = \frac{-5x^5-45x}{(5x)^5} = -\frac{5x(x^4+9)}{(5x)^5} = -\frac{x^4+9}{(5x)^4}$$

h) $f_8(x) = \frac{1}{(x-2)^2}; \quad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f_8'(x) = \frac{-2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{2}{(x-2)^3}$$

Lösung A3

$$f(x) = \frac{4-x}{2-x}$$

$$f'(x) = \frac{-(2-x)+(4-x)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}$$

$$f(-2) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f'(-2) = \frac{1}{8}$$

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(1,5) = 5$$

$$f'(1,5) = 8$$

$$f(2,5) = -3$$

$$f'(2,5) = -8$$

$$f(6) = \frac{1}{2}$$

$$f'(6) = \frac{1}{8}$$

