Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

Dokument mit 21 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen $f_n(x)$ mit Hilfe der Quotientenregel und vereinfache soweit wie möglich.

$f_1(x) = \frac{5x}{x+1}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{2x}{1+3x}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{1-x}{x+2}$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{sin(x)}{2x-1}$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{x+1}{x-1}$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = \frac{x^2}{8-x}$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = \frac{0{,}5-2x}{cos(x)}$	$f_7'(x) =$
$f_8(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2}{1-sin(x)}$.	$f_8'(x) =$

Aufgabe A2

Ordne den gegebenen Ableitungsfunktionen $f_n'(x)$ ihre ursprüngliche Ausgangsfunktion $f_n(x)$ zu.

$f_1'(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$	$f_{10}(x) = \frac{1-x^2}{3x+5}$
$f_2'(x) = \frac{x-3}{2x^2\cdot\sqrt{2x-3}}$	$f_{11}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$
$f_3'(x) = -\frac{2\cdot(x\cdot sin(2x-1)+\cos(2x-1))}{x^3}$	$f_{12}(x) = \frac{3sin(x)}{8x-1}$
$f_4'(x) = \frac{3\,cos(3x)\cdot(x-1)-sin(3x)}{(x-1)^2}$	$f_{13}(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
$f_5'(x) = \frac{2\cdot(4x+1)}{(x+4)^3}$	$f_{14}(x) = \frac{x^2-1}{(x+4)^2}$
$f_6'(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1$	$f_{15}(x) = \frac{sin(3x)}{x-1}$
$f_7'(x) = \frac{3\,cos(x)\cdot(8x-1)-24sin(x)}{(8x-1)^2}$	$f_{16}(x) = \frac{cos(2x-1)}{x^2}$
$f_8'(x) = -\frac{x-2}{2\sqrt{x}\cdot(x+2)^2}$	$f_{17}(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{2x}$
$f_9'(x) = -\frac{3x^2+10x+3}{(3x+5)^2}$	$f_{18}(x) = \frac{6x^2+x-3}{3x}$

Aufgabe A3

a) An welcher Stelle hat die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ den Wert $-0{,}5$?

b) Gib die Steigung der Tangente im Punkt $P(1|g(1)$ an für $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

c) An welchen Stellen stimmen die Funktionswerte der Ableitungen von h mit $h(x) = x^2$ und m mit $m(x) = -\frac{1}{x^2}$ überein? Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe A4

Die Funktion f mit $f(t) = \frac{2000t+200}{t+1}$; $t \geq 0$ beschreibt modellhaft die Entwicklung eines Tierbestandes auf einer Insel im Südpazifik (t: Zeit in Jahren seit Beobachtungsbeginn, $f(t)$: Anzahl der Tiere).
Bestimme die anfängliche momentane Änderungsrate m_0 des Bestandes. Wann hat die momentane Änderungsrate auf 10% von m_0 abgenommen?

Lösung A1

$f_1(x)=\frac{5x}{x+1}$	$f_1{}'(x)=\frac{5(x+1)-5x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$
$f_2(x)=\frac{2x}{1+3x}$	$f_2{}'(x)=\frac{2(1+3x)-6x}{(1+3x)^2}=\frac{2}{(1+3x)^2}$
$f_3(x)=\frac{1-x}{x+2}$	$f_3{}'(x)=\frac{-(x+2)-(1-x)}{(x+2)^2}=-\frac{3}{(x+2)^2}$
$f_4(x)=\frac{sin(x)}{2x-1}$	$f_4{}'(x)=\frac{cos(x)\cdot(2x-1)-2sin(x)}{(2x-1)^2}$
$f_5(x)=\frac{x+1}{x-1}$	$f_5{}'(x)=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$
$f_6(x)=\frac{x^2}{8-x}$	$f_6{}'(x)=\frac{2x(8-x)+x^2}{(8-x)^2}=\frac{-x^2+16x}{(x-8)^2}=-\frac{x^2-16x}{(x-8)^2}$
$f_7(x)=\frac{0{,}5-2x}{cos(x)}$	$f_7{}'(x)=\frac{-2\,cos(x)+(0{,}5-2x)sin(x)}{cos^2(x)}$
$f_8(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2}{1-sin(x)}$.	$f_8{}'(x)=\frac{x(1-sin(x))+\frac{1}{2}x^2cos(x)}{(1-sin(x))^2}$

Lösung A2

$f_1'(x)=\frac{2x^2+1}{x^2}$	$f_{18}(x)=\frac{6x^2+x-3}{3x}$
$f_2'(x)=\frac{x-3}{2x^2\cdot\sqrt{2x-3}}$	$f_{17}(x)=\frac{\sqrt{2x-3}}{2x}$
$f_3'(x)=-\frac{2\cdot(x\cdot sin(2x-1)+\cos(2x-1))}{x^3}$	$f_{16}(x)=\frac{cos(2x-1)}{x^2}$
$f_4{}'(x)=\frac{3\,cos(3x)\cdot(x-1)-sin(3x)}{(x-1)^2}$	$f_{15}(x)=\frac{sin(3x)}{x-1}$
$f_5'(x)=\frac{2\cdot(4x+1)}{(x+4)^3}$	$f_{14}(x)=\frac{x^2-1}{(x+4)^2}$
$f_6'(x)=\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1$	$f_{13}(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$
$f_7'(x)=\frac{3\,cos(x)\cdot(8x-1)-24sin(x)}{(8x-1)^2}$	$f_{12}(x)=\frac{3sin(x)}{8x-1}$
$f_8'(x)=-\frac{x-2}{2\sqrt{x}\cdot(x+2)^2}$	$f_{11}(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2}$
$f_9'(x)=-\frac{3x^2+10x+3}{(3x+5)^2}$	$f_{10}(x)=\frac{1-x^2}{3x+5}$

Lösung A3

a) $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ $\quad u=x+3 \quad u'=1 \quad v=2x \quad v'=2$

$f'(x)=\frac{2x-2(x+3)}{4x^2}=-\frac{3}{2x^2}$

$f'(x)=-0{,}5=-\frac{3}{2x^2}$

$-x^2=-3$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$

Die Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ hat in $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ den Wert $-0{,}5$.

b) $g(x)=\frac{x}{x+1}$ $\quad u=x \quad u'=1 \quad v=x+1 \quad v'=1$

$g'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$

$g'(1)=\frac{1}{4}$

Die Steigung der Tangente im Punkt $P(1|g(1)$ beträgt $m=\frac{1}{4}$.

c) $h(x) = x^2$ $\qquad h'(x) = 2x$

$m(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad m'(x) = \frac{2}{x^3}$

$h'(x) \cap m'(x)$

$2x = \frac{2}{x^3}$

$x^4 = 1$

$x_{1,2} = \pm 1$

$h'(1) = 2$ $\qquad m'(1) = 2$

$h'(-1) = -2$ $\qquad m'(-1) = -2$

Die Funktionswerte der Ableitungen von h und m stimmen für $x_{1,2} = \pm 1$ überein. Dies bedeutet, dass die Tangenten an h und m in $x_{1,2} = \pm 1$ jeweils parallel verlaufen.

Lösung A4

$f(t) = \frac{2000t+200}{t+1}$ $\qquad f'(t) = \frac{2000(t+1)-(2000t+200)}{(t+1)^2} = \frac{1800}{(t+1)^2}$

$m_0 = f'(0) = 1800$

$0{,}1 \cdot m_0 = 180$

$f'(t) = 180 = \frac{1800}{(t+1)^2}$

$180(t+1)^2 = 1800$

$(t+1)^2 = 10$

$|t+1| = \sqrt{10}$

$t_1 = \sqrt{10} - 1 \approx 2{,}16;\ \ t_2 = -\sqrt{10} - 1$

Wegen Aufgabenstellung $t \geq 0$ entfällt t_2.

Die anfängliche momentane Änderungsrate m_0 des Bestandes beträgt 1800 Tiere/Jahr.

Etwa nach 2 Jahren und 2 Monaten beträgt die momentane Änderungsrate nur noch 10% der anfänglichen Änderungsrate.