Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 18 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Produktregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-1)^4$

b) $f(x) = x^2 \cdot (1-x)^5$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (5+\sqrt{x})$

d) $f(x) = (3x^5 - 2x) \cdot \frac{2}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x + \frac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = \left(5\sqrt{x} + 3x\right) \cdot 5x$

Aufgabe A2

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Produktregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst. Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 \cdot (5x^2 - x + 7)$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) \cdot (x+5)$

c) $f(x) = \left(5\sqrt{x} + 3x\right) \cdot (5x+7)$

d) $f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x\right) \cdot \sqrt{x}$

e) $f(x) = (7x^5 + x^2 - 2x) \cdot (x^7 + 3x)$

f) $f_a(t) = (\sin(at) + at) \cdot t^2$

Aufgabe A3

Berechne die Steigung der Funktionen f_n an der angegebenen Stelle x_0.

a) $f_1(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot (3x+5);\ x_0 = -1$

b) $f_2(x) = 2x^6 \cdot \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right);\ x_0 = 2$

c) $f_3(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x^2 + \frac{1}{x^2}\right);\ x_0 = 1$

d) $f_4(x) = \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x\right) \cdot \left(\frac{2}{5}x - 8\right);\ x_0 = 0$

Aufgabe A4

An welcher Stelle verlaufen die Graphen der der Funktionen f und g parallel? Welche Steigung haben die Tangenten an dieser Stelle?

a) $f(x) = (x + 3x^2) \cdot (2x - 1)$ $\quad g(x) = 6x^3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 8x\right) \cdot \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = -\frac{1}{3x} + 2$

Lösung A1

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-1)^4 \qquad u = \sqrt{x} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad v = (x-1)^4 \qquad v' = 4(x-1)^3$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x-1)^4 + 4\sqrt{x} \cdot (x-1)^3 = \frac{(x-1)^4 + 8x(x-1)^3}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-1)^3 \cdot (9x-1)}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2}(x-1)^3 \cdot (9x-1) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \qquad u = \frac{1}{2}(x-1)^3 \qquad u' = \frac{3}{2}(x-1)^2$

$v = 9x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \qquad v' = \frac{9}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f''(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 \cdot \frac{(9x-1)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}(x-1)^3 \cdot \left(\frac{9x+1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 \cdot \left(27x - 3 + (x-1) \cdot \frac{9x+1}{2x}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 \cdot \left(\frac{(27x-3) \cdot 2x + (x-1) \cdot (9x+1)}{2x}\right) = \frac{(x-1)^2 \cdot (63x^2 - 14x - 1)}{4x\sqrt{x}}$

b) $f(x) = x^2 \cdot (1-x)^5 \qquad u = x^2 \qquad u' = 2x$

$v = (1-x)^5 \qquad v' = -5(1-x)^4$

$f'(x) = 2x \cdot (1-x)^5 - 5x^2 \cdot (1-x)^4 = (1-x^4) \cdot (2x \cdot (1-x) - 5x^2)$

$= (1-x)^4 \cdot (-7x^2 + 2x) \qquad u = (x-1)^4 \qquad u' = 4(x-1)^3$

$v = -7x^2 + 2x \qquad v' = -14x + 2$

$f''(x) = 4(x-1)^3 \cdot (-7x^2 + 2x) + (x-1)^4 \cdot (-14x + 2) =$

$= 2(x-1)^3 \cdot (2(-7x^2 + 2x) + (x-1) \cdot (-7x + 1) =$

$= 2(x-1)^3 \cdot (-14x^2 + 4x - 7x^2 + x + 7x - 1) = 2(x-1)^3 \cdot (-21x^2 + 12x - 1)$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (5 + \sqrt{x}) = 5\sqrt{x} + x$

$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 1$

$f''(x) = -\frac{5}{4x\sqrt{x}}$

d) $f(x) = (3x^5 - 2x) \cdot \frac{2}{x} \qquad u = 3x^5 - 2x \qquad u' = 15x^4 - 2$

$v = \frac{2}{x} \qquad v' = -\frac{2}{x^2}$

$f'(x) = (15x^4 - 2) \cdot \frac{2}{x} - (3x^5 - 2x) \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2} \cdot \left(x \cdot (15x^4 - 2) - (3x^5 - 2x)\right)$

$= \frac{2}{x^2} \cdot (12x^5) = 24x^3$

$f''(x) = 72x^2$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x + \frac{1}{x}\right) = 5x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$f'(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$f''(x) = \frac{15}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

f) $f(x) = (5\sqrt{x} + 3x) \cdot 5x = 25x^{\frac{3}{2}} + 15x^2$

$f'(x) = \frac{75}{2}\sqrt{x} + 30x$

$f''(x) = \frac{75}{4\sqrt{x}} + 30$

Lösung A2

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 \cdot (5x^2 - x + 7)$ $\quad u = \frac{2}{3}x^3 \quad u' = 2x^2$

$v = 5x^2 - x + 7 \quad v' = 10x - 1$

$f'(x) = 2x^2 \cdot (5x^2 - x + 7) + \frac{2}{3}x^3 \cdot (10x - 1) = 10x^4 - 2x^3 + 14x^2 + \frac{20}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3$

$= \frac{50}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 14x^2$

$f''(x) = \frac{200}{3}x^3 - 8x^2 + 28x$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) \cdot (x + 5)$ $\quad u = \frac{2}{x^2} - 1 \quad u' = -\frac{4}{x^3}$

$v = x + 5 \quad v' = 1$

$f'(x) = -\frac{4}{x^3} \cdot (x + 5) + \frac{2}{x^2} - 1 = -\frac{4}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 1 = -\frac{20}{x^3} - \frac{2}{x^2} - 1$

$f''(x) = \frac{60}{x^4} + \frac{4}{x^3}$

c) $f(x) = \left(5\sqrt{x} + 3x\right) \cdot (5x + 7)$ $\quad u = 5\sqrt{x} + 3x \quad u' = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 3$

$v = 5x + 7 \quad v' = 5$

$f'(x) = \left(\frac{5}{2\sqrt{x}} + 3\right)(5x + 7) + 5 \cdot \left(5\sqrt{x} + 3x\right) = \frac{25\sqrt{x}}{2} + \frac{35}{2\sqrt{x}} + 15x + 21$

$f''(x) = \frac{25}{4\sqrt{x}} - \frac{35}{4x\sqrt{x}} + 15 = \frac{25x - 35}{4x\sqrt{x}} + 15$

d) $f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x\right) \cdot \sqrt{x}$ $\quad u = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x \quad u' = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{10}$

$v = \sqrt{x} \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{10}\right) \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{10}x\right) = \frac{2}{x^2\sqrt{x}} + \frac{1}{10}\sqrt{x} - \frac{1}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{1}{20}\sqrt{x}$

$= \frac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{3}{20}\sqrt{x}$

$f''(x) = -\frac{15}{4x^3\sqrt{x}} + \frac{3}{40\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x + \frac{1}{x}\right)$ $\quad u = \sqrt{x} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = 5x + \frac{1}{x} \quad v' = 5 - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(5x + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{x} \cdot \left(5 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 5\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$= \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$f''(x) = \frac{15}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \left(5\sqrt{x} + 3x\right) \cdot 5x$ $\quad u = 5\sqrt{x} + 3x \quad u' = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 3$

$v = 5x \quad v' = 5$

$f'(x) = \frac{25x}{2\sqrt{x}} + 5 \cdot \left(5\sqrt{x} + 3x\right) = \frac{25}{2}\sqrt{x} + 25\sqrt{x} + 15x$

$= \frac{75}{2}\sqrt{x} + 15x$

$f''(x) = \frac{75}{4\sqrt{x}} + 15$

Lösung A3

a) $f_1(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot (3x + 5)$ $\quad u = \frac{1}{x} + 1 \quad u' = -\frac{1}{x^2}$

$v = 3x + 5 \quad v' = 3$

$f_1'(x) = -\frac{3x+5}{x^2} + 3\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ $\quad f_1'(-1) = -2$

b) $f_2(x) = 2x^6 \cdot \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)$ $\quad u = 2x^6 \quad u' = 12x^5$

$v = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \quad v' = -\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$

$f_2'(x) = 12x^5\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) + 2x^6\left(-\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}\right)$ $\quad f_2'(2) = 24 - 8 = 16$

c) $f_3(x) = \sqrt{x} \cdot \left(5x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ $\quad u = \sqrt{x} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = 5x^2 + \frac{1}{x^2} \quad v' = 10x - \frac{2}{x^3}$

$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(5x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \sqrt{x}\left(10x - \frac{2}{x^3}\right)$ $\quad f_3'(1) = 3 + 8 = 11$

d) $f_4(x) = \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x\right) \cdot \left(\frac{2}{5}x - 8\right)$ $\quad u = \frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x \quad u' = \frac{3}{8}x^2 + \frac{6}{5}$

$v = \frac{2}{5}x - 8 \quad v' = \frac{2}{5}$

$f_4'(x) = \left(\frac{3}{8}x^2 + \frac{6}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x - 8\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{6}{5}x\right)$ $\quad f_4'(0) = -\frac{48}{5}$

Lösung A4

a) $f(x) = (x + 3x^2) \cdot (2x - 1)$ $\quad u = x + 3x^2 \quad u' = 1 + 6x$

$v = 2x - 1 \quad v' = 2$

$f'(x) = (1 + 6x) \cdot (2x - 1) + 2(x + 3x^2) = 12x^2 - 2x - 1$

$g(x) = 6x^3$

$g'(x) = 12x^2$

$f'(x) \cap g'(x)$

$12x^2 - 2x - 1 = 12x^2$

$-2x - 1 = 0$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

$f'^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 \qquad g'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

An der Stelle $x_0 = -\frac{1}{2}$ verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von $m = 3$ parallel.

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 8x\right) \cdot \frac{1}{x}$ $\quad u = \frac{1}{2}x^2 + 8x \quad u' = x + 8$

$v = \frac{1}{x} \quad v' = -\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = (x + 8) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 8x\right) = 1 + \frac{8}{x} - \frac{1}{2} - \frac{8}{x} = \frac{1}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{x3} + 3$

$g'(x) = \frac{3}{x^4}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{x^4}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{6}$

An den Stellen $x_1 = \sqrt[4]{6}$ und $x_2 = -\sqrt[4]{6}$ verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von $m = \frac{1}{2}$ parallel.